ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2001. Серия 2. Том 8, № 2, 3–16

УДК 519.854

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЕМАМИ ПРОИЗВОДСТВА*)

И. П. Вознюк, Э. Х. Гимади, М. Ю. Филатов

Рассматривается задача о наилучшем размещении пунктов производства с ограниченными объемами производства. Предлагается полиномиальный алгоритм для нахождения приближенного решения задачи при случайных входных данных. Представлены условия на входные данные, при которых алгоритм является асимптотически точным.

Введение

Рассматриваемая задача о наилучшем размещении пунктов производства с ограниченными объемами производства заключается в следующем. Заданы пункты потребления некоторого продукта и возможные места его производства. Требуется разместить пункты производства таким образом, чтобы суммарные затраты на открытие предприятий и транспортные расходы по доставке заданных объемов продукта от производителей к потребителям были минимальными.

Эта задача — обобщение простейшей задачи размещения, которая является NP-трудной (см., например, [2]). В настоящей статье дается вероятностный анализ приближенного алгоритма для решения задачи при случайно задаваемых входных данных. В [3, 8] введено понятие асимптотически точного алгоритма для дискретных задач оптимизации. В [2] установлены условия асимптотической точности алгоритма для приближенного решения простейшей задачи размещения. Задача размещения с ограниченными объемами производства изучалась в [11], где

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00601), Российского гуманитарного научного фонда (проект 00–02–00221а) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

демонстрируется асимптотическое поведение точного решения на бесконечности. Алгоритмические вопросы в ней не рассматривались.

При построении алгоритмов для приближенного решения задачи размещения с ограниченными объемами производства могут оказаться полезными методы решения транспортной задачи, являющейся полиномиально разрешимой (см., например, [10]). Известны также менее трудоемкие приближенные алгоритмы решения транспортной задачи со случайными входами [7, 9].

Ниже мы основываемся на идее построения алгоритмов [3], позволяющих находить приближенное решение рассматриваемой задачи размещения. Основными результатами является установление условий на входные данные задач, при которых предлагаемый полиномиальный алгоритм позволяет находить асимптотически точное решение.

1. Постановка задачи

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ и $J = \{1, \dots, n\}$ — множества возможных пунктов размещения предприятий и пунктов потребления некоторого продукта соответственно. Известны затраты g_i^0 на размещение предприятия и ограничения d_i на объемы производства в пункте i, $i \in I$. Для каждого пункта потребления $j \in J$ указан требуемый объем b_j спроса продукта. Также заданы транспортные затраты c_{ij}, связанные с транспортировкой единицы продукта из предприятия $i \in I$ в пункт потребления $j \in J$.

Требуется указать те пункты производства из I, при открытии которых минимизируются суммарные затраты на размещения предприятий и доставку продукта.

Введем переменные величины:

x_i — переменная выбора, равная единице, если в пункте i открывается производство, и нулю в противном случае;

x_{ij} — переменная назначения, показывающая, сколько единиц продукта поставляется из пункта производства i в пункт потребления j.

Требуется минимизировать функцию суммарных затрат

$$Z(x) = \sum_{i\in I} g_i^0 x_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

по переменным x_i, x_{ij} при выполнении условий

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = b_j, \quad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j\in J} x_{ij} \leqslant d_i x_i, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad x_i \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J. \tag{4}$$

Условие (2) обеспечивает удовлетворение спроса продукта в пунктах потребления $j \in J$. Неравенство (3) задает ограничения на объемы производства в пункте $i \in I$.

