ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2001. Серия 2. Том 8, № 1, 47–69

УДК 519.6

УСТОЙЧИВОСТЬ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

В. А. Емеличев, Д. П. Подкопаев

Излагаются результаты исследования различных видов устойчивости векторных задач целочисленного линейного программирования. Рассматриваются задачи поиска множества Парето и поиска множества лексикографических оптимумов. Указываются границы изменений входных параметров таких задач, сохраняющие определенные свойства искомых множеств эффективных решений. Предлагаются критерии устойчивости и регуляризирующие операторы, переводящие возможно неустойчивую векторную задачу в серию устойчивых эквивалентных ей задач.

Введение

Понимание проблемы устойчивости как одной из наиболее актуальных восходит к Ж. Адамару [83]. Необходимость исследования устойчивости оптимизационных задач обусловлена такими факторами, как неточность исходных данных, неадекватность математических моделей реальным процессам, погрешность численных методов, ошибки округления и т. д. В этих условиях важно выделять такие классы задач, в которых малым изменениям входных параметров соответствуют малые изменения выходных результатов. Задачи, обладающие этим свойством, принято называть устойчивыми. Ни одна оптимизационная задача, возникающая на практике, не может быть корректно поставлена и решена без проведения анализа чувствительности решений к изменениям входных параметров, т. е. без использования результатов теории устойчивости.

В настоящей работе дается обзор последних результатов по исследованию количественных характеристик устойчивости векторной (многокритериальной) задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

*) Исследование выполнено в рамках государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Алгоритм».

Под векторной оптимизационной задачей обычно понимают задачу нахождения некоторого множества эффективных решений, т. е. выбор из множества допустимых решений тех альтернатив, которые удовлетворяют заданному принципу оптимальности. В случае, когда частные критерии задачи равноважны, в качестве такого принципа чаще всего рассматривают оптимальность по Парето [21, 23, 67, 71, 75, 84]. Если все частные критерии упорядочены по важности таким образом, что каждый из них важнее всех последующих, то используют принцип лексикографической оптимальности [53, 62, 63, 66, 70, 74, 77, 89]. Под исследованием устойчивости векторной задачи оптимизации обычно понимают изучение поведения множества эффективных решений при возмущениях параметров задачи. Наиболее разработанной и освещенной в литературе является техника проведения исследований устойчивости оптимизационных задач (как однокритериальных, так и многокритериальных) с непрерывным множеством допустимых решений (см., например, [3, 5, 6, 22, 23, 62, 64, 72, 73, 88]).

В последние десятилетия многие специалисты проявляют интерес к проблеме устойчивости задач дискретной оптимизации (см. монографию [71], а также обзоры [55, 86, 87]). Один из подходов к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации связан с получением количественных оценок допустимых изменений параметров задачи. Такие оценки называются *радиусами устойчивости*. Понятие радиуса устойчивости было впервые введено и исследовано в [58, 59] для линейной скалярной (однокритериальной) траекторной задачи, т. е. задачи на системе подмножеств конечного множества с линейным критерием (вида MINSUM). Анализируя устойчивость таких задач в работах [2, 12–20, 58–61], основное внимание авторы уделяют формулам и алгоритмам нахождения радиуса устойчивости. Ряд результатов, обобщающих эти исследования на случай векторного критерия, получен в [1, 4, 7–11, 24, 30, 31, 34–36, 38–45, 47, 54, 68, 69, 76, 78, 80–82].

Кратко изложим содержание настоящего обзора, состоящего из трех разделов.

В первом разделе рассматривается векторная задача ЦЛП поиска множества Парето, в которой параметры векторного критерия подвергаются независимым возмущениям. Указаны формулы, а в некоторых случаях достижимые оценки радиусов различных видов устойчивости.

Во втором разделе исследуется устойчивость векторных целочисленных линейных задач лексикографической и последовательной оптимизации. Указаны нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости и формула радиуса квазиустойчивости задачи лексикографической оптимизации. Для векторной задачи последовательной оптимизации приводится критерий устойчивости, нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости.

Существование неустойчивых (некорректно поставленных по Адамару) векторных задач дискретной оптимизации естественно приводит к необходимости создания регуляризирующего оператора. Первый результат в этом направлении был получен в работе [57] (см. также монографию [71]), в которой на основе аппарата выпуклых конусов предложены регуляризации как по векторному критерию, так и по ограничениям векторной задачи ЦЛП.

В третьем разделе обобщается результат работы [57] в том смысле, что указанный здесь регуляризирующий оператор переводит возможно неустойчивую исходную задачу ЦЛП в серию не только устойчивых, но одновременно и эквивалентных задач, т. е. задач с первоначальным множеством Парето. Аналогичный подход осуществлен и для регуляризации векторной целочисленной задачи последовательной оптимизации. Предложен также прием ε-регуляризации задач, позволяющий заменить неустойчивую задачу возмущенной ε-устойчивой задачей.

1. Устойчивость задачи поиска множества Парето

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим векторную задачу ЦЛП в следующей постановке.

Пусть n — число переменных (размерность задачи), k — число критериев, $C = (c_{ij})$ — матрица размера $k \times n$ с элементами из $\mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{Z}^n$ — множество допустимых решений, причем $1 < |X| < \infty$.

На множестве целочисленных векторов X зададим линейный векторный критерий Cx, компоненты которого (частные критерии), не ограничивая общности, будем считать минимизируемыми:

$$C_i x \to \min_{x \in X}, \text{ где } i \in N_k := \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Здесь и далее нижний индекс у матрицы указывает на номер соответствующей строки; $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

Под векторной задачей ЦЛП будем понимать задачу нахождения множества Парето, т. е. множества эффективных (оптимальных по Парето) решений [21, 23, 67, 71, 75, 84]

$$P^k(C) = \{x \in X \mid \pi(x, C) = \varnothing\},$$

где

$$\pi(x, C) = \{x' \in X \mid Cx \geqslant Cx' \text{ и } Cx \neq Cx'\}.$$

Такую задачу будем обозначать через $Z_P^k(C)$.

