ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2001. Серия 2. Том 8, № 1, 88–112

УДК 519.176

ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ СО СВОЙСТВОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕТРИКИ. II*)

Т. И. Федоряева

Работа является продолжением статьи автора [2]. В ней завершается характеризация двусвязных внешнепланарных графов, удовлетворяющих свойству продолжения метрики.

Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением [2], при этом полностью сохраняются терминология, обозначения, нумерация формул, рисунков и утверждений из [2]. Класс элементарных графов расширяется до класса базисных графов, дается их явное описание (теорема 1.2), вводятся операции склейки для графов и завершается доказательство следующей основной теоремы.

Теорема. *Двусвязный внешнепланарный граф G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда либо G — базисный граф, либо G получается операциями склейки из базисных графов одинакового четного диаметра, равного $d(G)$.*

Самостоятельный интерес представляет следующее утверждение, которое является следствием теоремы 1.1.

Следствие. *Пусть G — двусвязный внешнепланарный граф без треугольников. Тогда G удовлетворяет* СПМ *тогда и только тогда, когда G — простой цикл длины не менее* 4 *или G — один из графов* 11 *видов, изображенных на рис.* 2.

§ 6. Свойства развилок

Введем некоторые дополнительные определения и условимся относительно новых обозначений.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00531).

Пусть $\widetilde{ab}$ — ребро графа G и (x, a, b) — кратчайшая цепь. Вершину x в графе G будем называть *сдвигаемой* (*сильно сдвигаемой*) *относительно ребра* $\widetilde{ab}$, если имеется кратчайшая цепь $(\hat{x}, x, a)$ $((\hat{x}, x, a, b))$ такая, что $\rho(\hat{x}, x) = 1$. В противном случае вершина x называется *несдвигаемой* (*сильно несдвигаемой*) *относительно ребра* $\widetilde{ab}$. В дальнейшем вершину x будем называть *сдвигаемой* (*сильно сдвигаемой*), если понятно, о каком ребре $\widetilde{ab}$ идет речь, и через $\hat{x}$ будем обозначать вершину, в которую может быть сдвинута вершина x.

Пусть $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро графа G. В дальнейшем через $(x, \vec{ab}, y)$ будем обозначать произвольную диаметральную цепь (x, a, b, y) графа G такую, что $\rho(x, a) = \alpha(G)$ и $\rho(y, b) = \beta(G)$. Диаметральную цепь $(x, \vec{ab}, y) \subseteq G_{lr}$, $l, r \in \{a, b\}$ и $l \neq r$, будем называть *выделенной*, если в ней содержится подцепь (u, a, b, v) такая, что u, a (а также b, v) — внешнесмежные вершины и $\rho(u, v) = 3$. Грань графа G, содержащую ребро $\widetilde{ab}$ и лежащую в G_{ab}, обозначим через L_{ab}, а число вершин грани L_{ab} — через n_{ab}. Граф, получающийся из графа G и графа $P_{a_1 b_1}$ (с выделенной упорядоченной парой вершин (a_1, b_1)) в результате отождествления вершины a с вершиной a_1 и вершины b с вершиной b_1, а затем объединения графов G_{ba} и $P_{a_1 b_1}$, будем обозначать через $G_{ab} \to P_{a_1 b_1}$ и говорить, что этот граф получается из графа G *заменой* G_{ab} *на* $P_{a_1 b_1}$.

Для графа G и его ориентированного внутреннего ребра $\vec{ab}$ сформулируем следующие свойства, которые будем использовать в дальнейшем. Пусть $l, r \in \{a, b\}$ и $l \neq r$.

Свойство $< l, r, 1 >$. В G имеется диаметральная цепь $(x, \vec{ab}, y) \subseteq G_{lr}$ такая, что нет кратчайшей цепи $(u, y, b) \subseteq G_{lr}$ длины $\alpha(G) + 1$.

Свойство $< l, r, 2 >$. Любые вершины x, y графа G такие, что существует кратчайшая цепь $(u, x, y, a) \subseteq G_{lr}$, где $\rho(u, a) = \beta(G) + 1 = \rho(u, b) + 1$, принадлежат некоторой диаметральной цепи $(u_1, x, y, u_2) \subseteq G_{lr}$ графа G.

Свойство $< l, r, 3 >$. Существует вершина $v \in G_{lr}$ такая, что $\rho(v, a) = \rho(v, b) = \alpha(G) + 1$.

Свойство $< l, r, 4 >$. Любая вершина x графа G такая, что существует кратчайшая цепь $(u, x, a) \subseteq G_{lr}$, где $\rho(u, a) = \beta(G) + 1 = \rho(u, b) + 1$, принадлежит некоторой кратчайшей цепи $(u_1, x, u_2) \subseteq G_{lr}$, причем $u_2 \in \{a, b\}$ и $\rho(u_1, a) = \rho(u_1, b) = \beta(G) + 1$.

Лемма 6.1 (о видах лепестков). *Пусть граф G, отличный от графа S_k, изображенного на рис. 1, удовлетворяет СПМ и ребро $\widetilde{ba}$ является внутренним, причем G_{ab} не треугольник. Тогда G_{ba} является либо лестницей, либо развилкой одного из видов a_k, b_k, c_k, d на рис. 7, где $u_0, v_0 \in \{a, b\}$, u_i, u_{i+1} (v_i, v_{i+1}) — внешнесмежные вершины и (x, v, u, y) — диаметральная цепь графа G.*

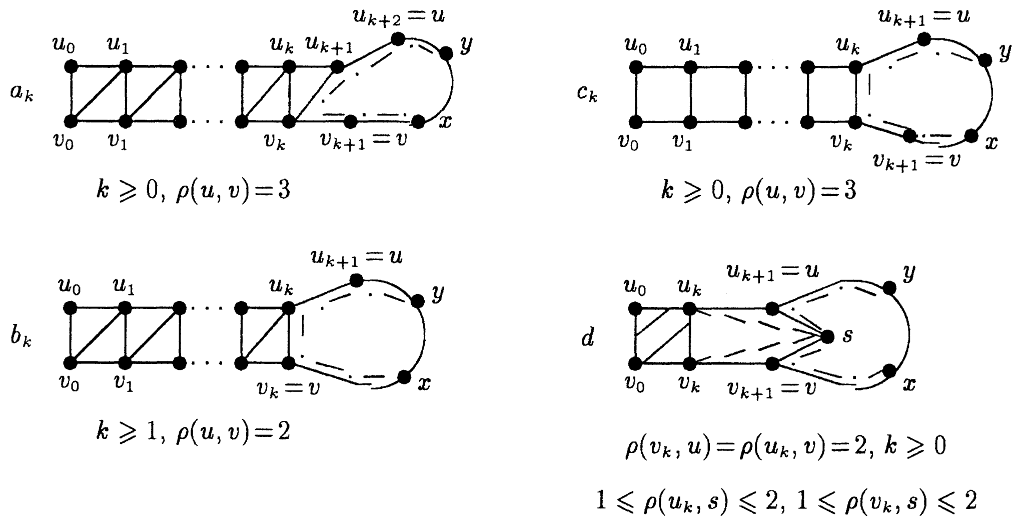


Рис. 7

Доказательство. Пусть G_{ba} не является лестницей. Тогда существуют различные вершины $u_1, v_1 \in G_{ba}$, являющиеся внешнесмежными к u_0, v_0 соответственно. Возможны следующие случаи.

Случай 1. В G_{ba} есть ребро $\widetilde{v_0u_1}$ (случай, когда есть ребро $\widetilde{u_0v_1}$, аналогичен). Поскольку G_{ba} не является лестницей, существует внешнесмежная к u_1 вершина $u_2 \in G_{ba} \setminus \{u_0, v_1\}$.

Заметим, что если нет ребра $\widetilde{v_1u_1}$, то G_{ba} — граф вида a_0 или d на рис. 7. Действительно, графы $G_{u_1v_0}$, $G_{v_0u_1}$ и $G_{u_0v_0}$ не являются треугольниками. Поэтому по лемме 2.1 нет ребер $\widetilde{v_0u_2}$, $\widetilde{v_1u_2}$. Следовательно, если $\rho(v_1, u_2) = 2$, то G_{ba} имеет вид d, в противном случае G_{ba} имеет вид a_0.

Таким образом, можно считать, что есть ребро $\widetilde{v_1u_1}$. Кроме того, будем считать, что есть ребро $\widetilde{v_1u_2}$ (так как иначе G_{ba} — граф вида b_1). Поскольку G_{ba} не лестница, имеется внешнесмежная к v_1 вершина $v_2 \in G_{ba} \setminus \{v_0, u_2\}$. Продолжая этот процесс, получим, что G_{ba} — граф вида a_k, или b_k, или d.

Случай 2. В G_{ba} нет ребер $\widetilde{u_0v_1}$, $\widetilde{v_0u_1}$. Тогда если $\rho(u_1, v_1) = 3$, то G_{ba} имеет вид c_0, а если $\rho(u_1, v_1) = 2$, то G_{ba} имеет вид d. Поэтому считаем, что есть ребро $\widetilde{v_1u_1}$. Так как G_{ba} не лестница, то имеются различные вершины $u_2, v_2 \in G_{ba} \setminus \{u_0, v_0\}$, внешнесмежные к вершинам u_1, v_1 соответственно. По лемме 2.1 в G_{ba} нет ребер $\widetilde{v_2u_1}$, $\widetilde{v_1u_2}$. Поэтому, как и выше, считаем, что есть ребро $\widetilde{v_2u_2}$. Продолжая этот процесс, получим, что G_{ba} — граф вида c_k или d.

Таким образом, в каждом рассмотренном случае граф G_{ba} имеет требуемый вид. В силу СПМ существует некоторая диаметральная цепь

(x, u, v, y), содержащая вершины u, v. Поэтому если G_{ba} имеет вид a_k, b_k, c_k, d, то имеются диаметральные цепи $(x, v, v_k, u_{k+1}, u, y)$, (x, v, u_k, u, y), (x, v, v_k, u_k, u, y), (x, v, s, u, y) соответственно, изображенные на рис. 7. Лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2. *Пусть* $\widetilde{a_1a_2}$, $\widetilde{b_1b_2}$ *— внутренние ребра графа* G, $a_1, a_2 \in G_{b_2b_1}$, $b_1, b_2 \in G_{a_1a_2}$ *и имеются кратчайшие цепи* $(x_1, a_1, a_2), (x_2, a_2, a_1) \subseteq G_{a_2a_1}$, $(y_1, b_1, b_2), (y_2, b_2, b_1) \subseteq G_{b_1b_2}$ *такие, что*

$$\rho(x_1, a_1) + \rho(x_2, a_2) \geqslant d(G) - 1, \tag{6.1}$$

$$\rho(y_1, b_1) + \rho(y_2, b_2) \geqslant d(G) - 1. \tag{6.2}$$

Тогда для некоторых различных i, j *выполняются равенства* $a_i = b_i$, $\rho(x_i, a_i) = \rho(y_i, b_i) = \alpha(G), \rho(x_j, a_j) = \rho(y_j, b_j) = \beta(G)$ *и* $\rho(a_j, b_j) \leqslant 1$ *при нечетном* $d(G)$. *Кроме того,* x_1, x_2, y_1, y_2 *— сильно несдвигаемые вершины.*

Доказательство основано на том, что G — плоский граф и $\widetilde{a_1a_2}$, $\widetilde{b_1b_2}$ — внутренние ребра.