Задача (1)–(4) называется *задачей размещения с ограниченными объемами производства.*

Далее предполагаем, что транспортные расходы c_{ij} — независимые случайные величины, принимающие равновероятно целочисленные значения из отрезка $[1, r]$, где $r > 1$, $i \in I$, $j \in J$. Кроме этого, предполагаем, что $g_i^0 = g^0(d)$, где $g^0(d)$ — неотрицательная монотонно возрастающая вогнутая функция. Другими словами, она обладает следующим свойством:

$$d_{i_1} \geqslant d_{i_2} \;\Leftrightarrow\; \frac{g^0(d_{i_1})}{d_{i_1}} \leqslant \frac{g^0(d_{i_2})}{d_{i_2}},$$

смысл которого заключается в том, что строить крупные предприятия оказывается выгоднее, чем мелкие (в пересчете на единицу мощности). Будем считать, что элементы множества I перенумерованы таким образом, что последовательность (g_i^0), $i \in I$, упорядочена по невозрастанию:

$$g_1^0 \geqslant g_2^0 \geqslant \dots \geqslant g_m^0.$$

2. Определение асимптотически точного алгоритма и вспомогательные утверждения

Обозначим через $Z_n(x^0)$, $Z_n(x^*)$ значения целевой функции задачи, получаемые с помощью алгоритма A и на оптимальном решении соответственно, где n — размерность задачи. Будем говорить, что алгоритм A *асимптотически точен* [3], если существует такая последовательность $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{Z_n(x^0) - Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n \right\} = 0. \tag{5}$$

Решение задачи назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет всем ограничениям задачи. Поскольку рассматриваемые алгоритмы не всегда приводят к допустимым решениям, для задачи размерности n определим индикаторную функцию ν_n:

$$\nu_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — допустимое решение,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ввиду этого левую часть из (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
P&\left\{\frac{Z_n(x^0)-Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n\right\}\\
&= P\left\{\frac{Z_n(x^0)-Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0)=1\right\}P\left\{\nu_n(x^0)=1\right\}\\
&+ P\left\{\frac{Z_n(x^0)-Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0)=0\right\}P\left\{\nu_n(x^0)=0\right\}\\
&\leqslant P\left\{\frac{Z_n(x^0)-Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0)=1\right\} + P\left\{\nu_n(x^0)=0\right\}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Далее в качестве вспомогательной потребуется задача нахождения совершенного паросочетания в случайном двудольном графе. Пусть дан двудольный граф $B_{m,p}$ с множеством вершин $V = S \cup T$, $|S| = |T| = m$. Каждое ребро, соединяющее вершину $i \in S$ с вершиной $j \in T$, появляется независимо от других ребер с вероятностью p. В [6] приводится алгоритм, который позволяет находить совершенное паросочетание в случайном графе $B_{m,p}$ (для краткости обозначим его AV-алгоритмом), и доказана следующая

Теорема 1. *Для любого $\alpha > 0$ существует такая константа $\beta > 0$, что если $p(m) > \frac{\beta \log m}{m}$, то с временной сложностью $O(m \log m)$ AV-алгоритм находит совершенное паросочетание в графе $B_{m,p}$ с вероятностью $1 - O(m^{-\alpha})$.*

Здесь и далее $\log$ обозначает логарифм по основанию 2. Кроме того, нам понадобится следующий факт из теории вероятностей.

Лемма 1. *Пусть $A_t > 0$ — случайные величины и $a_t > 0$ — произвольные числа, $t \in T$. Тогда*

$$P\Bigl(\sum_{t\in T} A_t > \sum_{t\in T} a_t\Bigr) \leqslant \sum_{t\in T} P(A_t > a_t).$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{t\in T} A_t > \sum_{t\in T} a_t \Rightarrow \bigcup_{t\in T}(A_t > a_t).$$

Это можно сделать методом от противного. Справедливость леммы следует из следующей импликации:

$$\bigcap_{t\in T}(A_t \leqslant a_t) \Rightarrow \sum_{t\in T} A_t \leqslant \sum_{t\in T} a_t.$$

Лемма 1 доказана.

3. Асимптотически точный алгоритм для решения задачи размещения с ограниченными объемами производства

Рассмотрим задачу размещения с ограниченными объемами производства (1)–(4). Пусть b_j и d_i таковы, что $1 \leqslant b_j \leqslant B(n) \leqslant \log n$, $D_0(n) \leqslant d_i \leqslant D_1(n)$, $i \in I$, $j \in J$. Опишем следующий алгоритм для решения этой задачи.

Алгоритм $\widetilde{A}$.