Введем также множество Слейтера [21, 23, 67, 71, 75, 84], т. е. множество слабо эффективных решений

$$Sl^k(C) = \{x \in X \mid \sigma(x, C) = \varnothing\},$$

и множество Смейла [85], т. е. множество строго эффективных решений

$$Sm^k(C) = \{x \in X \mid \eta(x, C) = \varnothing\},$$

где

$$\sigma(x, C) = \{x' \in X \mid Cx > Cx'\},$$
$$\eta(x, C) = \{x' \in X \setminus \{x\} \mid Cx \geqslant Cx'\}.$$

При любой матрице $C \in \mathbf{R}^{k \times n}$ очевидны включения

$$Sm^k(C) \subseteq P^k(C) \subseteq Sl^k(C). \tag{1}$$

Ясно, что в частном случае, когда $k = 1$, рассматриваемая задача превращается в обычную скалярную задачу ЦЛП $Z^1_P(C)$, $C \in \mathbf{R}^n$, на ограниченном множестве, а множества Парето и Слейтера совпадают ($P^1(C) = Sl^1(C)$) и превращаются в множество оптимальных решений.

Для всякого натурального числа q в q-мерном действительном пространстве $\mathbf{R}^q$ зададим норму l_∞, т. е.

$$\| z \| = \max\{|z_i| \mid i \in N_q\},$$

и в пространстве, сопряженном с $\mathbf{R}^q$, зададим норму l_1, т. е.

$$\| z \|^* = \sum_{i \in N_q} |z_i|.$$

Под нормой матрицы $B = (b_{ij})$ размерности $k \times n$ с элементами из $\mathbf{R}$ будем понимать норму вектора $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{kn})$.

Пусть $B \in \mathbf{R}^{k \times n}$. Задачу $Z^k_P(C+B)$, полученную из исходной задачи $Z^k_P(C)$ путем сложения матриц C и B, будем называть *возмущенной*, а матрицу B — *возмущающей*.

При любом числе $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\mathscr{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{k \times n} \mid \| B \| < \varepsilon\}.$$

1.2. Устойчивость и квазиустойчивость

Наиболее распространенным определением устойчивости задачи ЦЛП (см., например, [55, 71]) является следующее

Определение 1.1. Векторная задача ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, называется *устойчивой* (к возмущениям элементов матрицы C), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой $B \in \mathscr{B}(\varepsilon)$

$$P^k(C + B) \subseteq P^k(C).$$

Очевидно, что свойство устойчивости задачи является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) в точке $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$ оптимального отображения

$$P^k : \mathbf{R}^{k\times n} \to 2^X, \tag{2}$$

т. е. точечно-множественного (многозначного) отображения, которое каждому набору параметров задачи (каждой матрице C) ставит в соответствие множество Парето (см., например, [5, 6, 55, 71]).

Хорошо известен следующий критерий устойчивости.

Теорема 1.1 [56, 71]. *Векторная задача* ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 2$, *устойчива тогда и только тогда, когда*

$$P^k(C) = Sl^k(C).$$

Заметим, что любая скалярная задача ЦЛП устойчива [27].

Следующее определение восходит к [58, 59].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Радиусом устойчивости* векторной задачи ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, называется число

$$\rho^k_1(C) = \begin{cases} \sup \Omega_1(C), & \text{если } \Omega_1(C) \neq \varnothing; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\Omega_1(C) = \{\varepsilon > 0 \mid \forall B \in \mathscr{B}(\varepsilon)\ (P^k(C+B) \subseteq P^k(C))\}$.

Другими словами, радиус устойчивости задачи — это предельный уровень возмущений элементов матрицы C, которые не приводят к появлению новых эффективных решений.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^k(C) = X$ задача $Z^k_P(C)$ всегда устойчива и ее радиус устойчивости равен бесконечности. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^k_P(C)$, когда множество $\overline{P}^k(C) = X \setminus P^k(C)$ не пусто, будем называть *нетривиальной*.

Введем обозначение

$$\varphi^k_1(C) = \min_{x\in\overline{P}^k(C)} \ \max_{x'\in\pi(x,C)} \ \min_{i\in N_k} \frac{C_i(x-x')}{\| x - x' \|_*}.$$

Теорема 1.2 [46]. *Для радиуса устойчивости нетривиальной векторной задачи* ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, *справедливы неравенства*

$$\varphi^k_1(C) \leqslant \rho^k_1(C) \leqslant \| C \|,$$

причем

$$\rho^k_1(C) = \varphi^k_1(C),$$

если $Z^k_P(C)$ является задачей с булевыми переменными ($X \subseteq \{0,1\}^n$);

$$\rho^k_1(C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x^0)}{\| x - x^0 \|^*}, \tag{3}$$

если x^0 — единственное эффективное решение задачи.

Заметим, что формулы для радиуса устойчивости однокритериальной линейной траекторной задачи (формула (4) из [59]) и радиуса устойчивости единственного решения однокритериальной линейной задачи на конечном множестве точек в $\mathbf{R}^n$ (формула (46) из [59]) являются частными случаями теоремы 1.2.

Рассмотрим теперь вариант определения устойчивости, который является дискретным аналогом полунепрерывности снизу (по Хаусдорфу) в точке C оптимального отображения (2). Для нашей задачи полунепрерывность снизу означает, что существует окрестность матрицы C, в которой множество Парето может лишь расшириться.

Определение 2.3. Векторная задача ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, называется *квазиустойчивой*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой матрицы $B \in \mathscr{B}(\varepsilon)$

$$P^k(C) \subseteq P^k(C + B).$$

Определение 1.4. *Радиусом квазиустойчивости* задачи $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, называется число

$$\rho^k_2(C) = \begin{cases} \sup \Omega_2(C), & \text{если } \Omega_2(C) \neq \varnothing; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\Omega_2(C) = \{\varepsilon > 0 \mid \forall B \in \mathscr{B}(\varepsilon)\ (P^k(C) \subseteq P^k(C + B))\}$.

Тем самым радиус квазиустойчивости задает предельный уровень возмущений, сохраняющих все эффективные решения исходной задачи.

Пусть

$$\varphi^k_2(C) = \min_{x' \in P^k(C)} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \max_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*}.$$

Теорема 1.3 [46]. *Радиус квазиустойчивости $\rho^k_2(C)$ векторной задачи* ЦЛП *$Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, равен $\varphi^k_2(C)$.*

Формула радиуса квазиустойчивости векторной задачи ЦЛП, указанная в теореме 1.3, легко превращается в известную формулу радиуса квазиустойчивости векторной траекторной задачи с линейными критериями [35, 36].

