ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2002. Серия 1. Том 9, № 1, 3–26

УДК 519.172

О ПРОДОЛЖЕНИИ 3-РАСКРАСКИ С ДВУХ ВЕРШИН В ПЛОСКОМ ГРАФЕ БЕЗ 3-ЦИКЛОВ*)

В. А. Аксенов, О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Раскраска вершин графа в k цветов называется правильной k-раскраской, если любые две смежные вершины окрашены в разные цвета. Доказано, что любая правильная раскраска, заданная на двух вершинах плоского графа G без 3-циклов, может быть продолжена до правильной 3-раскраски графа G.

Введение

Одним из основных результатов о раскраске плоских графов является теорема Грецша [4], которая утверждает, что любой плоский граф без циклов длины 3 является 3-раскрашиваемым. Более сильный результат, первоначально сформулированный Б. Грюнбаумом [5] и доказанный В. А. Аксеновым [1], состоит в том, что любой плоский граф, содержащий не более трех 3-циклов, также является 3-раскрашиваемым. При доказательстве последней теоремы в [1] использовалась техника продолжения заданной на грани раскраски на весь граф. Позднее О. В. Бородин [3] дал новое, более простое доказательство теоремы Грюнбаума, основанное на так называемой порционной раскраске плоских графов.

В. А. Аксенов [2] доказал, что если G — плоский граф, содержащий не более одного 3-цикла, то существует 3-раскраска графа G, в которой любые две наперед заданные вершины окрашены в различные цвета (*теорема о хроматически связных вершинах*). По-другому этот результат можно сформулировать следующим образом: добавление любого ребра к плоскому графу, содержащему не более одного 3-цикла, приводит к 3-раскрашиваемому графу. Позднее для случая, когда граф G не содержит 3-циклов, этот результат был независимо доказан Т. Йенсеном и К. Томассеном [6].

*) Исследование первого и третьего авторов выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916) и голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) и INTAS (грант 97–1001).

Основываясь на идеях, развитых в [1–3], авторы настоящей статьи доказали следующий факт, обобщающий результат из [6]: если G — плоский граф без 3-циклов, то любая правильная раскраска, заданная на двух вершинах графа G, может быть продолжена до правильной 3-раскраски всего графа.

Введем ряд необходимых определений и обозначений. Под плоским графом $G(V, E, F)$ понимается обыкновенный плоский граф без петель и кратных ребер с множеством вершин $V = V(G)$, множеством ребер $E = E(G)$ и множеством граней $F = F(G)$. Рассматриваются также плоские мультиграфы, не содержащие петель и граней ранга 2, т. е. граней, ограниченных циклом, состоящим из двух кратных ребер. Длиной простого цикла C (простой цепи P) называется число содержащихся в C (соответственно в P) ребер. Множество вершин простого цикла C будем также обозначать через C, а не через $V(C)$ (если исключены какие-либо недоразумения).

Если грань $f \in F(G)$ ограничена простым циклом C_f, то длина цикла C_f называется *рангом* грани f и обозначается через $r(f)$. Используется обозначение $d(v)$ для степени вершины $v \in V(G)$. Под *d-вершиной, r-гранью* и *k-циклом* понимается вершина степени d, грань ранга r и простой цикл длины k соответственно. Через $N(v)$ обозначается окружение вершины v, т. е. множество вершин (мульти)графа G, смежных с вершиной v, а через $g(G)$ — обхват графа G, т. е. длина кратчайшего простого цикла в G.

Если C — простой цикл в плоском (мульти)графе G, то под $\mathrm{Int}\ C$ ($\mathrm{Ext}\ C$) понимается множество вершин (мульти)графа G, расположенных во внутренней (внешней) области относительно цикла C. Положим $\mathrm{Int}^*\ C = \mathrm{Int}\ C \cup C$ и $\mathrm{Ext}^*\ C = \mathrm{Ext}\ C \cup C$. Цикл C называется *разделяющим* в G, если $\mathrm{Int}\ C \neq \varnothing$ и $\mathrm{Ext}\ C \neq \varnothing$, т. е. внутри и вне цикла C имеется хотя бы одна вершина (мульти)графа G.

Пусть $G(V, E)$ — абстрактный (не обязательно плоский) (мульти) граф и $W \subset V \cup E$ — произвольное подмножество вершин и ребер из G (или подграф в G, рассматриваемый как множество, состоящее из всех его вершин и ребер). Через $G - W$ обозначим подграф в G, получаемый удалением из G всех ребер $e \in W$ и всех вершин $v \in W$ вместе с инцидентными им ребрами. Если $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ — произвольные два (мульти)графа, то через $G_1 \cup G_2$ ($G_1 \cap G_2$) обозначим (мульти)граф с множеством вершин $V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2$) и множеством ребер $E_1 \cup E_2$ ($E_1 \cap E_2$). При этом запись $G_1 \cup uv$ будет означать, что ребро $uv = e$ с концами в вершинах u и v рассматривается как граф G_2 с множеством вершин $V_2 = \{u, v\}$ и множеством ребер $E_2 = \{e\}$. Для произвольного подмножества вершин X (мульти)графа G через $G[X]$ обозначается

подграф, порожденный множеством вершин X в G. Если в (мульти) графе G отождествляются две вершины u и v, то через $u * v$ обозначим результат их отождествления, т. е. вершину в полученном мультиграфе, который будем обозначать через G_{u*v}.

Для удобства дальнейших рассуждений сформулируем основной результат статьи в терминах плоских мультиграфов.