Шаг 1. В силу свойства последовательности (g_i^0), $i \in I$, элементы множества $I = \{1, \ldots, m\}$ упорядочены следующим образом: $d_1 \geqslant \ldots \geqslant d_m$. Положим

$$m_0 = \min\left\{\mu \mid \sum_{i=1}^{\mu} d_i \geqslant \sum_{j \in J} b_j\right\}.$$

Пусть $I^0 = \{1, \ldots, m_0\}$ — множество m_0 первых элементов множества I.

Шаг 2. Открыв предприятия в пунктах из I^0, получим транспортную задачу по доставке продукта из пунктов множества I^0 в пункты множества J. Пусть пункты спроса из J упорядочены в порядке неубывания их объемов спроса: $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Далее пусть $d = \min\{d_i \mid i \in I^0\}$ и $A = \sum\limits_{j \in J} b_j - m_0 d$.

Если $A \leqslant 0$, то полагается $n_0 = n$ и переход к шагу 4. В противном случае полагается $n_0 = \max\left\{\nu \mid \sum\limits_{j=\nu}^{n} b_j \geqslant A\right\}$. В этом случае в дальнейшем рассматриваются две копии пункта потребления n_0 с объемами спросов $b'_{n_0} = A - \sum\{b_j \mid n_0 < j \leqslant n\}$ и $b''_{n_0} = b_{n_0} - b'_{n_0}$.

Шаг 3. Рассмотрим какое-либо допустимое решение, удовлетворяющее следующим условиям транспортной задачи, полученное, например, методом «северо-западного угла» [4]:

$$\sum_{j=n_0}^{n} x_{ij} \leqslant d_i - d, \ i \in I^0;$$

$$\sum_{i \in I^0} x_{ij} = b_j, \ n_0 < j \leqslant n;$$

$$\sum_{i \in I^0} x_{in_0} = b'_{n_0}.$$

Пусть x_{ij}^0 — решение этой транспортной задачи, где $i \in I^0$ и $n_0 \leqslant j \leqslant n$.

Шаг 4. Если в пункте 2 оказалось $A > 0$, то алгоритм рассматривает копию пункта потребления n_0 с объемом спроса b''_{n_0}. Без ограничения общности будем считать, что при замене величины спроса b_{n_0} на b''_{n_0} упорядоченность пунктов потребления не изменяется. Поэтому для упрощения записи на этом и следующем шагах алгоритма сохраняется прежняя нумерация пунктов потребления.

Пункты спроса $1, \ldots, n_0$ обслуживаются из пунктов производства с равными мощностями d следующим образом. Пусть $l = \lfloor \frac{n_0}{m_0} \rfloor$. Множество пунктов спроса $1, \ldots, n_0$ разобьем на $l+1$ групп J_k, где $J_k = \{(k-1)m_0 + 1, \ldots, km_0\}$, $1 \leqslant k \leqslant l$, $J_{l+1} = \{lm_0 + 1, \ldots, n_0\}$.

Шаг 5. Рассмотрим транспортные задачи (I^0, J_k), в каждой из которых требуется поставить продукт из I^0 в J_k, $1 \leqslant k \leqslant l+1$. Последовательно решаются задачи (I^0, J_k) в порядке возрастания k, $1 \leqslant k \leqslant l-1$. Найдем решения этих задач, воспользовавшись только коммуникациями единичной стоимости, ведущими из I^0 в J_k, $1 \leqslant k \leqslant l-1$. Для этого применяем AV-алгоритм [6] для нахождения совершенного паросочетания в двудольных графах (I^0, J_k), $1 \leqslant k \leqslant l-1$, полагая, что вероятность появления коммуникации единичной стоимости равна $1/r$. Каждый пункт спроса $j \in J_k, 1 \leqslant k \leqslant l-1$, обслуживается в полном объеме из пункта производства по ребру единичной стоимости, входящему в одно из построенных совершенных паросочетаний. При решении задач (I^0, J_l) и (I^0, J_{l+1}) продукт поставляем в пункты спроса из $J_l \cup J_{l+1}$, например, так же, как и на шаге 3, используя мощности, оставшиеся после решения задач (I^0, J_k), $1 \leqslant k < l$. Пусть x^k_{ij} — решения транспортных задач (I^0, J_k), $i \in I^0$, $j \in J_k$, $1 \leqslant k \leqslant l+1$.