Из теоремы 1.3 также вытекает следующий результат.

Следствие 1.1. *Необходимым и достаточным условием квазиустойчивости векторной задачи* ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, *является равенство*

$$P^k(C) = Sm^k(C).$$

Заметим, что ранее это утверждение было доказано в [56] для случая, когда $k \geqslant 2$.

Легко показать, что для однокритериальной задачи ЦЛП совпадение множеств Парето и Слейтера эквивалентно единственности оптимального решения. Поэтому частным случаем следствия 1.1 является

Следствие 1.2. *Однокритериальная (скалярная) задача* ЦЛП $Z^1_P(C)$ $(C \in \mathbf{R}^n)$ *квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное оптимальное решение.*

Отсюда, в свою очередь, следует известный аналогичный результат для линейной однокритериальной траекторной задачи [59].

1.3. Сильная устойчивость и сильная квазиустойчивость

Исходя из определения 1.2 под радиусом устойчивости задачи $Z^k_P(C)$ понимается предел таких независимых возмущений параметров векторного критерия, когда не возникает новых эффективных решений. Ослабляя требование непоявления новых оптимумов Парето, приходим к понятию радиуса сильной устойчивости, которое впервые было введено в [59] для однокритериальных задач. Этот тип устойчивости трактуется как наличие таких возмущений упомянутых параметров, при которых хотя и возможно появление новых оптимумов Парето, но для каждого «малого» возмущения параметров должно существовать хотя бы одно эффективное решение (не обязательно одно и то же), сохраняющее оптимальность по Парето.

По аналогии с [59] задачу $Z^k_P(C)$ будем называть *сильно устойчивой*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что при любой матрице $B \in \mathscr{B}(\varepsilon)$

$$P^k(C+B) \cap P^k(C) \neq \varnothing.$$

Определение 1.5. *Радиусом сильной устойчивости* векторной задачи ЦЛП $Z^k_P(C)$, $k \geqslant 1$, называется число

$$\rho^k_3(C) = \begin{cases} \sup \Omega_3(C), & \text{если } \Omega_3(C) \neq \varnothing; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\Omega_3(C) = \{\varepsilon > 0 \mid \forall B \in \mathscr{B}(\varepsilon)\ (P^k(C+B) \cap P^k(C) \neq \varnothing)\}.$$

Ясно, что радиус сильной устойчивости тривиальной задачи $Z^k_P(C)$ $(\overline{P}^k(C) = X \backslash P^k(C) = \varnothing)$ бесконечен.

Очевидно, что радиусы устойчивости (см. определение 1.2) и сильной устойчивости при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$ связаны соотношением

$$\rho_1^k(C) \leqslant \rho_3^k(C).$$

Введем обозначения

$$\varphi_3^k(C) = \max_{x' \in P^k(C)} \min_{x \in \overline{P}^k(C)} \max_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*},$$

$$\psi_3^k(C) = \min_{x \in \overline{P}^k(C)} \max_{x' \in P^k(C)} \max_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*}.$$

Теорема 1.4 [79]. *Радиус сильной устойчивости $\rho_3^k(X, C)$ нетривиальной векторной задачи ЦЛП $Z_P^k(C), k \geqslant 1$, удовлетворяет неравенству*

$$\rho_3^k(C) \geqslant \varphi_3^k(C) > 0,$$

причем

$$\psi_3^k(C) \geqslant \rho_3^k(C) \geqslant \varphi_3^k(C) > 0,$$

если $Z_P^k(C)$ — задача с булевыми переменными ($X \subseteq \{0,1\}^n$).

Следствие 1.3 [79]. *При $k \geqslant 1$ всякая задача $Z_P^k(C)$ сильно устойчива.*

Из теорем 1.2, 1.4 и очевидного неравенства $\rho_1^1(C) \leqslant \rho_3^1(C)$ легко получить

Следствие 1.4 [59]. *Для всякой однокритериальной булевой задачи $Z_P^1(C)$ справедливо равенство*

$$\rho_1^1(C) = \rho_3^1(C).$$

Под радиусом квазиустойчивости векторной задачи $Z_P^k(C)$ понимаем (см. определение 1.4) предел таких независимых возмущений параметров векторного критерия, когда не исчезает ни одно эффективное решение исходной задачи. Ослабляя требование сохранения всего множества Парето, приходим к понятию радиуса сильной квазиустойчивости задачи $Z_P^k(C)$. Этот тип устойчивости (ср. с [59]) трактуется как наличие таких возмущений параметров, при которых хотя и возможно исчезновение прежних эффективных решений, но должно существовать хотя бы одно эффективное решение исходной задачи, сохраняющее оптимальность по Парето при любом «малом» возмущении параметров, т. е. необходимо существование хотя бы одного устойчивого оптимума Парето.

Определение 1.6. *Радиусом сильной квазиустойчивости* задачи $Z_P^k(C)$, $k \geqslant 1$, называется число

$$\rho_4^k(C) = \begin{cases} \sup \Omega_4(C), & \text{если } \Omega_4(C) \neq \varnothing; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\Omega_4(C) = \{\varepsilon > 0 \mid \exists\, x \in P^k(C)\ \forall B \in \mathscr{B}(\varepsilon)\ (x \in P^k(C+B))\}.$$

Введем обозначение

$$\varphi_4^k(C) = \max_{x' \in P^k(C)} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \max_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*}.$$

Теорема 1.5 [79]. *Радиус сильной квазиустойчивости $\rho_4^k(C)$ векторной задачи* ЦЛП $Z_P^k(C)$, $k \geqslant 1$, *равен $\varphi_4^k(C)$.*

Поскольку в терминологии работы [54] величина $\rho_4^k(C)$ является радиусом ядра устойчивости задачи, из теоремы 1.5 вытекает известная (см. [54]) формула вычисления такого радиуса для векторной траекторной задачи с линейными критериями.

Задачу $Z_P^k(C)$ назовем *сильно квазиустойчивой*, если $\rho_4^k(C) > 0$.