Лемма 6.3 (о типах разделяющих ребер). *Пусть* e *— разделяющее ребро графа* G, *удовлетворяющего СПМ. Тогда выполняется в точности одно из следующих условий:*

1) $e = \widetilde{ab}$ *и имеются выделенные диаметральные цепи* $(x^+, \vec{ab}, y^+) \subseteq G_{ba}$, $(x^-, \vec{ab}, y^-) \subseteq G_{ab}$ *с сильно несдвигаемыми концами (см. рис. 8, a);*

2) $e = \widetilde{ab}^-$ *или* $e = \widetilde{ab}^+$, *причем имеются выделенные диаметральные цепи* $(x^+, a\vec{b}^+, y^+) \subseteq G_{b^+a}$ *и* $(x^-, a\vec{b}^-, y^-) \subseteq G_{ab^-}$ *с сильно несдвигаемыми концами, где* b^-, b^+ *— внешнесмежные вершины и* $\widetilde{ab}^-$, $\widetilde{ab}^+$ *— разделяющие ребра (см. рис. 8, b).*

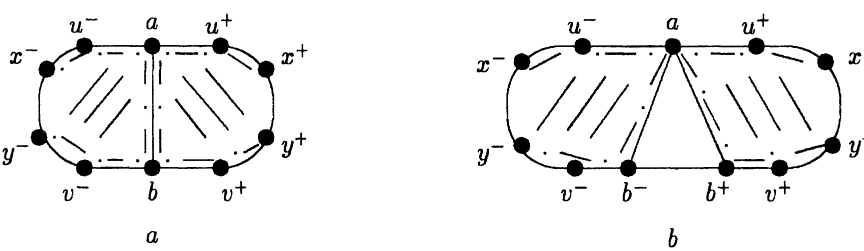


Рис. 8

Определение 6.1. Если для разделяющего ребра e в лемме 6.3 выполняется первое (второе) условие, то ребро e назовем разделяющим ребром первого (второго) типа. В дальнейшем под ориентацией ребра e понимаем ориентацию от вершины a к вершине b (от вершины a к вершине b^τ, $\tau \in \{+, -\}$). Отметим, что если $\widetilde{e_1e_2}$ — разделяющее ребро первого типа и $d(G)$ нечетно, то будем использовать ориентацию как $e_1\vec{e}_2$, так и $e_2\vec{e}_1$.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — концы ребра e. По лемме 6.1 каждая развилка $G_{e_ie_j}$ имеет один из видов, указанных на рис. 7, где $\{u_0, v_0\} = \{e_1, e_2\}$. Покажем, что $G_{e_ie_j}$ не может иметь вид d. Действительно, в противном случае имеются внутреннее ребро $\widetilde{u_kv_k}$ (см. рис. 7) и кратчайшие цепи (y, u_{k+1}, u_k, v_k), (x, v_{k+1}, v_k, u_k), сумма длин которых равна $d(G) + 2$. С другой стороны, по лемме 6.2 эта сумма равна $\alpha(G) + \beta(G) + 2 = d(G) + 1$. Противоречие. Теперь, снова используя лемму 6.2, нетрудно показать, что $G_{e_ie_j}$ имеет вид a_0 или c_0 на рис. 7. Отметим также, что в силу лемм 2.1, 6.2 графы $G_{e_ie_j}$ и $G_{e_je_i}$ одновременно не могут иметь вид a_0.

Таким образом, графы $G_{e_ie_j}$, $G_{e_je_i}$, $i \neq j$, имеют вид c_0, c_0 или a_0, c_0 соответственно. Осталось отметить, что диаметральные цепи в $G_{e_ie_j}$ и $G_{e_je_i}$, существование которых следует из леммы 6.1, в силу леммы 6.2 являются выделенными диаметральными цепями с сильно несдвигаемыми концами. Таким образом, если $G_{e_ie_j}$ и $G_{e_je_i}$ имеют вид c_0, то выполняется первое условие леммы, а если $G_{e_ie_j}$, $G_{e_je_i}$ имеют вид a_0 и c_0 соответственно, то $\widetilde{ab}^-$, $\widetilde{ab}^+$ — разделяющие ребра и выполняется второе условие леммы. Лемма 6.3 доказана.

Из лемм 6.3 и 6.2 вытекает

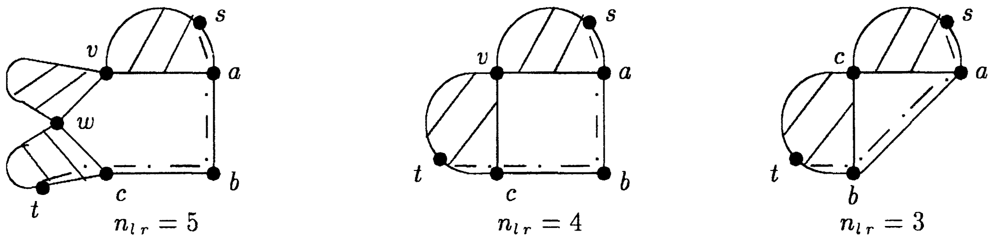
Следствие 6.1. *Пусть $a_1\vec{a}_2$, $b_1\vec{b}_2$ — ориентированные разделяющие ребра графа G, удовлетворяющего СПМ. Тогда если $d(G)$ четно, то $a_1 = b_1$, а если $d(G)$ нечетно, то $a_i = b_i$ и $\rho(a_j, b_j) \leqslant 1$ для некоторых $i \neq j$.*

Лемма 6.4. *Пусть $\vec{ab}$ — разделяющее ребро графа G, удовлетворяющего СПМ, и $n_{lr} \geqslant 6$ для некоторых $l, r \in \{a, b\}$. Тогда имеется диаметральная цепь $(u, \vec{ab}, v) \subseteq G_{lr}$ с несдвигаемыми концами.*

Доказательство. В силу СПМ для вершин $s_1, s_2 \in L_{lr} \setminus \{a, b\}$ таких, что $\rho(s_1, s_2) = d(L_{lr})$, в G найдется диаметральная цепь $(u, s_1, a, b, s_2, v) \subseteq G_{lr}$. Кроме того, по лемме 6.3 имеется диаметральная цепь $(x, a\vec{b}_1, y) \subseteq G_{rl}$, где $b_1 = b$ или b, b_1 — внешнесмежные вершины. Тогда по лемме 6.2 имеем $\rho(u, a) = \alpha(G)$, $\rho(v, b) = \beta(G)$ и u, v — сильно несдвигаемые вершины. Осталось показать, что u, v — несдвигаемые вершины. Пусть от противного, например, u — сдвигаемая вершина. Выберем различные вершины $z_1, z_2 \in L$ такие, что $\rho(z_1, s_1) = \rho(z_2, s_1) = 1$ и $z_2 \in (s_1, a, b, s_2)$. Тогда $\rho(z_1, b) = \rho(z_2, b) + 2$, $\rho(\hat{u}, z_2) = \rho(\hat{u}, s_1) + 1$ и $\rho(\hat{u}, z_1) \geqslant \rho(\hat{u}, s_1) - 1$. Поэтому $\rho(\hat{u}, b) = \min\{\rho(\hat{u}, z_i) + \rho(z_i, b) \mid 1 \leqslant i \leqslant 2\} = \rho(\hat{u}, z_2) + \rho(z_2, b) = \rho(\hat{u}, a) + \rho(a, b)$, т. е. вершина u сильно сдвигаемая. Противоречие. Лемма 6.4 доказана.

Лемма 6.5. *Пусть $\vec{ab}$ — разделяющее ребро в графе G, удовлетворяющем СПМ, и для некоторых $l, r \in \{a, b\}$ таких, что $4 \leqslant n_{lr} \leqslant 5$, цепь*

$(s, \vec{ab}, t) \subseteq G_{lr}$ является выделенной диаметральной цепью, причем t — сдвигаемая вершина. Тогда s — несдвигаемая вершина и вершины c, b являются внешнесмежными (рис. 9, a, b).



a *b* *c*

Рис. 9

Доказательство. Сначала отметим, что в силу лемм 6.2 и 6.3 вершины s, t — сильно несдвигаемые. Предположим, что $\widetilde{bc}$ — внутреннее ребро. Тогда по определению выделенной диаметральной цепи вершина t принадлежит $G_{cb} \setminus \{b, c\}$. Поэтому из сдвигаемости вершины t следует, что t — сильно сдвигаемая вершина. Следовательно, $\widetilde{bc}$ — внешнее ребро. Поэтому из определения выделенной диаметральной цепи получаем, что $\widetilde{av}$ — внутреннее ребро и $s \in G_{av}$ (см. рис. 9, a, b). Теперь ясно, что s — несдвигаемая вершина, так как иначе s — сильно сдвигаемая вершина. Лемма 6.5 доказана.

Лемма 6.6. *Если G_{ba} — обобщенная лестница графа G, (u, w, v) — тупиковая (в частности, диаметральная) цепь графа G, $w \in \{a, b\}$ и вершина v принадлежит множеству $G_{ba} \setminus \{a, b\}$, то v совпадает с одной из вершин $f(a)$ или $f(b)$ обобщенной лестницы G_{ba}.*

Доказательство. Докажем лемму для $G_{ba} = AE_k(a)$ (см. рис. 4); для остальных видов обобщенных лестниц доказательство аналогично. Если $v \in G_{cp} \setminus \{c, p\}$ ($v \in G_{bc} \setminus \{b, c\}$), то по свойству 4 леммы 3.1 вершина v совпадает с одной из вершин $f(p, c)$ или $f(c, p)$ лестницы G_{cp} ($f(b, c)$ или $f(c, b)$ лестницы G_{cb}). Тогда ясно, что v совпадает с одной из вершин $f(a)$ или $f(b)$ обобщенной лестницы G_{ba}. Поэтому считаем, что $v \in \{c, p\}$. Следовательно, $\alpha(k) = 1$, так как иначе в силу вида $AE_k(a)$ в G существует кратчайшая цепь (u, w, v, v_1), $v \neq v_1$. Противоречие. Но при $\alpha(k) = 1$ имеем $\rho(a, c) = e(a)$, $\rho(b, p) = e(b)$. Лемма 6.6 доказана.

§ 7. Базисные графы

Определение 7.1. Граф G называется базисным, если выполняется одно из следующих условий:

1. G — элементарный граф.

2. G — граф S_k, $k \geqslant 6$ (см. рис. 1).

3. G — граф из табл. 1 с номером «$3, i$», $i \in \{22, 23, 24\}$, или с номером «$4, i$», $j \in \{39, 40\}$.

4. G получается из некоторого элементарного графа R нечетного диаметра заменой одной лестницы R_{ba} основания графа R следующего вида на указанную обобщенную лестницу при условии, что R_{ab} — развилка:

а) $B_{\alpha(R)}$ на $B^i_{d(R)}(c)$, где $c \in \{a, b\}$ и $i \in \{1, 2\}$;

б) $M_{\alpha(R)}(b)$ на $M^1_{d(R)}(a)$;

в) $E_{\alpha(R)}(a)$ на $AE_{d(R)}(a)$, если граф $S = R_{ba} \to A_{\alpha(R)}$ элементарный и $d(S) = d(R)$.

5. G получается из элементарного графа R нечетного диаметра (с номером «3, 6» в табл. 1), изображенного на рис. 10, заменой двух или трех произвольных лестниц $E_{\alpha(R)}(a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, основания графа R на соответствующие обобщенные лестницы $AE_{d(R)}(a_i)$.

6. G получается из некоторого элементарного графа R четного диаметра заменой одной или двух лестниц R_{ba} основания графа R следующих видов на указанные обобщенные лестницы при условии, что R_{ab} — развилка:

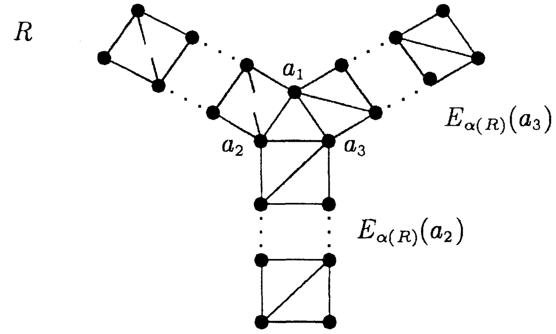
а) $D_{\beta(R)}(b)$ на $D^i_{d(R)}(b)$, если $i \in \{1, 2\}$ и $i = 2$ при $d(R) > 4$;

б) $D_1(b)$ на $D^3_4(b)$, если $d(R) = 4$ и для R_{ab} справедливо следующее свойство.