Шаг 6. Размещая предприятия в пунктах из I^0 и объединяя решения всех транспортных задач, получаем решение x^0, компоненты которого определяются следующим образом:

$$x^0_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in I^0, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$x^0_{ij} = \begin{cases} x^0_{ij}, & \text{если } i \in I^0, n_0 < j \leqslant n, \\ x^k_{ij}, & \text{если } i \in I^0, j \in J_k, 1 \leqslant k \leqslant l+1, j \neq n_0, \\ x^0_{in_0} + x^k_{in_0}, & \text{если } i \in I^0, n_0 \in J_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь используется исходная нумерация пунктов потребления.

Конец.

Приведем условия, при которых найденное решение почти всегда является допустимым, т. е. почти всегда все пункты спроса будут обслужены и все ограничения на объемы производства выполнены.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $m \leqslant n^{1-\Theta}$, *где* $\Theta = \text{const}$ *и* $0 < \Theta < 1$, $D_1(n) \leqslant n^\Theta \log n$, $r \leqslant \frac{n}{\beta D_1(n)\log n}$, *где* β — *константа, соответствующая* $\alpha > \frac{\Theta}{1-\Theta}$ *из теоремы* 1. *Тогда* $P\{\nu_n(x^0) = 0\} \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Прежде всего убедимся в том, что при $A > 0$ для обслуживания пунктов потребления $1, \dots, n_0$ и $n_0, \dots, n$ мощности предприятий можно разделить способом, указанным в алгоритме. Согласно выбору n_0 имеем

$$A = \sum_{n_0<j\leqslant n} b_j + b'_{n_0} = \sum_{j\in J} b_j - m_0 d; \quad m_0 d = \sum_{1\leqslant j<n_0} b_j + b''_{n_0}.$$

Поэтому на шаге 5 будет достаточное количество мощностей предприятий, чтобы обслужить пункты потребления $1, \dots, n_0$, где в пункт n_0 поставляется b''_j единиц продукта.

На шаге 1 получаем

$$\sum_{i\in I^0} d_i \geqslant \sum_{j\in J} b_j = \sum_{1\leqslant j<n_0} b_j + b'_{n_0} + b''_{n_0} + \sum_{n_0<j\leqslant n} b_j,$$

поэтому

$$\sum_{i\in I^0}(d_i - d) \geqslant \sum_{n_0<j\leqslant n} b_j + b'_{n_0}.$$

Отсюда следует возможность обслуживать пункты спроса $n_0, \dots, n$ способом, указанным на шаге 3.

Получение недопустимого решения возможно также на шаге 5 алгоритма A_1 при использовании AV-алгоритма. (Допускается, что $A \leqslant 0$.) Напомним, что мы пользуемся нумерацией пунктов потребления, принятой на шаге 4. Имеем

$$m_0 d = \sum_{j=1}^{n_0} b_j = \sum_{k=1}^{l+1}\sum_{j\in J_k} b_j \geqslant \sum_{k=1}^{l}\sum_{j\in J_k} b_j.$$

Пусть $\beta_k = b_{km_0} \geqslant b_j$, где $b_j \in J_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, $\beta_0 = 0$. Из упорядоченности пунктов спроса следует, что $b_j \geqslant \beta_{k-1}$, $b_j \in J_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$. Поэтому $\sum_{j\in J_k} b_j \geqslant m_0\beta_{k-1}$, $1 \leqslant k \leqslant l$. Следовательно,

$$m_0 d \geqslant \sum_{k=1}^{l}\sum_{j\in J_k} b_j \geqslant \sum_{k=1}^{l} m_0\beta_{k-1} = m_0\sum_{k=0}^{l-1}\beta_k.$$

Таким образом, имеем

$$d \geqslant \sum_{k=1}^{l-1}\beta_k.$$

Ясно, что при использовании такой схемы остаточных мощностей открытых предприятий будет достаточно для обслуживания пунктов спроса из множеств $J_1, \dots, J_{l-1}$.