Из теоремы 1.5 вытекает

Следствие 1.5 [79]. *Для того чтобы задача $Z_P^k(C)$, $k \geqslant 1$, была сильно квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы множество Смейла $Sm^k(C)$ было не пусто.*

Отсюда, в частности, получаем

Следствие 1.6 [59]. *Однокритериальная линейная траекторная задача сильно квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное оптимальное решение.*

Кроме того, из теорем 1.4 и 1.5 вытекает

Следствие 1.7.

$\rho_3^k(C) \geqslant \rho_4^k(C)$, т. е. *всякая сильно квазиустойчивая задача $Z_P^k(C)$ сильно устойчива.*

В заключение данного раздела заметим, что из определений радиусов рассмотренных типов устойчивости вытекает

Следствие 1.8 [59]. *Для каждой однокритериальной булевой задачи $Z_P^1(C)$ с единственным оптимальным решением справедливы соотношения*

$$\rho_1^1(C) = \rho_2^1(C) = \rho_3^1(C) = \rho_4^1(C) > 0.$$

2. Устойчивость задачи лексикографической оптимизации

2.1. Устойчивость и квазиустойчивость

Как и прежде, будем исходить из векторной постановки задачи ЦЛП:

$$Cx \to \min_{x \in X}$$

при условии, что

$$X \subset \mathbf{Z}^n, \ |X| < \infty \ \text{ и } C = (c_{ij}) \ \text{ есть матрица размера } k \times n.$$

Под k-критериальной целочисленной задачей лексикографической оптимизации $Z^k_L(C)$ будем понимать задачу нахождения лексикографического множества $L^k(C)$, которое определяется следующим традиционным образом (см. [7, 9, 10, 24–28, 32, 33, 37, 48–52, 65, 76, 78]).

Пусть S_k — множество всех $k!$ перестановок чисел $1, 2, \dots, k$. Для каждой перестановки $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in S_k$ в критериальном пространстве $\mathbf{R}^k$ введем бинарное отношение лексикографического порядка «$\prec_s$»: для $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_k) \in \mathbf{R}^k$ положим $y \prec_s y'$, если выполняется одно из двух условий:

1) $y = y'$;

2) $\exists j \in N_k \ \forall q \in N_{j-1} (y_{s_j} < y'_{s_j} \ \& \ y_{s_q} = y'_{s_q})$.

Здесь $N_{j-1} = \{1, 2, \dots, j-1\}$ и $N_0 = \varnothing$ (при $j = 1$).

Для каждой перестановки $s \in S_k$ введем множество $L^k(C, s)$ наименьших элементов:

$$L^k(C, s) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \ (Cx \prec_s Cx')\}.$$

Тогда *лексикографическое множество* $L^k(C)$ задачи $Z^k_L(C)$ определяется равенством

$$L^k(C) = \bigcup_{s \in S_k} L^k(C, s),$$

а элементы этого множества называются *лексикографическими оптимумами*. Очевидно, что всякий такой оптимум является оптимумом Парето.

Ясно, что при $k = 1$ это обычная задача целочисленного программирования с линейным критерием (вида MINSUM) на конечном множестве допустимых решений из $\mathbf{Z}^n$. Тем самым множество $L^1(C) = P^1(C)$, где $C \in \mathbf{R}^n$, является множеством оптимальных решений скалярной задачи ЦЛП.

Радиусы устойчивости и квазиустойчивости задачи $Z^k_L(C)$, $k \geqslant 1$, заданные аналогично определениям 1.2 и 1.4, будем обозначать соответственно через $\rho^k_5(C)$ и $\rho^k_6(C)$. Как и прежде, будем рассматривать лишь

так называемые нетривиальные задачи, т. е. задачи, когда множество $\overline{L}^k(C) = X \setminus L^k(C)$ непусто.

Введем обозначение

$$\varphi_5^k(C) = \min_{x \in \overline{L}^k(C)} \min_{i \in N_k} \max_{x' \in X \setminus \{x\}} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*}.$$

Очевидно, что $\varphi_5^k(C) \geqslant 0$.

Теорема 2.1 [27]. *Радиус устойчивости $\varphi_5^k(C)$ нетривиальной целочисленной задачи лексикографической оптимизации $Z_L^k(C)$, $k \geqslant 1$, удовлетворяет соотношениям*

$$\varphi_5^k(C) \leqslant \rho_5^k(C) \leqslant \| C \|, \tag{4}$$

причем

$$\rho_5^k(C) = \varphi_5^k(C), \tag{5}$$

если $Z_L^k(C)$ — задача с булевыми переменными, т. е. X — множество в $\mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$;

$$\rho_5^k(C) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i \in N_k} \frac{C_i(x - x^0)}{\| x - x^0 \|^*}, \tag{6}$$

если множество $L^k(C)$ содержит единственный лексикографический оптимум x^0.

В [27] приведены примеры, свидетельствующие о достижимости оценок из (4).

Очевидно, что формулы для радиусов устойчивости однокритериальной линейной траекторной задачи (формула (4) из [59]) и устойчивости единственного решения однокритериальной линейной задачи на конечном множестве точек в $\mathbf{R}^n$ (формула (46) из [59]) являются частными случаями теоремы 2.1.

Введем множество слабых лексикографических оптимумов задачи $Z_L^k(C)$:

$$S_1^k(C) = \{x \in X \mid \exists i = i(x) \in N_k \ \forall x' \in X \setminus \{x\} \ (C_i x \leqslant C_i x')\}.$$

Очевидно, что $L^k(C) \subseteq S_1^k(C)$.

Из теоремы 2.1 вытекает критерий устойчивости векторной линейной траекторной задачи лексикографической оптимизации.

Следствие 2.1 [27]. *Нетривиальная целочисленная задача лексикографической оптимизации $Z_L^k(C)$, $m \geqslant 2$, с булевыми переменными $(X \subseteq \mathbf{E}^n)$ устойчива тогда и только тогда, когда*

$$L^k(C) = S_1^k(C).$$

Теорема 2.2 [27]. *При любом $k \geqslant 1$ радиус квазиустойчивости $\rho_6^k(C)$ целочисленной задачи лексикографической оптимизации $Z_L^k(C)$ задается формулой*

$$\rho_6^k(C) = \min_{x' \in L^k(C)} \max_{i \in N_k} \min_{x \in X \setminus \{x'\}} \frac{C_i(x - x')}{\| x - x' \|^*}. \tag{7}$$

Легко видеть, что при переходе к задаче булева программирования формула (7) превращается в известную ранее формулу радиуса квазиустойчивости траекторной задачи лексикографической оптимизации с линейными частными критериями (см. теорему 2 [24]).