Свойство $(*)$. Выполняется одно из следующих условий:

1. $n_{ab} = 4$ и либо ребро $\widetilde{rs}$ внешнее, либо $R_{sr} = E_1(r)$.

2. $n_{ab} = 5$ и $\widetilde{rs}$ — внутреннее ребро, где $r, s \in L_{ab} \setminus \{b\}, \rho(a, s) = 1$ и $\rho(a, r) = 2$.



$R_{a_1 a_2} \in \{A_{\alpha(R)}, E_{\alpha(R)}(a_1)\}$

Рис. 10

Лемма 7.1. *Пусть $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро графов G, R^i, причем $R^i_{ab} = G_{ab}$, графы R^i удовлетворяют* СПМ *и имеют одинаковый диаметр,*

$1 \leqslant i \leqslant k$. *Тогда* G *удовлетворяет* СПМ *и* $d(G) = d(R^i)$, *если выполнены следующие условия:*

1. $\forall c \in \{a,b\}\, \forall f_{G_{ba}}(c)\, \exists i\, \exists f \in R^i_{ba}\, \forall w \in \{a,b\}\;\; \rho(w, f_{G_{ba}}(c)) = \rho(w,f)$, *причем если* $(w,f,v) \subseteq R^i_{ba}$ *— кратчайшая цепь, то имеется кратчайшая цепь* $(w, f_{G_{ba}}(c), v') \subseteq G_{ba}$ *такая, что* $\rho(z,v) = \rho(z,v')$ *для* $z \in \{a,b\}$.

2. *Существует* i *такое, что* R^i_{ba} *— лестница или обобщенная лестница и*

$$\forall c \in \{a,b\}\, \forall f_{R^i_{ba}}(c)\, \exists f \in G_{ba}\, \forall w \in \{a,b\}\;\; \rho(w, f_{R^i_{ba}}(c)) = \rho(w,f).$$

3. *Если* $d(R^i)$ *четно (нечетно), то* G_{ba} *— лестница или обобщенная лестница* $D^j_{d(R^i)}(c)$ $(AE_{d(R^i)}(c),\, M^1_{d(R^i)}(c)$ *или* $B^j_{d(R^i)}(c))$, *где* $c \in \{a,b\}$.

Доказательство. Для произвольных вершин x, y графа G достаточно найти содержащую их кратчайшую цепь длины $d(R^i)$.

Случай 1. Вершины x и y принадлежат G_{ab} и $G_{ba} \setminus \{a,b\}$ соответственно. В силу условия 3, леммы 6.6 и свойства 4 леммы 3.1 в G существует некоторая кратчайшая цепь $(x, w, y, f_{G_{ba}}(c))$, где $w, c \in \{a,b\}$. Поэтому можно считать, что $y = f_{G_{ba}}(c)$. По условию 1 существуют i и вершина $f \in R^i_{ba}$ с перечисленными свойствами. Тогда в R^i имеется кратчайшая цепь (x,w,f) и в силу СПМ существует некоторая диаметральная цепь (u,x,w,f,v). Поэтому из условия 1 следует, что $(u, x, w, f_{G_{ba}}(c), v')$ — кратчайшая цепь в графе G длины $d(R^i)$.

Случай 2. Вершины x, y принадлежат G_{ab}. Рассмотрим i из условия 2. Тогда $x, y \in R^i_{ab}$ и в силу СПМ в R^i имеется некоторая диаметральная цепь (u,x,y,v). Можно считать, что один из концов этой цепи, например v, принадлежит $R^i_{ba} \setminus \{a,b\}$ и вершина u принадлежит R^i_{ab}. В силу леммы 6.6 и свойства 4 леммы 3.1 вершина v совпадает с одной из вершин $f_{R^i_{ba}}(c)$, $c \in \{a,b\}$. По условию 2 имеется вершина $f \in G_{ba}$ с перечисленными свойствами. Тогда $f \notin \{a,b\}$ и в G имеем кратчайшую цепь (u,x,y,f). Таким образом, пришли к рассмотренному случаю 1 для вершин u, f.

Случай 3. Вершины x, y принадлежат $G_{ba} \setminus \{a,b\}$. Условие 3, а также вид лестниц и обобщенных лестниц показывают, что вершины x, y принадлежат либо кратчайшей цепи длины $d(R^i)$, либо кратчайшей цепи с одним из концов $c \in \{a,b\}$. В последнем случае снова приходим к случаю 1. Лемма 7.1 доказана.

Лемма 7.2. 1. *Пусть* $\widetilde{ab}$ *— внутреннее ребро графа* R, *удовлетворяющего* СПМ, $d(R)$ *нечетно и* $R_{ba} = B_{\alpha(R)}$ $(R_{ba} = M_{\alpha(R)}(b))$. *Тогда граф* $G = R_{ba} \to B^i_{d(R)}(c)$ $(G = R_{ba} \to M^1_{d(R)}(a))$, *где* $c \in \{a,b\}$ *и* $i \in \{1,2\}$, *удовлетворяет* СПМ *и* $d(G) = d(R)$.

2. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, $d(G)$ нечетно, $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро первого типа (второго типа) и $G_{ba} = B^i_{d(G)}(c)$ $(G_{ba} = M^1_{d(G)}(a))$, где $c \in \{a,b\}$ и $i \in \{1,2\}$. Тогда граф $R = G_{ba} \to B_{\alpha(G)}$ $(R = G_{ba} \to M_{\alpha(G)}(b))$ удовлетворяет СПМ и $d(R) = d(G)$.*

Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 7.1.

Лемма 7.3. 1. *Пусть $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро графа R, удовлетворяющего СПМ, $d(R)$ нечетно и $R_{ba} = E_{\alpha(R)}(a)$, причем граф $S = R_{ba} \to A_{\alpha(R)}$ удовлетворяет СПМ и $d(S) = d(R)$. Тогда граф $G = R_{ba} \to AE_{d(R)}(a)$ удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(R)$.*

2. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, $d(G)$ нечетно, $\vec{ab}$ — разделяющее ребро первого типа, $G_{ba} = AE_{d(G)}(a)$ и выполняются свойства $< a,b,2 >$ и $< a,b,4 >$. Тогда графы $R = G_{ba} \to E_{\alpha(G)}(a)$, $S = G_{ba} \to A_{\alpha(G)}$ удовлетворяют СПМ и $d(S) = d(R) = d(G)$.*

Доказательство. Из леммы 7.1 непосредственно вытекает п. 1, а граф S из п. 2 удовлетворяет СПМ и $d(S) = d(G)$. Чтобы показать, что граф R из п. 2 удовлетворяет СПМ и $d(R) = d(G)$, снова воспользуемся леммой 7.1 и ее доказательством. В лемме 7.1 не выполняются только условие 1 для $f_{R_{ba}}(b) = z_1$ и условие 2 для $f_{G_{ba}}(b) = w_1$ (см. вершины z_i в $E(a)$ и w_i в $AE(a)$ на рис. 4). Но тогда в случае 1 (случае 2) для вершин x и z_1 (x и y, принадлежащих некоторой диаметральной цепи (u,x,y,a,w_1) графа G) необходимо найти в R содержащую их кратчайшую цепь длины $d(G)$. В силу леммы 6.6 и СПМ для вершин $x, w_1 \in G$ из случая 1 в графе G имеется некоторая диаметральная цепь (u,x,a,w_1,w_i), $1 \leqslant i \leqslant 2$. Таким образом, в случае 1 (случае 2) при $\rho(u,b) \geqslant \rho(u,a)$ цепь (u,x,a,z_1,z_i) $((u,x,y,a,z_1))$ является кратчайшей цепью длины $d(G)$, иначе $\rho(u,a) = \rho(u,b)+1 = \beta(G)+1$ и в силу свойства $< a,b,4 >$ $(< a,b,2 >)$ требуемая кратчайшая цепь очевидна. Лемма 7.3 доказана.

Лемма 7.4. 1. *Пусть $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро графа R, удовлетворяющего СПМ, $d(R)$ четно и $R_{ba} = D_{\beta(R)}(b)$. Тогда граф $G = R_{ba} \to D^i_{d(R)}(b)$, где $i \in \{1,2\}$ и $i = 2$ при $d(R) > 4$, удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(R)$.*

2. *Пусть G удовлетворяет СПМ, $d(G)$ четно, $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро первого типа и $G_{ba} = D^i_{d(G)}(b)$, где $i \in \{1,2\}$ и $i = 2$ при $d(G) > 4$. Тогда граф $R = G_{ba} \to D_{\beta(G)}(b)$ удовлетворяет СПМ и $d(R) = d(G)$.*

Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 7.1.

Лемма 7.5. 1. *Пусть $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро графа R, удовлетворяющего СПМ, $d(R) = 4$, $R_{ba} = D_1(b)$ и для R_{ab} выполняется свойство $(*)$. Тогда граф $G = R_{ba} \to D^3_4(b)$ удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(R)$.*

2. *Пусть граф G удовлетворяет* СПМ, $d(G) = 4$, $\widetilde{ab}$ — *разделяющее ребро первого типа, причем на грани L_{ab} нет других разделяющих ребер и $G_{ba} = D_4^3(b)$. Тогда либо G является графом из табл. 1 с одним из номеров «3, 22», «3, 23», либо граф $R = G_{ba} \to D_1(b)$ удовлетворяет* СПМ, $d(R) = d(G)$ *и для R_{ab} выполняется свойство* $(*)$.

Доказательство. 1. Воспользуемся леммой 7.1 и ее доказательством. В лемме 7.1 не выполняются только условие 1 для $f_{G_{ba}}(a) = w_1$, $f = z_1$ и $v = z_2$ и условие 2 для $f_{R_{ba}}(a) = z_2$ (см. вершины z_i в $D(b)$ и w_i в $D_4^3(b)$ на рис. 4). Но тогда в случае 1 (случае 2) для вершин w_1 и x (x и y) таких, что имеется диаметральная цепь (u, x, w, z_1, z_2) $((u, x, y, w, z_2))$ графа R, где $w \in \{a, b\}$ в G необходимо найти содержащую их кратчайшую цепь длины $d(R)$. В случае 1 очевидно, что $w = b$, а в случае 2 при $w = a$ цепь (u, x, y, a, w_2) является требуемой кратчайшей цепью графа G. Поэтому в обоих случаях считаем, что $w = b$. Из вида лестницы R_{ba} следует, что $\rho(z, a) \leqslant 2$ при любой $z \in R_{ab}$, а из свойства $(*)$ для R_{ab} имеем: если $(u, x, y, b) \subseteq R_{ab}$ — кратчайшая цепь и $\rho(u, a) = \rho(u, b) = 2$, то существует некоторая кратчайшая цепь $(u', u, x, y, b) \subseteq R_{ab}$ длины 3. Поэтому в случае 1 (случае 2) (u', u, x, b, w_1) $((u', x, y, b, w_1))$ — требуемая кратчайшая цепь графа G.

2. Из вида G_{ba} следует, что

$$\forall x \in G \ \ \rho(x, a) \leqslant 2. \tag{7.1}$$

В силу (7.1) и изометричности L_{ab} имеем $n_{ab} \leqslant 5$. При $n_{ab} \geqslant 4$ для R_{ab} нетрудно проверить выполнение свойства $(*)$. При этом проверка СПМ и сохранение диаметра для графа R доказываются аналогично п. 1. Используя (7.1) и леммы 6.3, 2.1 и 3.1, при $n_{ab} = 3$ нетрудно убедиться в том, что G является графом из табл. 1 с номером «3, 22» или «3, 23». Лемма 7.5 доказана.

Докажем теперь следующую теорему 1.2, сформулированную в § 1.

Теорема 1.2. 1. *Каждый базисный граф удовлетворяет* СПМ.