Вероятность появления коммуникации единичной стоимости $p = \frac{1}{r} \geqslant \frac{\beta D_1(n)\log n}{n}$. Так как $\log n > \log m_0$, $\frac{D_1(n)}{n} \geqslant \frac{1}{m_0}$ (ибо $D_1(n)m_0 \geqslant n$), то

$$p \geqslant \frac{\beta D_1(n)\log n}{n} > \frac{\beta \log m_0}{m_0}.$$

Для каждой транспортной задачи (I^0, J_k), $1 \leqslant k \leqslant l-1$, выполняются все условия теоремы 1, поэтому можно воспользоваться AV-алгоритмом для решения этих задач. По этой теореме вероятность того, что не будет существовать допустимого решения для транспортной задачи (I^0, J_k), $1 \leqslant k \leqslant l-1$, равна

$$p_k = O\Big(\frac{1}{m_0^\alpha}\Big) \leqslant \frac{c_k}{m_0^\alpha}, \text{ где } c_k = \text{const}\,.$$

Теперь оценим сверху вероятность построения недопустимого решения на этом шаге алгоритма $\widetilde{A}$:

$$P\{\nu_n(x^0) = 0\} = 1 - \prod_{k=1}^{l-1}(1-p_k) \leqslant \sum_{k=1}^{l-1} p_k \leqslant \frac{cl}{m_0^\alpha}, \quad \text{где } c = \max_{1\leqslant k\leqslant l-1} c_k.$$

Поскольку $l \leqslant \frac{n_0}{m_0}$, имеем

$$\frac{lc}{m_0^\alpha} \leqslant \frac{n_0 c}{m_0}\frac{1}{m_0^\alpha} = \frac{n_0 c}{m_0^{\alpha+1}}.$$

Так как $\frac{1}{m_0} \leqslant \frac{D_1(n)}{n} \leqslant \frac{\log n}{n^{1-\Theta}}$ и при определении β мы выбрали $\alpha + 1 > \frac{1}{1-\Theta}$, то

$$\frac{n_0 c}{m_0^{\alpha+1}} \leqslant \frac{n_0 c \log^{\alpha+1} n}{(n^{1-\Theta})^{\alpha+1}} \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, показано, что $P\{\nu_n(x^0) = 0\} \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Докажем асимптотическую точность алгоритма $\widetilde{A}$.

Теорема 2. *Пусть* $m \leqslant n^{1-\Theta}$, *где* $\Theta = \text{const}$, *и* $1/2 < \Theta < 1$, $r \leqslant \frac{n}{\beta D_1(n)\log n}$, $D_1(n) \leqslant n^\Theta \log n$, $D_1(n) - D_0(n) = o(n^{2\Theta-1}\log n)$. *Тогда алгоритм* $\widetilde{A}$ *с временной сложностью* $O(n\log^2 n)$ *находит асимптотически точное решение для задачи размещения* (1)–(4).

Доказательство. Воспользуемся неравенством (6) для доказательства асимптотической точности алгоритма $\widetilde{A}$. Согласно лемме 2

имеем $P\{\nu_n(x^0)=0\}\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому достаточно показать, что $P\left\{\frac{Z_n(x^0)-Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)}>\varepsilon_n \mid \nu_n(x^0)=1\right\}\to 0$ при $n\to\infty$, где x^0 — допустимое решение задачи и x^* — оптимальное решение задачи.