Введем множество $S_2^k(C)$ строгих лексикографических оптимумов:

$$S_2^k(C) = \{x \in X \mid \exists i = i(x) \in N_k \ \forall x' \in X \setminus \{x\} \ (C_i x < C_i x')\}.$$

Очевидно, что $S_2^k(C) \subseteq L^k(C)$.

Из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.2. *При любом $k \geqslant 1$ необходимым и достаточным условием квазиустойчивости целочисленной задачи лексикографической оптимизации $Z_L^k(C)$ является равенство*

$$S_2^k(C) = L^k(C).$$

Отсюда следует, что в случае, когда задача $Z_L^k(C)$ квазиустойчива, справедливо неравенство $|L^k(C)| \leqslant k$.

Из следствия 2.2, в частности, вновь (см. следствие 1.2) вытекает, что *однокритериальная задача $Z_L^1(C)$ (C — вектор) квазиустойчива тогда и только тогда, когда она имеет единственное оптимальное решение.*

2.2. Устойчивость задачи последовательной оптимизации

Теперь рассмотрим задачу $Z_{\mathscr{L}}^k(C)$, $k \geqslant 1$, нахождения множества лексикографических оптимумов

$$\mathscr{L}^k(C) = \{x \in X \mid Cx \prec_\sigma Cx', \ x' \in X\},$$

где σ — тождественная подстановка.

Очевидно (см., например, [53, 70]), что множество лексикографических оптимумов $\mathscr{L}^k(C)$, являясь подмножеством множества Парето, может быть определено как результат решения последовательности скалярных задач

$$\mathscr{L}_i^k(C) = \arg\min \{C_i x \mid x \in \mathscr{L}_{i-1}^k(C)\}, \ i \in N_k,$$

где $\mathscr{L}_0^k(C) = X$. Таким образом, $\mathscr{L}^k(C) = \mathscr{L}_k^k(C)$. Поэтому задачу $Z_{\mathscr{L}}^k(C)$ нахождения множества лексикографических оптимумов $\mathscr{L}^k(C)$ называют *задачей последовательной оптимизации.*

Ясно, что в случае, когда $k = 1$, эта задача превращается в обычную (скалярную) задачу ЦЛП на ограниченном множестве.

Радиус устойчивости и радиус квазиустойчивости задачи $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ будем обозначать соответственно через $\rho^k_7(C)$ и $\rho^k_8(C)$.

Теорема 2.3 [50]. *Пусть*

$$\alpha = \min\{C_1(x - x') \mid x \in \overline{\mathscr{L}}^k(C),\ x' \in \mathscr{L}^k(C)\}, \tag{8}$$

$$\beta = \max\{\| x - x' \|^* \mid x \in \overline{\mathscr{L}}^k(C),\ x' \in \mathscr{L}^k(C)\}. \tag{9}$$

Тогда при любом $k \geqslant 1$ радиус устойчивости $\rho^k_7(C)$ нетривиальной задачи последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\alpha}{\beta} \leqslant \rho^k_7(C) \leqslant \| C \| .$$

Теорема 2.4 [50]. *При любом $k \geqslant 1$ необходимым и достаточным условием устойчивости задачи последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ является равенство $\mathscr{L}^k(C) = \mathscr{L}^k_1(C)$.*

3. Регуляризация

3.1. Регуляризация задачи поиска множества Парето

Вновь вернемся к векторной задаче ЦЛП $Z^k_P(C)$ поиска множества Парето $P^k(C)$, сформулированной в п. 1.1. Как уже отмечалось во введении, существование неустойчивых задач $Z^k_P(C)$ требует создания регуляризирующего оператора, переводящего возможно неустойчивую задачу в устойчивую.

Будем предполагать, что число частных критериев $k \geqslant 2$, поскольку всякая скалярная задача ЦЛП $Z^1_P(C)$ устойчива и поэтому не требует регуляризации.

Определение 3.1. Пусть $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Отображение $\varphi : \mathbf{R}^{k\times n} \to \mathbf{R}^{k\times n}$, которое определяется по правилу

$$\forall C \in \mathbf{R}^{k\times n} \quad (\varphi(C) = C + A),$$

называется *A-оператором.*

Тем самым A-оператор всякую задачу $Z^k_P(C)$ переводит в задачу $Z^k_P(C + A)$.

Определение 3.2. Говорят, что A-оператор *стабилизирует* векторную задачу ЦЛП $Z^k_P(C)$, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\forall C' \in \mathscr{B}(\varepsilon) \quad (P^k(C + A + C') \subseteq P^k(C)). \tag{10}$$

Пусть матрица $M = (\mu_{ij}) \in \mathbf{R}_{>}^{k\times k}$, вектор $t \in \mathbf{R}_{>}^{k}$, где

$$\mathbf{R}_{>} = \{u \in \mathbf{R} \mid u > 0\}.$$

Тогда матрице $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$ поставим в соответствие матрицу

$$A(C, M, t) = (A_1, A_2, ..., A_k)^T$$

со строками

$$A_i = t_i \sum_{q=1}^{k} \mu_{iq} C_q, \quad i \in N_k.$$

Теорема 3.1 [51]. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$, где $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 1$. Для любой матрицы $M \in \mathbf{R}_{>}^{k\times k}$ и всякого вектора $t \in \mathbf{R}_{>}^{k}$ $A(C, M, t)$-оператор стабилизирует векторную задачу* ЦЛП $Z_P^k(C)$, *причем*

$$Sl^k(C + A(C, M, t)) \subseteq P^k(C).$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает следующий ранее известный результат.