2. *Граф G является базисным тогда и только тогда, когда либо G — простой цикл, граф S_k, $k \geqslant 6$, H_1 или H_2 (см. рис. 1), либо G — граф из табл. 1.*

3. *Следующие базисные графы попарно неизоморфны: простой цикл, графы $S_k, k \geqslant 6$, H_1, H_2 (см. рис. 1), графы из табл. 1 с различными номерами.*

Доказательство теоремы 1.2. Убедимся в справедливости п. 1. Пусть G — базисный граф, т. е. выполняется одно из условий в определении 7.1. В силу определения элементарного графа и непосредственной проверки СПМ для графов из условий 2 и 3 можно считать, что для G

выполняется одно из условий 4–6 в определении 7.1. Если выполнено условие 4, то по п. 1 лемм 7.2 и 7.3 граф G удовлетворяет СПМ.

Пусть G удовлетворяет условию 5. Так как базисные графы, изображенные на рис. 11, получаются из элементарных графов нечетного диаметра d (имеющих в табл. 1 номера $< 3, 3 >$ и $< 3, 6 >$) по условию 4 определения 7.1, то по доказанному они удовлетворяют СПМ.

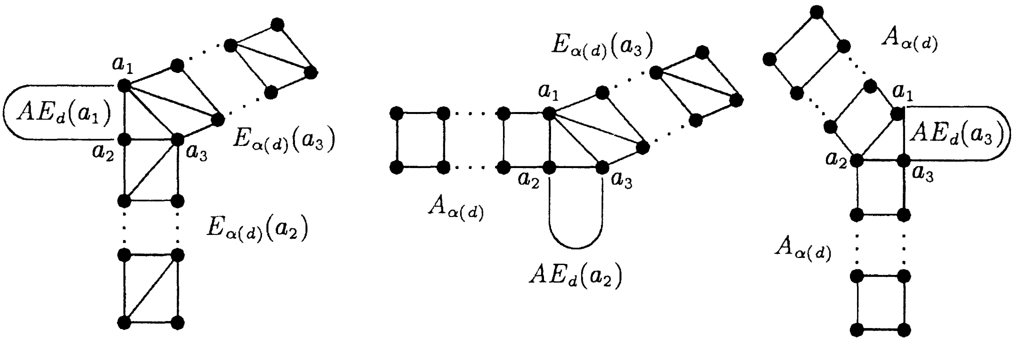


Рис. 11

Следовательно, в силу п. 1 леммы 7.3 граф G удовлетворяет СПМ.

Пусть выполняется условие 6. Если G получается из элементарного графа заменой только одной лестницы, то по п. 1 лемм 7.4, 7.5 граф G удовлетворяет СПМ. Поэтому считаем, что G получается из элементарного графа R некоторыми заменами а), б) (см. условие 6 определения 7.1) лестниц $R_{a_1b_1}$ и $R_{a_2b_2}$ основания графа R на соответствующие обобщенные лестницы $G_{a_1b_1}$, $G_{a_2b_2}$. Тогда $G = N_{a_2b_2} \to G_{a_2b_2}$, где $N = R_{a_1b_1} \to G_{a_1b_1}$. В п. 1 лемм 7.4, 7.5 для замен а), б) указаны условия на исходный граф, гарантирующие сохранение СПМ при этой замене. Нетрудно показать, что для графа N выполнены эти условия для замены лестницы $N_{a_2b_2} = R_{a_2b_2}$ на обобщенную лестницу $G_{a_2b_2}$. Поскольку R удовлетворяет СПМ, граф G удовлетворяет СПМ. Таким образом, п. 1 доказан. Теперь докажем одновременно пп. 2 и 3.

Сначала отметим, когда по определению 7.1 изоморфные базисные графы G^1, G^2 можно получить различными способами (т. е. графы G^1 и G^2, которые удовлетворяют разным условиям в определении 7.1 или строятся из неизоморфных элементарных графов). В [1] показано, что если G^1, G^2 — произвольные базисные изоморфные графы, то выполняется одно из следующих утверждений:

I. G^1, G^2 — элементарные графы.

II. $G^1 \cong G^2 \cong S_k$, $k \geqslant 6$.

III. G^1, G^2 — графы из табл. 1 с одинаковым номером «$3, i$» или «$4, j$», где $i \in \{22, 23, 24\}$, $j \in \{39, 40\}$.

IV. G^1, G^2 получаются соответственно из элементарных графов R^1,

R^2, причем либо оба графа G^1, G^2 удовлетворяют одному и тому же условию (4, 5 или 6) из определения 7.1 и R^1, R^2 имеют одинаковый номер $< n, m >$ в табл. 1, либо G^1 — один из следующих графов, изображенных на рис. 12, где L_1, L_2 — основания неизоморфных элементарных графов R^1, R^2.

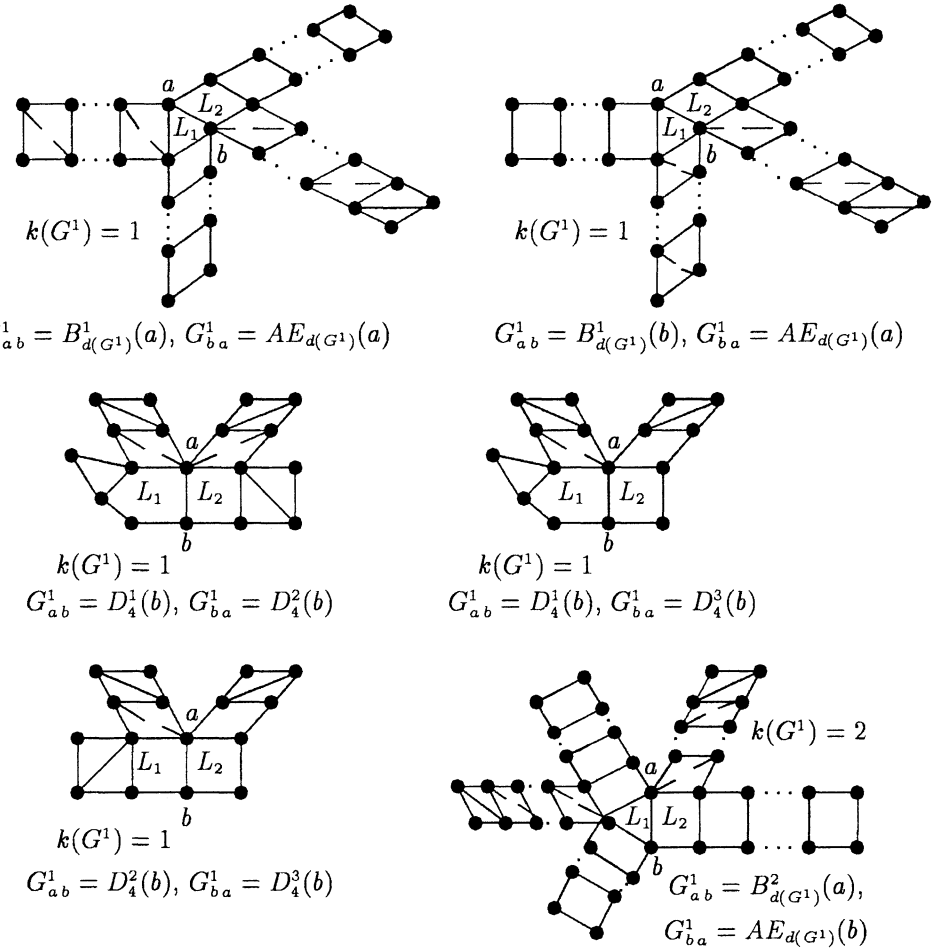


Рис. 12

Теперь опишем базисные графы. Воспользуемся характеризацией элементарных графов из теоремы 1.3. В силу определения 7.1 для описания базисных графов требуется только расширить таблицу элементарных графов, добавив графы из условий 2, 3 определения 7.1, и произвести все возможные (указанные в условиях 4–6 определения 7.1) замены лестниц на обобщенные лестницы. Чтобы добиться выполнения п. 3 теоремы, необходимо только (в силу указанного выше утверждения для двух произвольных изоморфных базисных графов и замечания 5.1) не учитывать дважды в табл. 1 графы, изображенные на рис. 12. Легко убедиться, что табл. 1 так и построена: из каждого элементарного графа с номером $< n, m >$ получаем графы с номером «n, m». Теорема 1.2 доказана.

§ 8. Операции склейки

Определение 8.1. Граф G получается первой операцией склейки из графов G^1 и G^2, если графы G^1, G^2 и G имеют вид, изображенный на рис. 13, где $\widetilde{ab_1}$, $\widetilde{ab_2}$, $\widetilde{b_1c}$, $\widetilde{ac}$ — внутренние ребра, $G^1_{ab_1}$, $G^2_{b_2a}$ — развилки, $G^1_{b_1a} = E_{\alpha(G^1)}(b_1)$, $G^1_{cb_1} \in \{A_{\beta(G^1)}, D_{\beta(G^1)-1}(b_1), E_{\beta(G^1)}(b_1)\}$, $G^2_{ab_2} = E_{\alpha(G^2)}(b_2)$ и b_1, b_2 — внешнесмежные вершины графа G.

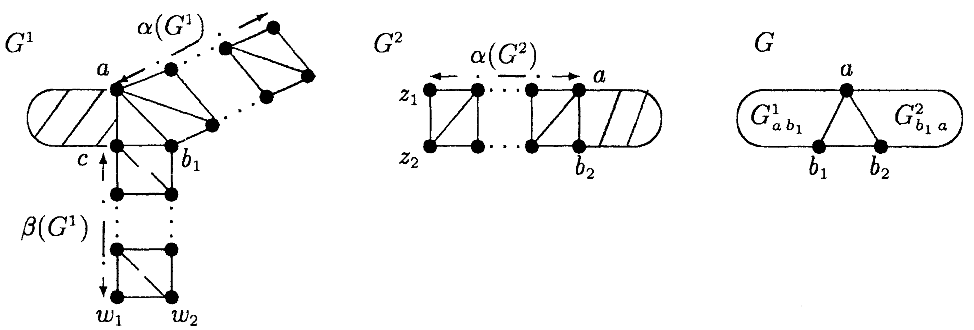


Рис. 13

Определение 8.2. Граф G получается второй операцией склейки из графов G^1 и G^2, если графы G^1, G^2 и G имеют вид, изображенный на рис. 14, где $\widetilde{ab_1}, \widetilde{ab_2}$ — внутренние ребра, $b_1 \neq b_2$, $G^1_{ab_1}$, $G^2_{b_2a}$ — развилки, $G^1_{b_2a} = D_{\alpha(G^1)-1}(b_2)$, $G^2_{ab_1} = D_{\alpha(G^2)-1}(b_1)$, P — граф $G^1_{b_1a} \cap G^1_{ab_2} = G^2_{b_1a} \cap G^2_{ab_2}$, причем если $d(G^1) = 4$, то P отличен от квадрата с диагональю $\widetilde{b_1b_2}$.

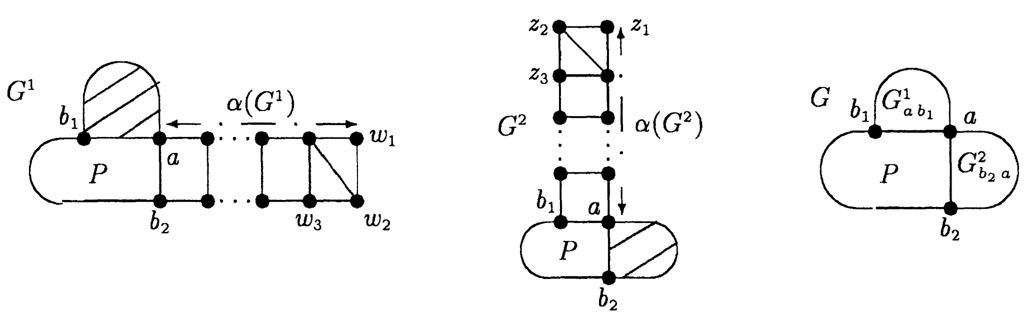


Рис. 14

Определение 8.3. Граф G получается третьей операцией склейки из графов R^1, R^2, G^1, G^2, если графы R^1, R^2, G^1, G^2, G имеют вид, изображенный на рис. 15, где $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро, G^1_{ab}, G^2_{ba} —

развилки, $G^1_{ba} = D_{\alpha(G^1)-1}(b)$, $G^2_{ab} = D_{\alpha(G^2)-1}(b)$, $R^1 = G^1_{ba} \to M_{\alpha(R^1)-1}(a)$ и $R^2 = G^2_{ab} \to M_{\alpha(R^2)-1}(a)$.