Оценим расходы, связанные с обслуживанием пунктов спроса $n_0,\dots,n$ на шаге 3 алгоритма, когда $A>0$. Имеем

$$A=\sum_{n_0<j\leqslant n} b_j+b'_{n_0}=\sum_{j\in J} b_j-m_0 d$$
$$\leqslant \sum_{i\in I^0} d_i-m_0 d\leqslant m_0 D_1(n)-m_0 D_0(n)=m_0(D_1(n)-D_0(n)).$$

Из неравенства $Z_n(x^*)\geqslant \sum\limits_{j\in J} b_j\geqslant n$ следует, что

$$\frac{(r-1)A}{\sum\limits_{j\in J} b_j}\leqslant\frac{(r-1)m_0(D_1(n)-D_0(n))}{n}\leqslant\frac{m_0(D_1(n)-D_0(n))}{\beta D_1(n)\log n}.$$

Так как $D_1(n)\geqslant n^\Theta$ (иначе решения не существует), то

$$\frac{m_0(D_1(n)-D_0(n))}{\beta D_1(n)\log n}\leqslant\frac{n^{1-\Theta}(D_1(n)-D_0(n))}{\beta n^\Theta\log n}=\frac{D_1(n)-D_0(n)}{\beta n^{2\Theta-1}\log n}.$$

Поскольку $\Theta>1/2$ и $D_1(n)-D_0(n)=o(n^{2\Theta-1}\log n)$, найдется такая последовательность $\varepsilon_n^1\to 0$ при $n\to\infty$, что $\frac{D_1(n)-D_0(n)}{\beta n^{2\Theta-1}\log n}<\varepsilon_n^1$. Следовательно, при такой последовательности ε_n^1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{(r-1)A}{\sum\limits_{j\in J} b_j}>\varepsilon_n^1 \mid \nu_n(x^0)=1\right\}=0.$$

Легко убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\frac{(r-1)\Big(\sum\limits_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} b_j+b''_{n_0}\Big)}{\sum\limits_{j\in J} b_j}\leqslant\frac{2m_0B(n)r}{n}$$
$$\leqslant\frac{2m_0B(n)}{n}\frac{n}{\beta D_1(n)\log n}\leqslant\frac{2m_0B(n)}{\beta D_1(n)\log n}\leqslant\frac{2n^{1-\Theta}}{\beta D_1(n)}.$$

Так как $D_1(n)\geqslant n^\Theta$, то

$$\frac{2n^{1-\Theta}}{\beta D_1(n)}\leqslant\frac{2n^{1-2\Theta}}{\beta}.$$

Поскольку $\Theta > 1/2$, существует такая последовательность $\varepsilon_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, что $\frac{2n^{1-2\Theta}}{\beta} < \varepsilon_n^2$. Таким образом, найдется такая последовательность $\varepsilon_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{(r-1)\Big(\sum\limits_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} b_j + b''_{n_0}\Big)}{\sum\limits_{j\in J} b_j} > \varepsilon_n^2 \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\} = 0.$$

Так как на шаге 1 были выбраны самые выгодные предприятия с точки зрения платы за единицу мощности, а их количество минимально по отношению к выполнению условия баланса, то

$$\sum_{i\in I} g_i^0 x_i^0 = \sum_{i\in I_0} g_i^0 \leqslant \sum_{i\in I} g_i^0 x_i^*.$$

Поэтому

$$Z_n(x^0) \leqslant \sum_{i\in I} g_i^0 x_i^* + rA + \sum_{j\in J_k, 1\leqslant k\leqslant l-1} b_j + \sum_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} r b_j + r b''_{n_0}.$$

Воспользовавшись неравенством

$$Z_n(x^*) \geqslant \sum_{i\in I} g_i^0 x_i^* + \sum_{j\in J} b_j,$$

получаем

$$P\left\{ \frac{Z_n(x^0) - Z_n(x^*)}{Z_n(x^*)} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\}$$
$$\leqslant P\left\{ \frac{(r-1)A + (r-1)\Big(\sum\limits_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} b_j + b''_{n_0}\Big)}{\sum\limits_{j\in J} b_j} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\}.$$

Пусть $\varepsilon_n = \varepsilon_n^1 + \varepsilon_n^2$. Тогда с учетом леммы 1 имеем

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{(r-1)A + (r-1)\Big(\sum\limits_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} b_j + b''_{n_0}\Big)}{\sum\limits_{j\in J} b_j} > \varepsilon_n \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\}$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{(r-1)A}{\sum\limits_{j\in J} b_j} > \varepsilon_n^1 \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\}$$
$$+ \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{(r-1)\Big(\sum\limits_{j\in J_l\cup J_{l+1}\setminus\{n_0\}} b_j + b''_{n_0}\Big)}{\sum\limits_{j\in J} b_j} > \varepsilon_n^2 \mid \nu_n(x^0) = 1 \right\} = 0.$$

Таким образом, алгоритм $\widetilde{A}$ асимптотически точен.

