ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2001. Серия 2. Том 8, № 2, 27–30

УДК 519.85

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРОЦЕСС ДЛЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

И. И. Дикин

Для решения задачи линейной дополнительности предлагается непрерывный метод, аналогичный способу нахождения седловых точек выпукло-вогнутых функций. Сходимость метода доказывается с помощью техники, характерной для прямого метода Ляпунова.

Постановка задачи. Заданы квадратная матрица $M = (m_{ij})$ порядка n и вектор $q = (q_1, \dots, q_n)$. Рассматривается система линейных неравенств

$$Mx \geqslant q, \quad x \geqslant 0. \tag{1}$$

Требуется определить такой вектор x, удовлетворяющий ограничениям (1), что

$$(Mx - q,\ x) = 0. \tag{2}$$

Лемма. *Пусть неравенства* (1) *совместны и*

$$(Mx,\ x) \geqslant 0 \tag{3}$$

для любого вектора x. Тогда существует решение $\bar{x}$ задачи (1), (2).

Этот результат известен [4]. Можно показать, что в точке $\bar{x}$ достигается минимум

$$(\widetilde{M}x,\ x) - (q,\ x) \tag{4}$$

на множестве, определяемом неравенствами (1), где $\widetilde{M} = (M + M^T)/2$.

Непрерывный процесс. Будем исследовать следующую динамическую систему:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(q_i - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j\right), \quad i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

$$x(0) = x^0, \quad x^0 > 0. \tag{6}$$

Теорема. *Если неравенства* (1) *разрешимы и выполняется условие* (3), *то при* $t \to \infty$

$$x_i(t) \to 0 \text{ при } \bar{\delta}_i < 0; \tag{7}$$

$$0 < \underline{\xi}_i < x_i(t) < \bar{\xi}_i < \infty \quad \text{при } \bar{x}_i > 0; \tag{8}$$

$$(\widetilde{M}(x(t) - \bar{x}),\ x(t) - \bar{x}) \to 0, \tag{9}$$

где $x(t)$ — *решение системы* (5), (6),

$$\bar{\delta}_i = q_i - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\bar{x}_j,$$

и $\bar{x}$ — *относительно внутренняя точка множества решений задачи* (4), (1).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_i \ln x_i),$$

заданную на множестве

$$R = \{x \mid x_i > 0,\ i \in \bar{I};\ x_i \geqslant 0,\ i \notin \bar{I}\},$$

где $\bar{I} = \{i \mid \bar{x}_i > 0\}$.

Функция $z(y) = y - \bar{y}\ln y$ при $\bar{y} > 0$ принимает наименьшее значение в точке $\bar{y}$ интервала $(0, \infty)$. Кроме того, z стремится к бесконечности, когда y приближается к нулю либо к бесконечности. Если $\bar{y} = 0$, то $z \geqslant 0$ на промежутке $[0, \infty)$. Следовательно, $f(x)$ ограничена снизу на R, т. е. $f(x) \geqslant f(\bar{x})$.

Продифференцируем $f(x(t))$. Тогда в силу системы (5), (6) получаем

$$\dot{f} = (x - \bar{x},\ q - Mx).$$

Учитывая равенство (2) при $x = \bar{x}$, последнее выражение нетрудно привести к виду

$$\dot{f} = (x, q - M\bar{x}) - (\widetilde{M}(x - \bar{x}), x - \bar{x}). \tag{10}$$

На основании (10) имеем

$$f(\bar{x}) \leqslant f(x(t)) \leqslant f(x^0), \tag{11}$$

$$\|x(t)\| < N < \infty, \tag{12}$$

пока $x_i(t)(i \notin \bar{I})$ не принимают отрицательных значений.

В силу (12) не существует такого конечного t', что $x(t) > 0$ при $0 \leqslant t < t'$, а, например, $x_l(t') = 0$, $l \notin \bar{I}$, так как подпространство $E_l = \{x \mid x_l = 0\}$ является инвариантным.

Следовательно, на промежутке $[0, \infty)$ существует положительное решение системы дифференциальных уравнений (5), (6). При этом на основании (1) имеют место неравенства (8), а соотношения (7) и (9) являются следствием стремления к нулю правой части выражения (10). Теорема доказана.

Пример. Приведем классические уравнения «хищник — жертва»:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(q_1 + mx_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2(q_2 - mx_1), \tag{13}$$

$$x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_1^0 > 0, \quad x_2^0 > 0. \tag{14}$$

Предполагается, что $m > 0$, $\tilde{x}_1 > 0$, $\tilde{x}_2 > 0$, $\tilde{x}_1 = q_2/m$, $\tilde{x}_2 = -q_1/m$.

Существует первый интеграл системы (13), (14):

$$f(x_1(t), x_2(t)) = f(x_1^0, x_2^0),$$

причем $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \tilde{x}_1 \ln x_1 - \tilde{x}_2 \ln x_2$.

Замечания. В виде соотношений (1), (2) могут быть приведены условия оптимальности Куна — Таккера для задачи квадратичного программирования. Процесс (5), (6) применялся в [1, 3] при исследовании задачи линейного программирования и моделей Вольтерра борьбы за существование. При этом $m_{ij} = -m_{ji}$, когда $i \neq j$, и $m_{ii} \geqslant 0$. Кроме того, предлагаемый подход использовался для определения седловой точки выпукло-вогнутой функции [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дикин И. И.** О непрерывных аналогах метода внутренних точек // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. Вып. 9. С. 59–64.

2. **Дикин И. И.** Исследование задач оптимального программирования методом внутренних точек // Методы оптимизации. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1975. С. 72–108.

3. **Дикин И. И.** Уравнения Вольтерра борьбы за существование и линейные неравенства // Приближенные методы анализа и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1985. С. 65–71.

4. **Kojima M., Megiddo N., Noma T., Yoshise A.** A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems. Berlin: Springer-Verl., 1991.

Адрес автора:

Институт систем энергетики
им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130,
664033 Иркутск, Россия.
E-mail: idikin@isem.sei.irk.ru

Статья поступила
26 июня 2000 г.,
переработанный вариант —
6 июня 2001 г.