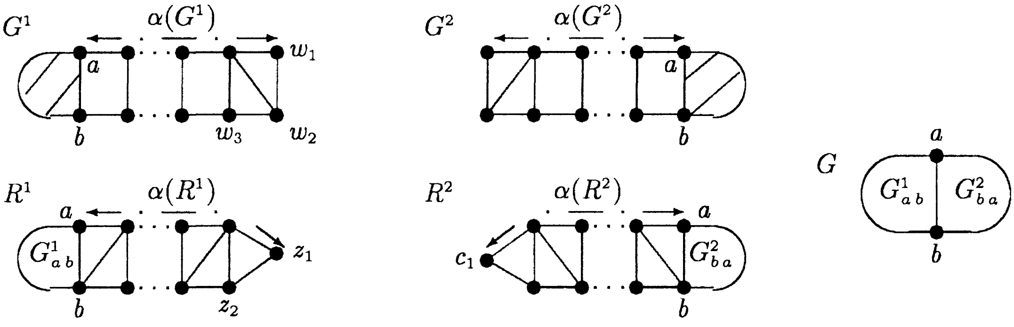


Рис. 15

Лемма 8.1. 1. *Если граф G получается первой операцией склейки из графов G^1, G^2, удовлетворяющих* СПМ, *и $d(G^1) = d(G^2)$ четно, то G удовлетворяет* СПМ *и $d(G) = d(G^1)$.*

2. *Пусть граф G удовлетворяет* СПМ, *имеет разделяющее ребро второго типа и $d(G)$ четно. Тогда G получается первой операцией склейки из графов G^1, G^2, удовлетворяющих* СПМ, *и $d(G^1) = d(G^2) = d(G)$.*

Доказательство. 1. Для произвольных вершин x, y графа G найдем содержащую их кратчайшую цепь длины $d(G^1)$, т. е. покажем, что G удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(G^1)$.

Случай 1. $x \in G_{ab_1}$ и $y \in G_{b_2a}$ (см. рис. 13). В силу СПМ для вершин z_1, y и z_2, y графа G^2 имеются соответственно кратчайшая цепь $(a, y, u_2) \subseteq G^2_{b_2a}$ длины $\alpha(G^2)$ и диаметральная цепь $C = (v_1, z_2, y, v_2) \subseteq G^2$. Аналогично есть кратчайшая цепь $(u_1, x, a) \subseteq G^1_{ab_1}$ длины $\alpha(G^1)$, причем если $x \in G^1_{ac} \cup (w_1, c, a)$, то $\rho(u_1, b_1) \geqslant \alpha(G^1)$, и, значит, (u_1, x, a, y, u_2) — требуемая кратчайшая цепь графа G. Поэтому считаем, что $x \in (w_2, b_1)$. В силу свойства 4 леммы 3.1 либо $v_1 = z_1$, либо $v_1 = z_2$ и $a \in C$, либо $v_1 = z_2$ и $b_2 \in C$. Поэтому в G есть кратчайшая цепь $(w_1, x, b_1, b_2, y, v_2)$, (w_2, x, b_1, a, y, v_2) или $(w_2, x, b_1, b_2, y, v_2)$ длины $d(G^1)$ соответственно.

Случай 2. $x, y \in G_{b_2a}$ (случай $x, y \in G_{ab_1}$ аналогичен). В силу СПМ в G^2 имеется некоторая диаметральная цепь (u, x, y, v). Можно считать, что один конец этой цепи, например u, принадлежит $G^2_{ab_2} \setminus \{a, b_2\}$. Тогда в G есть кратчайшая цепь (w, x, y, v), где $w \in \{a, b_1\}$ и $v \in G_{b_2a}$. Таким образом, пришли к рассмотренному случаю 1.

2. Пусть $\vec{ab_1}$, $\vec{ab_2}$ — разделяющие ребра второго типа графа G (см. рис. 13, где b_1, b_2 — внешнесмежные вершины) и $G^1 = G_{b_1a} \to E_{\alpha(G)}(b_1)$, $G^2 = G_{ab_2} \to E_{\alpha(G)}(b_2)$. Покажем, что графы G^1 и G^2 искомые. По лемме 6.3 в G существуют выделенные диаметральные цепи

$(x^-, \vec{ab_1}, y^-) \subseteq G_{ab_1}$, $(x^+, \vec{ab_2}, y^+) \subseteq G_{b_2a}$. Поэтому

$$\begin{gathered} \forall x \in G \;\; \rho(x,a) \leqslant \alpha(G), \\ \forall u_1, u_2 \in G \;\; (\rho(u_1,u_2) = d(G) \Rightarrow \rho(u_1,a) = \rho(u_2,a) = \alpha(G)). \end{gathered} \tag{8.1}$$

Следовательно, $d(G^1) = d(G^2) = d(G)$.

В силу СПМ и леммы 6.4 можно считать, что $n_{ab_1} \leqslant 5$ и y^- — сдвигаемая вершина относительно ребра $\widetilde{b_1a}$ (так как иначе $n_{b_2a} \leqslant 5$ и y^+ — сдвигаемая вершина относительно ребра $\widetilde{b_2a}$). Покажем, что граф G^1 имеет вид, изображенный на рис. 13, т. е. G_{ab_1} имеет требуемый вид. Действительно, пусть $c \in L_{ab_1} \setminus \{a\}$ — вершина, смежная с вершиной b_1. В графе G по лемме 2.1 имеем $c \neq w^-(b_1)$, т. е. $\widetilde{b_1c}$ — внутреннее ребро. Поэтому по лемме 6.5 имеем $n_{ab_1} = 3$ и $L_{ab_1} = \{a, b_1, c\}$. Поскольку $\widetilde{ab_2}$ — разделяющее ребро, по следствию 6.1 граф G_{cb_1} является лестницей. Выясним ее вид. Так как y^- — сдвигаемая вершина, то $e(b_1,c) \geqslant \alpha(G)$. Поэтому в силу (8.1) имеем $e(b_1,c) = \alpha(G)$ и $\rho(f(b_1,c),c) < e(b_1,c)$ для любой вершины $f(b_1,c)$. По свойству 3 леммы 3.1 имеем $G_{cb_1} \in \{A_{\beta(G)}, D_{\beta(G)-1}(b_1), E_{\beta(G)}(b_1)\}$.

Таким образом, граф G получается первой операцией склейки из графов G^1 и G^2. Покажем, что граф G^2 (аналогично G^1) удовлетворяет СПМ, т. е. для произвольных вершин $x, y \in G^2$ найдем содержащую их диаметральную цепь.

Случай 1. $x \in G^2_{ab_2} \setminus \{b_2, a\}$ и $y \in G^2_{b_2a}$. Из свойства 4 леммы 3.1 следует, что в G^2 имеется некоторая кратчайшая цепь $(f(v_1,v_2), x, y)$, где $v_1, v_2 \in \{a, b_2\}$. Поэтому можно считать, что $x = z_i$ (см. рис. 13). В силу СПМ для вершин x^-, y графа G и (8.1) существует кратчайшая цепь $(a, y, u) \subseteq G^2_{b_2a}$ длины $\alpha(G^2)$. Следовательно, (z_1, a, y, u) — диаметральная цепь графа G^2. Поэтому считаем, что $x = z_2$. В силу СПМ в G есть некоторая диаметральная цепь $C = (u_1, y^-, y, u_2)$. Если $a \in C$, то из (8.1) следует, что $u_1 = y^-$, $\rho(u_2, b_2) \geqslant \alpha(G)$ и, значит, (z_2, a, y, u_2) — диаметральная цепь в G^2. Если $a \notin C$, то $b_1, b_2 \in C$ и из (8.1) имеем $\beta(G) \leqslant \rho(b_2, u_2) \leqslant \alpha(G)$. Значит, для подходящего $i \in \{1, 2\}$ цепь (z_i, z_2, b_2, y, u_2) является диаметральной в G^2.

Случай 2. $x, y \in G^2_{b_2a}$. Он сводится к случаю 1 так же, как в п. 1.

Случай 3. $x, y \in G^2_{ab_2}$. Используя диаметральную цепь (x^+, a, b_2, y^+) и вид лестницы $G^2_{ab_2}$, нетрудно указать искомую диаметральную цепь. Лемма 8.1 доказана.

Лемма 8.2. 1. *Если граф G получается второй операцией склейки из графов G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, и $d(G^1) = d(G^2)$ четно, то G удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(G^1)$, причем если G^1, G^2 не имеют разделяющих ребер второго типа, то G не имеет таких ребер.*

2. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, $d(G)$ четно и G имеет два разделяющих ребра $\widetilde{b_1 a}$, $\widetilde{b_2 a}$ первого типа, лежащих в одной грани, $P = G_{b_1 a} \cap G_{ab_2}$ (см. рис. 14), причем при $d(G) = 4$ граф P отличен от квадрата с диагональю $\widetilde{b_1 b_2}$, а при $d(G) > 4$ граф P имеет вид, изображенный на рис. 16. Тогда G получается второй операцией склейки из графов G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, и $d(G^1) = d(G^2) = d(G)$.*

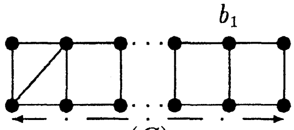


Рис. 16

Доказательство. 1. Очевидно, что

$$\begin{gathered}\forall i\, \forall x \in G^i \;\; \rho(x,a) \leqslant \alpha(G^i),\\ \forall u_1, u_2 \in G^i \; (\rho(u_1,u_2) = d(G^i) \Rightarrow \rho(u_1,a) = \rho(u_2,a) = \alpha(G^i)).\end{gathered} \tag{8.2}$$

В силу (8.2) и леммы 6.3 ребро $\vec{ab_i}$ является разделяющим ребром графа G^i, $i = 1, 2$. По лемме 6.3 имеются разделяющие ребра $\vec{ab^+}$, $\vec{ab^-}$ графов G^1, G^2 соответственно и выделенные диаметральные цепи $(x^-, \vec{ab^-}, y) \subseteq G^1_{ab_1}$, $(x^+, \vec{ab^+}, y^+) \subseteq G^2_{b_2 a}$, где $b^- \in \{b_1, w^-(b_1)\}$ и $b^+ \in \{b_2, w^+(b_1)\}$. Поэтому $d(G) = d(G^1)$. Покажем, что G удовлетворяет СПМ, т. е. для произвольных вершин $x, y \in G$ найдем содержащую их диаметральную цепь.