Оценим количество действий, выполняемых алгоритмом $\widetilde{A}$. Наиболее трудоемким является шаг 5, на котором $l-1$ раз используется AV-алгоритм. Согласно теореме 1 временная сложность этого шага не превосходит $(l-1)O(m_0 \log m_0) < (l-1)O(n^{1-\Theta}\log n)$. Ввиду того, что $\frac{1}{m_0} \leqslant \frac{\log n}{n^{1-\Theta}}$ и $l \leqslant \frac{n_0}{m_0}$, для временной сложности шага 5 и всего алгоритма в целом имеем

$$T \leqslant \frac{n_0}{m_0} O(n^{1-\Theta}\log n) \leqslant \frac{n\log n}{n^{1-\Theta}} O(n^{1-\Theta}\log n) = O(n \log^2 n).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В рассмотренной выше задаче после определения множества I^0 мы получаем транспортную задачу. В принципе можно было бы воспользоваться полиномиальным алгоритмом для нахождения ее точного решения.

Однако для решения этой транспортной задачи был использован менее трудоемкий приближенный алгоритм, который к тому же при доказательстве асимптотической точности алгоритма решения исходной задачи позволяет получить достаточно хорошую верхнюю оценку для значения целевой функции этой задачи. При этом мы нашли условия, при которых найденное приближенное решения с высокой вероятностью дает решение, в котором большая часть объема спроса поставляется по самым дешевым путям транспортировки.

Замечание 2. В рассмотренной задаче из условия теоремы 3 можно исключить требование

$$D_1 - D_0 = o(n^{2\Theta-1}\log n),$$

если для размещения тем или иным способом удастся выбирать такие пункты производства $\{i_1, \dots, i_m\}$, что

$$md \geqslant \sum_{j\in J} b_j, \quad \text{где } d = \min_{1\leqslant k\leqslant m} d_{i_k}.$$

Например, предположим, что множество всех пунктов производства делится на такие группы, что внутри каждой группы ограничения на объемы производства для всех пунктов одинаковы. Пусть при этом для удовлетворения суммарного спроса достаточно предприятий в группе с максимальными мощностями, т. е. $m_1 d_1 \geqslant \sum\limits_{j\in J} b_j$, где m_1 — число предприятий с максимальной мощностью d_1. Тогда не придется специальным образом перераспределять продукцию, превосходящую минимальное предложение.

На первых двух шагах алгоритма $\widetilde{A}$ получаем

$$d = d_1, \quad m_0 = \left\lceil \Bigl(\sum_{j\in J} b_j\Bigr)\Big/ d_1 \right\rceil, \quad A \leqslant 0, \quad n_0 = n.$$

Поэтому сразу осуществляется переход к 4-му и 5-му шагам. При этом не только упрощается решение задачи, но и в условиях теоремы 3 становится лишним требование $D_1 - D_0 = o(n^{2\Theta-1}\log n)$ (асимптотическая точность алгоритма $\widetilde{A}$ и допустимость решения сохраняются).

Замечание 3. В [5] приведены условия асимптотической точности приближенного $O(mn^2)$-алгоритма решения транспортной задачи (с использованием метода минимального элемента). Однако воспользоваться результатами этой работы не удается в силу ошибочности отправного утверждения о том, что в почти каждой случайной квадратной матрице порядка n (с элементами, принимающими равномерно и независимо целочисленные значения из отрезка $[1, r]$, $r < \sqrt{n}$) в любой подматрице с числом элементов, превышающим $\sqrt{n}\ln n$, имеется по крайней мере один единичный элемент.