Следствие 3.1 [57] (см. также [71]). *Пусть $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$, где $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ и строки матрицы $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$ задаются в виде*

$$A_i = \tau \sum_{q=1}^{k} \lambda_q C_q \quad \text{при любом } i \in N_k,$$

где $\tau > 0$, $\sum\limits_{q=1}^{k} \lambda_q = 1$, $\lambda_q > 0$, $q \in N_k$. Тогда A-оператор стабилизирует векторную задачу ЦЛП $Z_P^k(C)$ *и любое слабо эффективное решение возмущенной задачи $Z_P^k(C + A)$ является эффективным решением исходной задачи $Z_P^k(\mathrm{C})$.*

Определение 3.3. Пусть $C, D \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Задачи $Z_P^k(C)$ и $Z_P^k(D)$ с одним и тем же множеством допустимых решений X называются *эквивалентными*, если $P^k(C) = P^k(D)$. В этом случае будем писать $Z_P^k(C) \sim Z_P^k(D)$.

Определение 3.4. Пусть $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Говорят, что A-оператор *регуляризирует* задачу $Z_P^k(C)$, если $Z_P^k(C) \sim Z_P^k(\mathrm{C} + A)$ и задача $Z_P^k(\mathrm{C} + A)$ устойчива.

Ясно, что всякий A-оператор, который регуляризирует задачу $Z_P^k(\mathrm{C})$, одновременно ее стабилизирует.

Теорема 3.2 [51]. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$, где $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Тогда для всякой матрицы $M \in \mathbf{R}_{>}^{k\times k}$ существует такой вектор $t^0 \in \mathbf{R}_{>}^{k}$, что $A(C, M, t^0)$-оператор регуляризирует векторную задачу* ЦЛП $Z_P^k(C)$.

Отметим, что доказательство теоремы является конструктивным, поскольку в нем указана верхняя граница для положительных компонент вектора t^0.

Определение 3.5 [51]. Пусть $\varepsilon > 0$ и $A, C \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Говорят, что A-оператор *ε-стабилизирует* задачу $Z^k_P(C)$, если выполняется формула (10).

Теорема 3.3 [51]. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$, где $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и всякой матрицы $M \in \mathbf{R}^{k\times k}_{>}$ существует такой вектор $t^0 \in \mathbf{R}^k_{>}$, что $A(C, M, t^0)$-оператор ε-стабилизирует векторную задачу* ЦЛП $Z^k_P(C)$, *причем*

$$Sl^k(C + A(C, M, t^0)) \subseteq P^k(C).$$

Заметим, что в работе [57] ε-стабилизация задачи $Z^k_P(C)$ достигается лишь при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Определение 3.6. Пусть $\varepsilon > 0$. Задача $Z^k_P(C)$ называется *ε-устойчивой*, если при любой матрице $B \in \mathscr{B}(\varepsilon)$

$$P^k(C + B) \subseteq P^k(C).$$

Определение 3.7. Пусть $\varepsilon > 0$. Говорят, что A-оператор *ε-регуляризирует* задачу $Z^k_P(C)$, если он регуляризирует ее и задача $Z^k_P(C + A)$ ε-устойчива.

Теорема 3.4 [51]. *Пусть $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$, где $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ и $|\{Cx \mid x \in X\}| > 1$. Тогда для любой матрицы $M = (\mu_{ij}) \in \mathbf{R}^{k\times k}_{>}$, всякого числа ε, удовлетворяющего неравенствам*

$$0 < \varepsilon < \frac{\min\left\{C_i(x - x')\sum\limits_{q=1}^{k}\mu_{iq}C_q(x - x') > 0 : \ x, x' \in X, \ i \in N_k\right\}}{k \parallel M \parallel\parallel C \parallel \max\{(\parallel x - x' \parallel^*)^2 \mid x, x' \in X\}},$$

и любого вектора $t \in \mathbf{R}^m_{>}$ такого, что

$$t_i \geqslant \frac{\varepsilon \max\{\parallel x - x' \parallel^* \mid x, x' \in X\}}{\min\left\{\sum\limits_{q=1}^{k}\mu_{iq}C_q(x - x') > 0 : \ x, x' \in X, \ i \in N_k\right\}}, \ i \in N_k,$$

$A(C, M, t)$-оператор ε-регуляризирует векторную задачу ЦЛП Z^k_P.

3.2. Регуляризация задачи последовательной оптимизации

Рассматриваются регуляризирующий и ε-регуляризирующий операторы для векторной задачи последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$, сформулированной в п. 2.2.

Поскольку всякая нетривиальная задача $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ устойчива, будем предполагать, что задача $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ нетривиальна.

Введем обозначения:

$$\Delta_{\min} = \min\{C_i(x - x') > 0 \mid x, x' \in X, \quad i \in N_k\},$$
$$\Delta_{\max} = \max\{C_i(x - x') \mid x, x' \in X, \quad i \in N_k\},$$
$$\Delta = \frac{\Delta_{\min}}{\Delta_{\min} + \Delta_{\max}}.$$

Легко видеть, что для всякой нетривиальной задачи последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ числа $\Delta_{\min}$ и $\Delta_{\max}$ положительны.

Пусть $0 < \delta \leqslant \Delta$, $t > 0$. Каждой матрице $C \in \mathbf{R}^{k\times n}$ со строками C_i, $i \in N_k$, поставим в соответствие матрицу $A(C, \delta, t) \in \mathbf{R}^{k\times n}$ со строками

$$A_1 = t\sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1} C_i, \qquad A_i = \mathbf{0}, \text{ если } i = 2, 3, \ldots, k,$$

где $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$.

Определение 3.8. Задачи $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ и $Z^k_{\mathscr{L}}(C')$, где $C, C' \in \mathbf{R}^{k\times n}$, с одним и тем же множеством допустимых решений X называются *эквивалентными* (что обозначается через $Z^k_{\mathscr{L}}(C) \sim Z^k_{\mathscr{L}}(C')$), если $\mathscr{L}^k(C) = \mathscr{L}^k(C')$.

Определение 3.9. Пусть $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Говорят, что A-оператор *регуляризирует* задачу $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$, если $Z^k_{\mathscr{L}}(C) \sim Z^k_{\mathscr{L}}(C + A)$ и задача $Z^k_{\mathscr{L}}(C + A)$ устойчива.