Случай 1. $x \in G_{ab_1} \setminus \{b_1, a\}$ и $y \in G_{b_2 a} \setminus \{b_2, a\}$. В силу СПМ имеются диаметральные цепи $C_1 = (u_1, x, a, w_1) \subseteq G^1$ и $C_2 = (u_2, y, a, z_1) \subseteq G^2$, где $u_1 \in G^1_{ab_1} \setminus \{a, b_1\}$ и $u_2 \in G^2_{b_2 a} \setminus \{a, b_2\}$ (см. w_i, z_i на рис. 14). Из (8.2) следует, что $\rho(u_1, a) = \rho(u_2, a) = \alpha(G)$. Поэтому считаем, что $\rho(b_1, b_2) = 1$, так как иначе (u_1, x, a, y, u_2) — диаметральная цепь графа G. При этом можно считать, что $\rho(x, a) > \rho(x, b_1)$, так как иначе из СПМ для вершин x, w_3 в G^1 есть диаметральная цепь (v, x, a, w_3). Следовательно, $\rho(v, b_1) \geqslant \rho(v, a) = \alpha(G^1)$ и (v, x, a, y, u_2) — диаметральная цепь графа G. Аналогично полагаем, что $\rho(y, a) > \rho(y, b_2)$. Поэтому можно считать, что $b_i \in C_i$, $i = 1, 2$. Следовательно, $b^+ = b_2$ и $b^- = b_1$. По лемме 2.1 в графе G^2 ребро $\widetilde{b_1 b_2}$ является внутренним. Кроме того, $w^+(b_1) \neq w^-(b_2)$, так как иначе P — квадрат с диагональю $\widetilde{b_1 b_2}$, и в силу леммы 6.3 и определения выделенной диаметральной цепи имеем $\beta(G^2) = 1$ и $d(G^2) = 4$, что противоречит условию леммы. Следовательно, в силу планарности графа $\rho(w^+(b^1), b_2) \neq 1$ или $\rho(w^-(b_2), b_1) \neq 1$. Пусть, например, $\rho(w^+(b_1), b_2) \neq 1$. Тогда в силу (8.2) и СПМ для вершин $w^+(b_1)$ и $u_2 \in G^2$ получаем, что u_2 — сдвигаемая вершина относительно ребра $\widetilde{ab_2}$, причем $\rho(\widehat{u}_2, a) = \alpha(G^2)$. Следовательно, $(u_1, x, b_1, b_2, y, u_2, \widehat{u}_2)$ — диаметральная цепь в графе G.

Случай 2. $x, y \in G_{ab_2} = G^1_{ab_2}$ (случай $x, y \in G_{b_1a}$ аналогичен). В силу СПМ в графе G^1 существует некоторая диаметральная цепь $C = (u_1, x, y, u_2)$. Можно считать, что $u_2 \in G^1_{b_2a} \setminus \{a, b_2\}$. Кроме того, будем считать, что $b_2 \in C$ и $\rho(u_1, b_2) \geqslant \rho(u_1, a)$ (иначе в силу (8.2) цепь (u_1, x, y, a, x^+) является диаметральной в графе G). Поэтому, учитывая (8.2), имеем кратчайшую цепь $C' = (u_1, x, y, b_2) \subseteq G^1_{ab_2}$ такую, что $\rho(u_1, a) = \alpha(G^1) \geqslant 2$ и $u_1 \notin \{b_1, b_2, a\}$. Теперь предположим, что $C' \subseteq P$. Тогда в силу СПМ для вершин u_1, b_2 в графе G^2 имеется некоторая диаметральная цепь $(v_1, u_1, b_2, v_2) \subseteq G^2_{b_1a}$. Следовательно, в G есть диаметральная цепь $(v_1, u_1, x, y, b_2, v_2) \subseteq G_{b_1a}$. Поэтому будем считать, что $C' \nsubseteq P$, т. е. $u_1 \in G^1_{ab_1} \setminus \{a, b_1\}$. Далее, если $b^+ = b_2$ или $\rho(u_1, b_2) = \rho(u_1, a)$, то, используя цепь $(x^+, \vec{ab}^+, y^+)$, в графе G можем построить кратчайшую цепь $(u_1, x, y, w^+(b_2))$, причем $w^+(b_2) \in G_{b_2a} \setminus \{a, b_2\}$. Тем самым приходим к рассмотренному случаю 1. Таким образом, считаем, что

$$b^+ = w^+(b_2),\ \rho(u_1, b_2) = \rho(u_1, a) + 1 = \alpha(G^1) + 1. \tag{8.3}$$

Рассмотрим вершину z_i графа G^2 (см. рис. 14) такую, что $i = 2$ при $\rho(b_1, b_2) = 1$ и $i = 3$ при $\rho(b_1, b_2) = 2$. В силу (8.2) и СПМ для вершин z_i, b_2 в графе G^2 имеется диаметральная цепь $(z_i, b_2, v_i) \subseteq G^2_{ab_2}$, причем $v_i \in P$, $\rho(v_i, a) = \alpha(G^2)$, $\rho(v_i, b_2) = \beta(G^2)$ и $\rho(v_3, b_1) > \rho(v_2, b_1) = \alpha(G^2)$. Следовательно, учитывая (8.3), для графа G имеем $\rho(u_1, v_i) = d(G)$ и (u_1, x, y, b_2, v_i) — диаметральная цепь. Таким образом, G удовлетворяет СПМ.

Теперь предположим, что G^1, G^2 не имеют разделяющих ребер второго типа. Тогда $\vec{ab}_1, \vec{ab}_2$ — разделяющие ребра первого типа графов G^1 и G^2 соответственно, а значит, и графа G. Пусть, от противного, в G есть разделяющее ребро второго типа. По следствию 6.1 это ребро является ребром $\vec{ac}$, где $c \notin \{b_1, b_2\}$. Можно считать, что $c \in G_{ab_2}$ (случай $c \in G_{b_1a}$ аналогичен). Тогда G^1_{ca}, G^1_{ac} — развилки, т. е. $\widetilde{ac}$ — разделяющее ребро второго типа графа G^1. Противоречие.

2. Пусть выполнены условия п. 2 и $G^1 = G_{b_2a} \to D_{\alpha(G)-1}(b_2)$, $G^2 = G_{ab_1} \to D_{\alpha(G)-1}(b_1)$ (см. рис. 14). Тогда нетрудно убедиться, что G^1, G^2 — искомые графы. Лемма 8.2 доказана.

Лемма 8.3. 1. *Если граф G получается третьей операцией склейки из графов R^1, R^2, G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, и $d(G^1) = d(G^2) = d(R^1) = d(R^2)$ четно, то G удовлетворяет СПМ и $d(G) = d(G^1)$, причем если исходные графы не имеют разделяющих ребер второго типа, то G не имеет таких ребер.*

2. *Пусть граф G удовлетворяет СПМ, $d(G)$ четно, $\vec{ab}$ — разделяющее ребро первого типа и граф G удовлетворяет свойствам $< l, r, 1 >$, $< l, r, 2 >$ для любых $l, r \in \{a, b\}$, $l \neq r$. Тогда G получается третьей операцией склейки из некоторых графов R^1, R^2, G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, и $d(R^i) = d(G^i) = d(G)$, $i \in \{1, 2\}$.*

Доказательство проводится по аналогии с леммой 8.1, учитывая свойства $< l, r, 1 >$, $< l, r, 2 >$.

Для каждой операции склейки в [1] приведены графы, удовлетворяющие СПМ, которые нельзя получить операциями склейки из базисных графов без использования этой операции. Тем самым доказано следующее

Предложение 8.1. *Каждая из трех операций склейки независима.*

§ 9. Доказательство теоремы 1.1 и следствия 1.1

Достаточность очевидно следует из п. 1 теоремы 1.2 и п. 1 лемм 8.1, 8.2, 8.3.

Необходимость. Покажем, что если граф G удовлетворяет СПМ, то G является либо базисным графом, либо получается операциями склейки из базисных графов одинакового четного диаметра, равного $d(G)$. Обозначим через $k(G)$ число разделяющих ребер графа G. Пусть граф G удовлетворяет СПМ и является контрпримером с наименьшим числом $k(G)$. В силу леммы 2.3 имеем $k(G) > 0$, так как иначе G — базисный граф.

Свойства графа G

Лемма 9.1. *Граф G при четном $d(G)$ не имеет разделяющих ребер второго типа.*

Доказательство следует из п. 2 леммы 8.1.

Лемма 9.2. *Граф G при нечетном $d(G)$ не имеет разделяющего ребра $\widetilde{ab}$ первого типа (второго типа) такого, что $G_{ab} = B^i_{d(G)}(x)$, где $i = 1, 2$ и $x \in \{a, b\}$ ($G_{ab} = M^1_{d(G)}(a)$).*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $G_{ab} = B^i_{d(G)}(x)$ (случай $G_{ab} = M^1_{d(G)}(a)$ аналогичен). По п. 2 леммы 7.2 граф $R = G_{ab} \to B_{\alpha(G)}$ удовлетворяет СПМ и $d(R) = d(G)$. Так как $k(R) < k(G)$, то R — базисный граф. Предположим, что на грани L_{ba} лежит единственное разделяющее ребро $\widetilde{ba}$ графа G. Тогда R — элементарный граф с основанием L_{ab} и R_{ba} — развилка. Следовательно, G — базисный граф. Противоречие. Поэтому на грани L_{ba} имеется разделяющее ребро графа G, отличное от $\widetilde{ba}$. Тогда в силу изометричности L_{ba}

и следствия 6.1 грань L_{ba} является 3-гранью и хотя бы одно из ребер $\widetilde{ac}, \widetilde{bc}$ является разделяющим первого типа, где $L_{ba} = \{a, b, c\}$. Пусть, например, $\widetilde{ac}$ — разделяющее ребро. По лемме 6.3 существует цепь $(u, \vec{ac}, v) \subseteq G_{ca}$. Так как $G_{ab} = B^i_{d(G)}(x)$, то имеется вершина $s \in G_{ab}$ такая, что $\rho(s, a) = \rho(s, b) = \alpha(G) + 1$. Тогда $\rho(s, v) > d(G)$. Противоречие. Лемма 9.2 доказана.

Лемма 9.3. *Пусть $\vec{ab}$ — разделяющее ребро графа G, для некоторых $l, r \in \{a, b\}$ справедливо неравенство $n_{lr} \leqslant 5$ и $(s, \vec{ab}, t) \subseteq G_{lr}$ — выделенная диаметральная цепь, причем t — сдвигаемая вершина. Тогда*

1) если $d(G)$ четно, то $G_{lr} \in \{D^1_4(b), D^2_{d(G)}(b), D^3_4(b)\}$ или справедливо свойство $< l, r, 1 >$;

2) если $d(G)$ нечетно, то $G_{lr} = AE_{d(G)}(b)$ или справедливо свойство $< l, r, 3 >$.

Доказательство. Пусть для определенности $l = a$ и $r = b$. По лемме 6.3 имеется выделенная диаметральная цепь $(x^+, \vec{ab^+}, y^+) \subseteq G_{b+a}$, где $b^+ \in \{b, w^+(b)\}$. Поэтому

$$\forall x \in G_{ab} \ \ (\rho(x, a) \leqslant \beta(G) + 1 \ \& \ (\rho(x, a) \leqslant \alpha(G) \ \vee \ \rho(x, b) \leqslant \alpha(G) + 1)). \tag{9.1}$$

В силу леммы 6.5 граф G_{ab} имеет один из видов на рис. 9. Рассмотрим возможные случаи для значения n_{ab}.

Случай 1. $n_{ab} = 5$ (см. рис. 9, *а*). Тогда либо $t = c$, либо $t \in G_{wc} \setminus \{c, w\}$. Так как t — сдвигаемая вершина и справедливо (9.1), то $\rho(\hat{t}, b) = \rho(\hat{t}, a) = \beta(G) + 1$, т. е. при нечетном $d(G)$ выполняется свойство $< a, b, 3 >$.

Пусть $d(G)$ четно и не выполняется свойство $< a, b, 1 >$. Тогда имеется кратчайшая цепь $(u, t, b) \subseteq G_{ab}$ длины $\alpha(G)+1$. Поэтому в силу (9.1) $t = c$ и, значит, $d(G) = 4$. Следовательно, $\widetilde{cw}$ — внешнее ребро (так как иначе $\rho(a, w^+(w)) > \beta(G) + 1$) и $u \in G_{vw} \setminus \{w, v\}$. В силу (9.1) имеем $\rho(w^-(w), v) = 1$. По лемме 2.1 граф G_{vw} является треугольником, так как иначе G_{vw} — квадрат с диагональю $\widetilde{vw^-}(w)$ и пара вершин $c, w^+(v)$ не удовлетворяет СПМ.

Заметим, что G_{av} — лестница. Действительно, в противном случае по лемме 9.1 ребра $\widetilde{va}, \widetilde{ba}$ являются разделяющими ребрами первого типа. В силу п. 2 леммы 8.2 граф G получается второй операцией склейки из графов G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, причем $d(G^i) = d(G)$ и $k(G^i) < k(G)$, $i = 1, 2$. Следовательно, G не является контрпримером. Противоречие. Поэтому G_{av} — лестница. Так как $\rho(s, a) = \alpha(G) = 2$, то в силу (9.1) и леммы 3.2 имеем $e(v, a) = e(a, v) + 1 = 3$, т. е. $G_{av} \in \{D_1(v), E_2(v)\}$. Таким образом, $G_{ab} = D^1_4(b)$.