Положим число элементов подматрицы равным $s = \lfloor k\sqrt{n}\ln n \rfloor$, где k — константа, большая 1. Понятно, что $s > \sqrt{n}\ln n$ при достаточно больших n.

Рассмотрим случайную матрицу размера $m \times n$, где $m = \lceil 0,5s/k \rceil$ и $r = \lceil n^{1/2} - 1 \rceil$. Пусть $\xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n$,— случайная независимая величина, равная 1, если в j-м столбце матрицы нет единичных элементов, и 0 в противном случае. Очевидно, что

$$p = P(\xi_j = 1) = (1 - 1/r)^m \leqslant \exp\{-m/r\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{-0,5n^{1/2}\ln n)}{n^{1/2}}\right\} = n^{-1/2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $p \geqslant n^{-1/2}(1 - o(1))$. Для математического ожидания числа столбцов матрицы, содержащих только нулевые элементы, справедливо неравенство $np \leqslant n^{1/2}$.

Рассмотрим произвольную подматрицу размера $m \times \nu$, составленную из $\nu = \lceil s/m \rceil$ столбцов. Число элементов в этой подматрице равно $m\nu \geqslant s$. Заметим также, что $\nu < np$, так как $\nu \leqslant s/m \leqslant 2k(1 + o(1)) < n^{1/2}(1 - o(1)) \leqslant np$.

Обозначим через A событие $\Bigl\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j < \nu\Bigr\}$, состоящее в том, что в такой произвольной подматрице имеется столбец, содержащий единичный элемент. Тогда

$$P(A) = P\Bigl\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j < \nu\Bigr\} \leqslant P\Bigl\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j \leqslant \nu\Bigr\} \leqslant P\Bigl\{\sum_{j=1}^{n} \xi_j - np \leqslant -(np - \nu)\Bigr\}.$$

Воспользуемся неравенством Боровкова [1, с. 131] для вероятностей больших уклонений сумм бернуллиевских случайных величин: для всякого положительного $z = o(n^{2/3})$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}\xi_j - np \leqslant -z\right\} \geqslant \exp\left\{-\frac{z^2}{2np(1-p)} + o(1)\right\}.$$

Так как в рассматриваемом случае $z = (np - \nu) \leqslant n^{1/2} = o(n^{2/3})$, то

$$P(A) \leqslant \exp\left\{-\frac{(np-\nu)^2}{2np(1-p)} + o(1)\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{n^{1/2}}{2}(1-o(1))\right\} \to 0$$

при $n \to \infty$. Это противоречит утверждению, что любая подматрица (с указанными в [5] свойствами) почти всегда содержит единичный элемент.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
2. **Гимади Э. Х.** Обоснование априорных оценок качества приближенного решения задачи стандартизации // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 12–27.
3. **Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.** Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1975. Вып. 31. С. 35–42.
4. **Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.** Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969.
5. **Кравцов М. К., Крачковский А. П.** Асимптотическая оптимальность плана транспортной задачи, построенного методом минимального элемента // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 1. С. 144–151.
6. **Angluin D., Valiant L. G.** Fast probabilistic algorithm for Hamiltonian circuits and matchings // J. Comput. and System Sci. 1979. V. 19, N 2. P. 155–193.
7. **Hassin R., Zemel E.** Probabilistic analysis of the capacitated transportation problem // Math. Oper. Res. 1988. V. 13, N 1. P. 80–89.
8. **Karp R. M.** The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms // Algorithms and complexity. Recent results and new directions. New York: Acad. Press, 1976. P. 1–19.
9. **Karp R. M., Motwanini R., Nisan N.** Probabilistic analysis of network flow algorithms // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, N 1. P. 71–97.

10. **Kleinschmidt P., Schannath H.** A strongly polynomial algorithm for the transportation problem // Math. Program. 1995. V. 68, N 1. P. 1–13.

11. **Piersma N.** A probabilistic analysis of the capacitated facility location problem // J. Comb. Optim. 1999. V. 3, N 1. P. 31–50.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
18 сентября 2001 г.