Теорема 3.5 [50]. *Если $0 < \delta \leqslant \Delta$, то $A(C, \delta, t)$-оператор при любом $t > 0$ регуляризирует нетривиальную задачу последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$.*

Заметим, что утверждение теоремы 3.5 останется справедливым, если в качестве строк $A_2, A_3, \ldots, A_k$ матрицы $A(C, \delta, t)$ брать произвольные векторы из $\mathbf{R}^n$.

Теоремы 2.4 и 3.5 позволяют сводить векторную задачу последовательной оптимизации к скалярной задаче. А именно, справедливо

Следствие 3.2 [50]. *Если выполняются условия теоремы* 3.5, *то*

$$\mathscr{L}^k(C) = \mathscr{L}^k_1\left(C_1 + t\sum_{i=1}^{k} \delta^{i-1} C_i\right).$$

Определение 3.10. Пусть $\varepsilon > 0$. Задача $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$ называется *ε-устойчивой*, если при любой матрице $C' \in \mathscr{B}(\varepsilon)$

$$\mathscr{L}(C + C') \subseteq \mathscr{L}(C).$$

Определение 3.11. Пусть $\varepsilon > 0$ и $A \in \mathbf{R}^{k\times n}$. Говорят, что A-оператор *ε-регуляризирует* задачу $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$, если он регуляризирует ее и задача $Z^k_{\mathscr{L}}(C + A)$ является ε-устойчивой.

Теорема 3.6 [50]. *Если $0 < \delta \leqslant \Delta$, то при любом числе $\varepsilon > 0$ и любом числе t, удовлетворяющем неравенству*

$$t > \frac{\sup\{|C'_1(x - x')| \mid C' \in \mathscr{B}(\varepsilon),\ x, x' \in X\}}{\min\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} \delta^{i-1} C_i(x - x') \mid x \in \overline{\mathscr{L}}^k(C),\ x' \in \mathscr{L}^k(C)\right\}},$$

$A(C, \delta, t)$-оператор ε-регуляризирует нетривиальную задачу последовательной оптимизации $Z^k_{\mathscr{L}}(C)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Авсюкевич О. В., Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** О радиусе устойчивости многокритериальной траекторной задачи на узкие места // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1998. № 1. С. 112–116.
2. **Артеменко В. И., Гордеев Э. Н., Журавлев Ю. И., Куликов Ф. М., Наумов В. Б., Потапчук Г. А., Сергиенко И. В., Сметанин Ю. Г., Урхард Р., Ходзинский А. Н., Хондерд Г.** Метод формирования оптимальных программных траекторий перемещения робота-манипулятора // Кибернетика и системный анализ. 1996. № 5. С. 84–106.
3. **Ашманов С. А.** Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
4. **Бакурова А. В., Емеличев В. А., Перепелица В. А.** Об устойчивости многокритериальных задач на системах подмножеств // Докл. АН Беларуси. 1995. Т. 39, № 2. С. 33–35.
5. **Белоусов Е. Г., Андронов В. Г.** Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. **Белоусов Е. Г., Банк Б.** (ред.) Математическая оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1986.
7. **Бердышева Р. А.** О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче лексикографической оптимизации // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 1. С. 36–40.
8. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** Устойчивость линейных траекторных задач лексикографической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 4. С. 83–88.
9. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации // Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 11–21.

10. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** О радиусе устойчивости лексикографического оптимума векторной траекторной задачи // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. № 1. С. 43–46.

11. **Гирлих Э., Ковалев М. М., Кравцов М. К.** Стабильность, устойчивость и квазиустойчивость многокритериальной задачи на системе подмножеств // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 5. С. 111–124.

12. **Гордеев Э. Н.** Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 7. С. 984–992.

13. **Гордеев Э. Н.** Полиномиальные алгоритмы вычисления радиуса устойчивости для двух классов задач выбора // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 5. С. 1040–1043.

14. **Гордеев Э. Н.** Устойчивость решений в задаче о кратчайшем пути на графе // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 39–46.

15. **Гордеев Э. Н.** Об устойчивости задач на узкие места // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 9. С. 1391–1402.

16. **Гордеев Э. Н., Калиновский М. А.** Об устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 2. С. 3–14.

17. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Устойчивость в задачах на узкие места // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 1071–1075.

18. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Траекторные параметрические задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 1. С. 37–46.

19. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.

20. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К., Сигал И. Х.** Вычислительные алгоритмы для нахождения радиуса устойчивости в задачах выбора // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1983. Т. 23, № 4. С. 973–979.

21. **Гороховик В. В.** Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990.

22. **Гороховик В. В., Рачковский Н. Н.** Об устойчивости задач векторной оптимизации // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1990. № 2. С. 3–8.

23. **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М: Наука, 1986.

24. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 20–27.

25. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О сильной устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 3. С. 3–9.

26. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** Об условиях устойчивости векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1998. № 4. С. 144–151.

27. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О мере устойчивости задачи целочисленной лексикографической оптимизации // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 4. С. 119–124.

28. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** Об устойчивости и квазиустойчивости траекторной задачи последовательной оптимизации // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 3. С. 41–44.

29. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А., Подкопаев Д. П., Янушкевич О. А.** Векторная оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости // Тр. XI междунар. Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения»: Пленарные докл. Иркутск: Изд-во ИСЭ СО РАН, 1998. С. 102–112.

30. **Емеличев В. А., Гирлих Э, Подкопаев Д. П.** Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации. I // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1996. № 3. С. 5–16.

31. **Емеличев В. А., Гирлих Э, Подкопаев Д. П.** Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации. II // Известия АН Республики Молдова. Математика. 1997. № 2. С. 9–25.

32. **Емеличев В. А., Гирлих Э., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 3–14.

33. **Емеличев В. А., Гладкий А. А. Янушкевич О. А.** О многокритериальных задачах нахождения лексикографических оптимумов // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1996. № 3. С. 82–86.

34. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1995. №4. С. 137–143.

35. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П.** О радиусе квазиустойчивости многокритериальных траекторных задач // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 1. С. 9–12.

36. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Подкопаев Д. П.** О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 1. С. 21–27.

37. **Емеличев В. А., Кравцов М. К., Янушкевич О. А.** Лексикографические оптимумы многокритериальной задачи дискретной оптимизации // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 3. С. 365–371.

38. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** Об устойчивости решений, оптимальных по Парето, Слейтеру и Смейлу, в векторных задачах оптимизации // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1998. № 3. С. 81–86.

39. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** О радиусе устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1999. № 1. С. 79–84.

40. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 27–32.

41. **Емеличев В. А., Кричко В. Н., Подкопаев Д. П.** О радиусе устойчивости векторной задачи линейного булева программирования // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 25–30.

42. **Емеличев В. А., Никулин Ю. В.** О двух типах устойчивости векторной линейно квадратичной задачи булева программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 23–31.

43. **Емеличев В. А., Никулин Ю. В.** О радиусе сильной устойчивости векторной траекторной задачи // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2000. № 1. С. 44–50.

44. **Емеличев В. А., Никулин Ю. В.** Условия сильной квазиустойчивости векторной линейной траекторной задачи // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2000. № 2. С. 38–41.

45. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Об условиях квазиустойчивости множества Парето векторной задачи на системе подмножеств // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1997. № 3. С. 39–41.

46. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** О количественной мере устойчивости в векторной задаче целочисленного линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, № 11. С. 1801–1805.

47. **Емеличев В. А., Похилько В. Г.** Радиус квазиустойчивости множества Парето векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1999. № 3. С. 45–47.

48. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** О задачах лексикографической оптимизации // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 4. С. 30–37.

49. **Емеличев В. А., Янушкевич О. А.** Линейная свертка критериев в задачах лексикографической оптимизации // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 2. С. 27–30.

50. Емеличев В. А., Янушкевич О. А. О регуляризации лексикографической векторной задачи целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 6. С. 125–130.

51. Емеличев В. А., Янушкевич О. А. О регуляризации многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования // Изв. вузов. Математика. 1999. № 12. С. 38–42.

52. Емеличев В. А., Янушкевич О. А. Устойчивость и регуляризация векторной лексикографической задачи квадратичного дискретного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2000. № 2. С. 54–62.

53. Еремин И. И. О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 53–63.

54. Ефимчик Н. Е., Подкопаев Д. П. О ядре и радиусе устойчивости в траекторной задаче векторной дискретной оптимизации // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1996. № 1. С. 48–52.

55. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 78–93.

56. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. Задачи целочисленного программирования с векторным критерием: параметрический анализ и исследование устойчивости // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307, № 3. С. 527–529.

57. Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И. О регуляризации задач целочисленной векторной оптимизации // Кибернетика. 1993. № 3. С. 172–176.

58. Леонтьев В. К. Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1309.

59. Леонтьев В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики. Вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 169–184.

60. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82–90.

61. Леонтьев В. К., Мамутов К. Х. Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1475–1481.

62. Моисеев Н. Н. (ред.) Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979.

63. Молодцов Д. А. К вопросу о последовательной оптимизации // Вопр. прикл. математики. Иркутск: Изд-во СЭИ СО РАН, 1975. С. 71–84.

64. Молодцов Д. А. Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.

65. **Перепелица В. А., Сергиенко И. В.** Исследование одного класса целочисленных многокритериальных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 3. С. 400–419.

66. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975.

67. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

68. **Подкопаев Д. П.** Условия устойчивости множества Парето векторной траекторной задачи // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1998. № 3. С. 65–68.

69. **Подкопаев Д. П.** Формула радиуса квазиустойчивости векторной траекторной задачи на узкие места // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 3. С. 104–109.

70. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации // Киев: Наук. думка, 1988.

71. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995.

72. **Тихонов А. Н.** О некорректных задачах оптимального планирования и устойчивых методах их решения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 3. С. 507–510.

73. **Тихонов А. Н.** Об устойчивости задач минимизации функционалов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 4. С. 631–634.

74. **Червак Ю. Ю.** Поиск лексикографически максимальной дискретно определенной точки выпуклого множества // Мат. методы решения экономических задач. Вып. 8. М.: Наука, 1979. С. 68–75.

75. **Штойер Р.** Многокритериальная оптимизация: Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

76. **Berdysheva R. A., Emelichev V. A., Girlich E.** Stability, pseudostability and quasistability of vector trajectorial lexicographic optimization problem // Computer Science J. of Molodva. 1998. V. 6, N 1. P. 35–56.

77. **Burkard R. E., Rendl F.** Lexicographic bottleneck problems // Oper. Res. Lett. 1991. V. 10, N 5. P. 303–308.

78. **Emelichev V. A., Berdysheva R. A.** Strong stability and strong quasistability of vector trajectorial problem of lexicographic optimization // Computer Science J. of Molodva. 1998. V. 6, N 2. P. 119–136.

79. **Emelichev V. A., Nikulin Y. V.** Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming // Computer Science J. of Moldova. 1999. V. 7. N 1. P. 105–117.

80. **Emelichev V. A., Nikulin Yu. V.** On the stability of efficient solution in a vector quadratic Boolean programming problem // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 2000. № 1. С. 33–40.
81. **Emelichev V., Podkopaev D.** Conditions of stability, pseudo-stability and quasi-stability of the Pareto set in a vector trajectorial problem // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation. Cluj-Napoca, Romania. 1998. V. 27, N 1. P. 91–97.
82. **Emelichev V. A., Stepanishina Yu. V.** Stability of a majority efficient solution of a vector linear trajectorial problem // Computer Science J. of Molodva. 1999. V. 7, N 3. P. 291–307.
83. **Hadamard J.** Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton, 1902.
84. **Pareto V.** Manuel d'economie politique. Qiard.-Paris, 1909.
85. **Smale S.** Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints // J. Math. Econom. 1974. V. 1, N 3. P. 213–221.
86. **Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.
87. **Sotskov Yu. N., Tanaev V. S., Werner F.** Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of discrete optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 72–108. (Appl. Optim.; V. 16).
88. **Tanino T.** Sensitivity analysis in multiobjective optimization // J. Optim. Theory Appl. 1988. V. 56, N 3. P. 479–499.
89. **Zimmerman U.** Some partial orders related to Boolean optimization and the greedy algorithm // Studies in integer programming. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 539-550. (Ann. of Discrete Math.; V. 1).

Адрес авторов:

Белорусский
государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: eva@mmf.bsu.unibell.by

Статья поступила
21 сентября 2000 г.,
переработанный вариант —
7 марта 2001 г.