Случай 2. $n_{ab} = 4$ (см. рис. 9, *b*). В этом случае либо $t = c$, либо $t \in G_{vc} \setminus \{c, v\}$. Кроме того,

$$\rho(v, s) = \rho(a, s) + 1 = \alpha(G) + 1, \tag{9.2}$$

так как $(s, \vec{ab}, c, t)$ — выделенная диаметральная цепь.

Покажем, что если $\widetilde{vc}$ — внутреннее ребро, то либо $\beta(G) = 1$ и $G_{vc} \in \{C, E_1(c)\}$, либо $\beta(G) \geqslant 2$ и $G_{vc} \in \{A_{\beta(G)-1}, B_{\beta(G)-1}, D_{\beta(G)-1}(c), M_{\beta(G)-1}(v)\}$. Действительно, в силу следствия 6.1 граф G_{vc} является лестницей. Так как (a, b, c, t) — кратчайшая цепь и $\rho(t, c) = \beta(G) - 1$, то $\rho(t, v) \geqslant \beta(G.)$ Следовательно, согласно (9.1) имеем $e(v, c) = \beta(G)$. Поскольку t — сдвигаемая вершина, $e(c, v) \geqslant e(v, c) = \beta(G)$. Используя леммы 3.1 и 2.1, получаем требуемый вид G_{vc}.

Заметим, что G_{av} — лестница и $G_{av} \in \{D_{\alpha(G)-1}(v), E_{\alpha(G)}(v)\}$, если выполнено одно из следующих условий:

1) $d(G)$ четно и если $d(G) > 4$, то $G_{vc} = D_{\beta(G)-1}(c)$;

2) $d(G)$ нечетно.

Действительно, если выполнено первое условие, то с использованием п. 2 леммы 8.2 это получается аналогично случаю 1. Пусть $d(G)$ нечетно. Тогда по следствию 6.1 граф G_{av} является лестницей. В силу (9.1) и (9.2) $e(v, a) = e(a, v) + 1 = \alpha(G) + 1$, т. е. G_{av} имеет требуемый вид.

Рассмотрим три возможных подслучая.

2.1. Пусть $\widetilde{vc}$ — внешнее ребро. Тогда $\beta(G) = 1$ и при $d(G) = 4$, учитывая лемму 2.1, имеем $G_{av} = D_1(v)$ и $G_{ab} = D_4^3(b)$, а если $d(G) = 3$, то $G_{ab} = AE_3(b)$.

2.2. Пусть $\widetilde{vc}$ — внутреннее ребро и $d(G)$ четно. Тогда если $\beta(G) = 1$ и $G_{vc} = C$ либо $\beta(G) \geqslant 2$ и $G_{vc} \in \{A_{\beta(G)-1}, B_{\beta(G)-1}, M_{\beta(G)-1}(v)\}$, то выполняется свойство $< a, b, 1 >$. В противном случае имеем $\beta(G) = 1$ и $G_{vc} = E_1(c)$ либо $\beta(G) \geqslant 2$ и $G_{vc} = D_{\beta(G)-1}(c)$, т. е. $G_{ab} = D^2_{d(G)}(b)$.

2.3. Пусть $\widetilde{vc}$ — внутреннее ребро и $d(G)$ нечетно. Тогда если $\beta(G) = 1$ или $G_{vc} \in \{B_{\beta(G)-1}, D_{\beta(G)-1}(c), M_{\beta(G)-1}(v)\}$, то выполняется свойство $< a, b, 3 >$. В противном случае $G_{ab} = AE_{d(G)}(b)$. Таким образом, случай 2 рассмотрен.

Случай 3. $n_{ab} = 3$ (см. рис. 9, *c*). В этом случае $\widetilde{bc}$ — внутреннее ребро и $t \in G_{cb} \setminus \{b, c\}$. Поэтому в силу (9.1) справедливо свойство $< a, b, 1 >$ при четном $d(G)$. При нечетном $d(G)$ справедливость свойства $< a, b, 3 >$ доказывается так же, как в случае 1. Лемма 9.3 доказана.

Лемма 9.4. *Пусть $d(G)$ нечетно и $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро первого типа. Тогда*

1) если $(u, b, a) \subseteq G_{ba}$ — кратчайшая цепь длины $\beta(G) + 1$, где u — несдвигаемая вершина и $L_{ab} = \{a, b, c\}$, то

$$G_{cb} = A_{\beta(G)} \tag{9.3}$$

или

$$G_{cb} \in \{E_{\beta(G)}(b), AE_{d(G)}(b)\},\ G_{ac} \in \{D_{\beta(G)-1}(c), E_{\beta(G)}(c), AE_{d(G)}(c)\}; \tag{9.4}$$

2) *в графе G нет диаметральной цепи $(v, \vec{ab}, u) \subseteq G_{ba}$ с несдвигаемыми концами.*

Доказательство. 1. Так как $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро первого типа, то в силу леммы 6.3 ребра $\widetilde{ac}, \widetilde{bc}$ являются внутренними (см. рис. 9, c) и имеется выделенная диаметральная цепь $(v_1, \vec{ab}, v_2) \subseteq G_{ba}$. Поэтому

$$\forall z \in G_{ab}\ \forall w \in \{a, b\}\ \rho(z, w) \leqslant \beta(G) + 1. \tag{9.5}$$

Покажем, что $G_{cb} \in \{A_{\beta(G)}, D_{\beta(G)-1}(b), E_{\beta(G)}(b), AE_{d(G)}(b)\}$. Действительно, сначала предположим, что G_{cb} — лестница. Так как вершины $u, w^-(b)$ принадлежат некоторой диаметральной цепи, u — несдвигаемая вершина и справедливо (9.5), то $e(b,c) = \beta(G) + 1$ и $\rho(f(b,c), c) < e(b,c)$ для любой вершины $f(b,c)$. По лемме 3.1 $G_{cb} \in \{A_{\beta(G)}, D_{\beta(G)-1}(b), E_{\beta(G)}(b)\}$. Пусть теперь G_{cb} — развилка. Тогда по следствию 6.1 ребро $\vec{cb}$ является разделяющим ребром первого типа и по лемме 6.3 существует выделенная диаметральная цепь $(x, \vec{cb}, y) \subseteq G_{cb}$. Так как u — несдвигаемая вершина, то в силу СПМ и леммы 6.4 получаем, что $n_{cb} \leqslant 5$ и y — сдвигаемая вершина. По лемме 9.3 $G_{cb} = AE_{d(G)}(b)$ или справедливо свойство $< c, b, 3 >$. Очевидно, что свойство $< c, b, 3 >$ противоречит (9.5), значит, $G_{cb} = AE_{d(G)}(b)$. Таким образом, G_{cb} имеет указанный вид и можно считать, что $G_{cb} \neq A_{\beta(G)}$. Тогда в силу вида G_{cb} имеется кратчайшая цепь $(v, c, b) \subseteq G_{cb}$ длины $\beta(G) + 1$ такая, что v — несдвигаемая вершина. Поэтому по доказанному имеем $G_{ac} \in \{A_{\beta(G)}, E_{\beta(G)}(c), D_{\beta(G)-1}(c), AE_{d(G)}(c)\}$. Заметим, что $G_{cb} \neq D_{\beta(G)-1}(b)$, иначе легко непосредственно найти вершины $u_1 \in G_{cb}$ и $u_2 \in G_{ac}$, не удовлетворяющие СПМ. Кроме того, $G_{ac} \neq A_{\beta(G)}$, так как иначе $G_{ab} = B^i_{d(G)}(b)$, $1 \leqslant i \leqslant 2$, что противоречит лемме 9.2. Таким образом, справедливо (9.4).

2. Предположим противное. Так как u, v — несдвигаемые вершины, то концы выделенной диаметральной цепи $(x, \vec{ab}, y) \subseteq G_{ab}$ являются сдвигаемыми и по лемме 6.4 имеем $n_{ab} \leqslant 5$. Тогда в силу леммы 6.5 имеем $n_{ab} = 3$. По доказанному п. 1 леммы 9.4 имеем $G_{cb} = G_{ac} = A_{\beta(G)}$, где $L_{ab} = \{a, b, c\}$. Поэтому $G_{ab} = B^1_{d(G)}(b)$, что противоречит лемме 9.2. Лемма 9.4 доказана.

Лемма 9.5. *Граф G при нечетном $d(G)$ не имеет разделяющих ребер второго типа.*

Доказательство. Пусть от противного $\vec{ab^\tau}$, $\tau \in \{+, -\}$ — разделяющие ребра второго типа, где b^+, b^- — внешнесмежные вершины (см. рис. 8, b) и $(x^+, \vec{ab}^+, y^+) \subseteq G_{b+a}$, $(x^-, \vec{ab}^-, y^-) \subseteq G_{ab^-}$ — выделенные диаметральные цепи. В силу леммы 6.4 и СПМ для вершин x^+, x^- можно считать, что x^+ — сдвигаемая вершина и $n_{b+a} \leqslant 5$. Поскольку $\rho(y^-, a) = \rho(y^-, b^+) = \beta(G) + 1$, по лемме 9.3 имеем $G_{b+a} = AE_{d(G)}(a)$, т. е. $G_{b-a} = M^1_{d(G)}(a)$. Противоречие с леммой 9.2. Лемма 9.5 доказана.

Лемма 9.6. *Пусть выполнены условия леммы* 9.3. *Тогда справедливо свойство* $< l, r, 2 >$, *а если* $d(G)$ *нечетно и* $G_{lr} \neq AE_{d(G)}(b)$, *то справедливо свойство* $< l, r, 4 >$.

Доказательство. Воспользуемся доказательством леммы 9.3, сохраняя те же обозначения. Покажем справедливость свойства $< a, b, 2 >$, а при нечетном $d(G)$ и $G_{ab} \neq AE_{d(G)}(b)$ — справедливость свойства $< a, b, 4 >$. Пусть $C = (u, x, y, a) \subseteq G_{ab}$ — кратчайшая цепь и $\rho(u, a) = \beta(G) + 1$, $\rho(u, b) = \beta(G)$.

Случай 1. $n_{ab} = 5$. Тогда $u = c$ или $u \in G_{wc} \setminus \{c, w\}$. Заметим, что $u = t$. Действительно, это очевидно при $\beta(G) = 1$. Пусть теперь $\beta(G) \geqslant 2$. Тогда $u, t \in G_{wc} \setminus \{c, w\}$ и по следствию 6.1 граф G_{wc} является лестницей. Так как t — сдвигаемая вершина, то как и в п. 1 леммы 9.4 получаем $G_{wc} \in \{A_{\beta(G)-1}, D_{\beta(G)-2}(c), E_{\beta(G)-1}(c)\}$, поэтому $u = t$. Тогда либо $C = (t, w, v, a)$ и $\rho(s, v) > \rho(s, a)$, либо $C = (t, c, b, a)$. Поэтому $C \subseteq (t, a, s)$ — диаметральная цепь и $(\hat{t}, u, c, b)$, $(\hat{t}, w, v, a)$ — кратчайшие цепи длины $\beta(G) + 1$, т. е. выполняются требуемые свойства.

Случай 2. $n_{ab} = 4$. Тогда $u = c$ или $u \in G_{vc} \setminus \{c, v\}$. В силу (9.2) имеем $C \subseteq (u, x, y, a, s)$ — диаметральная цепь, т. е. выполняется свойство $< a, b, 2 >$. Пусть теперь $d(G)$ нечетно и $G_{ab} \neq AE_{d(G)}(b)$. Тогда либо $\beta(G) = 1$ и $G_{vc} \in \{C, E_1(c)\}$, либо $\beta(G) \geqslant 2$ и $G_{vc} \in \{B_{\beta(G)-1}, D_{\beta(G)-1}(c), M_{\beta(G)-1}(v)\}$. Теперь легко понять, что выполняется свойство $< a, b, 4 >$.

Случай 3. $n_{ab} = 3$. Тогда $u \in G_{cb} \setminus \{c, b\}$. Если G_{cb} — лестница, то $G_{cb} \in \{A_{\beta(G)}, D_{\beta(G)-1}(b), E_{\beta(G)}(b)\}$ в силу (9.1), свойства 3 из леммы 3.1 и поскольку t — сдвигаемая вершина. Поэтому $u = t$ и, как в случае 1, требуемые свойства очевидны. Пусть теперь G_{cb} — развилка. Так как $\vec{ab}$ — разделяющее ребро, то по следствию 6.1 и лемме 9.5 $d(G)$ нечетно и $\widetilde{bc}$ — разделяющее ребро первого типа. В силу лемм 9.4 и 6.4 один конец выделенного диаметра, лежащего в G_{cb}, будет сдвигаемым и $n_{cb} \leqslant 5$. Поскольку $\rho(x^+, c) = \rho(x^+, b) = \beta(G) + 1$, по лемме 9.3 имеем $G_{cb} = AE_{d(G)}(z)$, $z \in \{c, b\}$. Так как $(s, \vec{ab}, t)$ — выделенная диаметральная цепь и t — сдвигаемая вершина, то $z = b$, $u = t$, $C = (t, x, y, a) \subseteq (t, b, a, s)$ и $(\hat{t}, u, b)$, $(\hat{t}, c, a)$ — кратчайшие цепи длины $\beta(G)+1$. Лемма 9.6 доказана.

Лемма 9.7. *Пусть* $\vec{ab}$ — *разделяющее ребро первого типа графа* G *и* $d(G)$ *четно. Тогда* $G_{lr} \in \{D^1_4(b), D^2_{d(G)}(b), D^3_4(b)\}$ *для некоторых* $l, r \in \{a, b\}$.

Доказательство. Предположим, что $G_{lr} \notin \{D_4^1(b), D^2_{d(G)}(b), D_4^3(b)\}$ для любых $l, r \in \{a, b\}$. По лемме 6.3 имеются выделенные диаметральные цепи $(x^+, \vec{ab}, y^+) \subseteq G_{ba}$ и $(x^-, \vec{ab}, y^-) \subseteq G_{ab}$. В силу леммы 6.4 и поскольку одна из вершин y^+, y^- — сдвигаемая, можно считать, что y^+ — сдвигаемая вершина и $n_{ba} \leqslant 5$. Тогда по леммам 9.3 и 9.6 справедливы свойства $< b, a, 1 >$ и $< b, a, 2 >$. В силу СПМ и свойства $< b, a, 1 >$ вершина y^- является сдвигаемой и из леммы 6.4 следует, что $n_{ab} \leqslant 5$. Снова по леммам 9.3 и 9.6 получаем, что выполняются свойства $< a, b, 1 >$, $< a, b, 2 >$. Тогда по п. 2 леммы 8.3 граф G получается третьей операцией склейки из некоторых графов G^1, G^2, удовлетворяющих СПМ, причем $d(G^i) = d(G)$ и $k(G^i) < k(G)$, $i = 1, 2$. Следовательно, G не является контрпримером. Противоречие. Лемма 9.7 доказана.

Завершение доказательства необходимости

По леммам 9.1 и 9.5 в графе G имеются разделяющие ребра только первого типа. Пусть $\vec{ab}$ — произвольное разделяющее ребро графа G и $(x^+, \vec{ab}, y^+) \subseteq G_{ba}$, $(x^-, \vec{ab}, y^-) \subseteq G_{ab}$ — выделенные диаметральные цепи, существующие по лемме 6.3.

Случай 1. $d(G)$ нечетно. Из лемм 6.4 и 9.4 следует, что $n_{lr} \leqslant 5$ для любых $l, r \in \{a, b\}$. Так как одно из свойств $< a, b, 3 >$, $< b, a, 3 >$ не выполняется, то по леммам 9.3 и 9.4 имеем $G_{lr} = AE_{d(G)}(x)$ для некоторых $l, r, x \in \{a, b\}$, $l \neq r$. Пусть для определенности $G_{ba} = AE_{d(G)}(a)$. Из вида G_{ba} следует, что y^+ — несдвигаемая вершина и, следовательно, y^- — сдвигаемая вершина. Поэтому по леммам 9.3, 9.6 либо $G_{ab} = AE_{d(G)}(b)$, либо выполняются свойства $< a, b, 2 >$, $< a, b, 4 >$. Если $G_{ab} = AE_{d(G)}(b)$, то G — базисный граф из табл. 1 с номером «4, 39» или «4, 40». Поэтому выполнены перечисленные свойства и $G_{ba} = AE_{d(G)}(a)$. Тогда по п. 2 леммы 7.3 графы $R = G_{ba} \to E_{\alpha(G)}(a)$, $S = G_{ba} \to A_{\alpha(G)}$ удовлетворяют СПМ, причем $d(R) = d(S) = d(G)$, $k(R) < k(G)$ и $k(S) < k(G)$. Следовательно, R и S — базисные графы. Аналогично, как в лемме 9.2, грань L_{ab} является 3-гранью, $L_{ab} = \{a, b, c\}$ и хотя бы одно из ребер $\widetilde{ac}$, $\widetilde{bc}$ является разделяющим первого типа (иначе G — базисный граф). Так как y^+ — несдвигаемая вершина, то по п. 1 леммы 9.4 справедливо (9.3) или (9.4). Если выполнено (9.3), то $\widetilde{ac}$ — разделяющее ребро, $G_{ca} = B^2_{d(G)}(a)$ и по лемме 9.2 приходим к противоречию. Поэтому справедливо (9.4), причем $G_{ac} \neq D_{\beta(G)-1}(c)$, иначе легко непосредственно найти две вершины $u \in G_{ac}$ и $v \in G_{ba}$, не удовлетворяющие СПМ. Следовательно, G удовлетворяет условию 5 определения 7.1. Противоречие.

Случай 2. $d(G)$ четно. По лемме 9.7 можно считать, что $G_{ba} \in \{D_4^1(b), D^2_{d(G)}(b), D_4^3(b)\}$. Сначала предположим, что на грани L_{ab} имеется единственное разделяющее ребро $\widetilde{ab}$. Пусть $G_{ba} = D_4^3(b)$ (остальные случаи рассматриваются аналогично с использованием п. 2 леммы 7.4). Тогда $d(G) = 4$, так как $(x^+, \vec{ab}, y^+)$ — выделенная диаметральная цепь. По п. 2 леммы 7.5 получаем, что либо G — базисный граф из табл. 1 с номером «3, 22» или «3, 23», либо граф $R = G_{ba} \to D_1(b)$ является элементарным, $d(G) = d(R)$ и для R_{ab} выполняется свойство $(*)$. Следовательно, G — базисный граф. Противоречие. Поэтому на грани L_{ab} имеется разделяющее ребро, отличное от $\widetilde{ab}$. Тогда по следствию 6.1 на грани L_{ab} имеется в точности два разделяющих ребра $\vec{ab}$, $\vec{ac}$, $c \in \widetilde{L}_{ab}$. Так как в обобщенных лестницах $D^i_{d(G)}(b)$ нет разделяющих ребер и $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро, то по лемме 9.7 имеем $G_{ac} \in \{D^1_4(c), D^2_{d(G)}(c), D^3_4(c)\}$. Если $G_{ba} \neq D^3_4(b)$ и $G_{ac} \neq D^3_4(c)$, то в силу п. 2 леммы 7.4 граф G получается из элементарного графа $R = (G_{ba} \to D_{\beta(G)}(b))_{ac} \to D_{\beta(G)}(c)$ заменами лестниц R_{ba}, R_{ac} на обобщенные лестницы G_{ba}, G_{ac}, соответственно, т. е. G — базисный граф. Противоречие. Поэтому будем считать, что $G_{ba} = D^3_4(b)$ (случай $G_{ac} = D^3_4(c)$ аналогичен). Тогда как и выше $d(G) = 4$. В силу п. 2 леммы 8.2 получаем, что $P = G_{ab} \cap G_{ca}$ — квадрат с диагональю $\widetilde{bc}$ (иначе G не является контрпримером). Граф G_{ac} отличен от $D^3_4(c)$, так как иначе непосредственно проверяется , что граф G не удовлетворяет СПМ. Следовательно, $G_{ac} \in \{D^1_4(c), D^2_4(c)\}$. Таким образом, G — граф из табл. 1 с номером «3, 24», т. е. G — базисный граф. Противоречие. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Пусть G не содержит треугольников и удовлетворяет СПМ. По теореме 1.1 граф G либо является базисным графом, либо получается операциями склейки из базисных графов одинакового четного диаметра.

Сначала предположим, что G — базисный граф. Так как каждая обобщенная лестница содержит треугольник, то в силу определения 7.1 граф G является элементарным. Из вида лестниц следует, что на основании элементарного графа G все лестницы имеют вид A. По теореме 1.3 граф G является либо простым циклом длины не менее 4, либо графом $< n, m >$ из табл. 1 для некоторых n, m. Непосредственно из табл. 1 получаем, что G — один из элементарных графов, изображенных на рис. 2, которые удовлетворяют СПМ по теореме 1.1.

Теперь покажем, что G не может получаться операциями склейки из базисных графов одинакового четного диаметра. Предположим противное и получим, что G содержит треугольник. Из вида операций склейки ясно, что если используется первая операция, то G содержит треугольник. Поэтому G получается второй и третьей операциями склейки. Теперь покажем, что G удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Если $\widetilde{ab}$ — разделяющее ребро, то каждый из графов G_{ba} и G_{ab} содержит треугольник.

Свойство 2. Если $\widetilde{ab}$ — внутреннее ребро, $G_{ba} = D_{\alpha(G)-1}(b)$ и G_{ab} — развилка, то G_{ab} содержит треугольник.

Для этого достаточно показать, что базисные графы четного диаметра удовлетворяют этим свойствам, и если граф получается второй или третьей операцией склейки из графов одинакового четного диаметра, удовлетворяющих свойствам 1 и 2, то и полученный граф будет им удовлетворять. Действительно, элементарные графы четного диаметра удовлетворяют свойствам 1 и 2, так как не имеют разделяющих ребер, и непосредственно из табл. 1 легко проверить свойство 2. Теперь, используя определение 7.1, нетрудно показать, что базисные графы четного диаметра обладают свойствами 1 и 2.

Пусть G получается второй операцией склейки из графов G^1, G^2 одинакового четного диаметра, обладающих свойствами 1 и 2 (см. рис. 14). Тогда в каждом из графов $G_{ab_1} = G^1_{ab_1}$ и $G_{b_2a} = G^2_{b_2a}$ по свойству 1 имеется треугольник. Поэтому для графа G свойство 2 очевидно. Поскольку в силу следствия 6.1 любое разделяющее ребро в графе G инцидентно вершине a и является разделяющим ребром в графе G^1 или графе G^2, выполняется свойство 1.

Пусть G получается третьей операцией склейки из графов G^1, G^2, R^1, R^2 одинакового четного диаметра, обладающих свойствами 1 и 2 (см. рис. 15). Тогда по свойству 2 каждый из графов $G_{ab} = G^1_{ab}$ и $G_{ba} = G^2_{ba}$ содержит треугольник. Поэтому свойство 2 для графа G очевидно. Поскольку любое разделяющее ребро в графе G, отличное от $\widetilde{ab}$, является разделяющим ребром в графе G^1 или графе G^2, выполняется свойство 1.

Таким образом, G обладает свойством 1 и поэтому содержит треугольник. Противоречие. Следствие 1.1 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. III. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. 51 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 3).
2. **Федоряева Т. И.** Внешнепланарные графы, удовлетворяющие свойству продолжения метрики. I // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 1. С. 83–112.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
3 июня 1999 г.