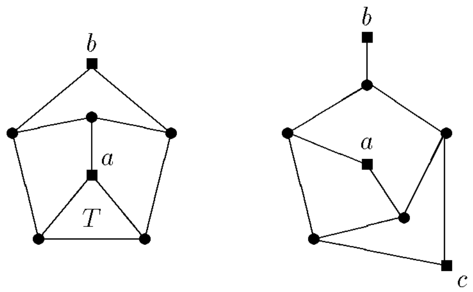
Теорема 1. *Пусть G — плоский мультиграф без 3-циклов и a, b — произвольные две вершины в G. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(i) *Существует 3-раскраска мультиграфа G, в которой вершины a и b окрашены в различные цвета.*

(ii) *Если $ab \notin E(G)$, то существует 3-раскраска мультиграфа G, в которой вершины a и b окрашены одним цветом.*

Определение 1. Две несмежные вершины a, b плоского (мульти) графа G назовем (*хроматически*) *согласованными*, если для вершин a и b справедливо утверждение (ii) теоремы 1.

Утверждение (ii) теоремы 1 по-другому можно сформулировать так: если G — плоский (мульти)граф без 3-циклов, то мультиграф, получаемый из G отождествлением любых двух несмежных вершин, является 3-раскрашиваемым.



а *б*

Рис. 1

Утверждение теоремы 1 неулучшаемо в том смысле, что оно перестает быть верным при наличии в G хотя бы одного 3-цикла. Это подтверждается примером графа G_1 на рис. 1, *а*, который содержит в точности один 3-цикл T и его вершины a и b не согласованы. Для доказательства достаточно заметить, что если бы при некоторой 3-раскраске графа G_1 вершины a и b оказались одноцветными, то граф $G_1 - \{a, b\}$, являющийся 5-циклом, был бы 2-раскрашиваемым. Аналогичные рассуждения показывают, что для графа G_2, который изображен на рис. 1, *б* и не содержит 3-циклов, не существует 3-раскраски, при которой три его попарно несмежные вершины a, b и c были бы окрашены одинаково.

Как следствие из теоремы 1 получаем следующий результат Т. Йенсена и К. Томассена [6].

Теорема 2. *Если к плоскому графу G, не содержащему 3-циклов, добавить вершину, смежную с тремя произвольными вершинами из G, то полученный граф будет 3-раскрашиваемым.*

Чтобы вывести теорему 2 из теоремы 1, достаточно заметить, что среди вершин графа G, смежных с добавленной вершиной v, есть хотя бы две несмежные между собой вершины a и b (в силу отсутствия 3-циклов в G). По теореме 1 вершины a и b согласованы в G. Поэтому соответствующую раскраску графа G можно продолжить на вершину v.

1. Свойства контрпримера к теореме 1

Доказательство теоремы 1 начнем с выбора контрпримера G к ее утверждению. Будем считать, что мультиграф G связен и не содержит 2-граней (очевидно, что если теорема 1 неверна, то такой контрпример G существует). Пусть N — минимальное число вершин в контрпримерах к теореме 1 и G — контрпример с N вершинами и максимальным числом ребер M среди всех контрпримеров с N вершинами (рассматриваются только контрпримеры, не содержащие 2-граней).

Докажем, что контрпример G с указанными свойствами можно выбрать так, что для него не выполняется утверждение (ii) теоремы 1. Пусть, напротив, для всех контрпримеров с N вершинами и M ребрами справедливо утверждение (ii) и не справедливо утверждение (i) теоремы 1. Тогда в мультиграфе G имеются две такие вершины a, b, что в любой 3-раскраске мультиграфа G эти вершины окрашены одинаково. В этом случае имеем $ab \notin E(G)$. Если $N(a) \neq N(b)$, т. е. существует такая вершина $v \in V(G)$, что $av \in E(G)$ и $bv \notin E(G)$, то в силу сделанных предположений вершины b и v согласованы в G. Тогда в соответствующей 3-раскраске мультиграфа G вершины a и b окрашены различно.

Пусть $N(a) = N(b) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Если хотя бы один 4-цикл $C_{i,j} = av_ibv_j$ является разделяющим в G, то ввиду минимальности N существуют такие 3-раскраски $\varphi : \mathrm{Int}^*(C_{i,j}) \to \{1,2,3\}$ и $\psi : \mathrm{Ext}^*(C_{i,j}) \to \{1,2,3\}$ подграфов $G[\mathrm{Int}^*(C_{i,j})]$ и $G[\mathrm{Ext}^*(C_{i,j})]$ соответственно, что $\varphi(a) = \psi(a) = 1$ и $\varphi(b) = \psi(b) = 2$. Очевидно, что $\varphi(v_i) = \psi(v_i) = \varphi(v_j) = \psi(v_j) = 3$, поэтому объединение раскрасок φ и ψ дает 3-раскраску мультиграфа G, в которой вершины a и b окрашены в разные цвета. Пусть ни один цикл $C_{i,j} (1 \leqslant i < j \leqslant k)$ не является разделяющим в G. Тогда $k \leqslant 3$ и каждый цикл $C_{i,j}$ ограничивает некоторую 4-грань в G (так как $g(G) > 3$). Если $k = 3$, то $G = K_{2,3}$. В этом случае оба утверждения теоремы 1 для мультиграфа G верны. Если $k \leqslant 2$, то воспользуемся

предположением о согласованности вершин v_1 и v_2 в G. В результате получим 3-раскраску мультиграфа G, в которой вершины a и b окрашены различно.

Итак, можно считать, что в мультиграфе G имеются две несмежные и несогласованные вершины. Зафиксируем две такие вершины a и b, которые будем называть *выделенными* вершинами. Установим следующие свойства мультиграфа G.

(**G1**) *Мультиграф G (вершинно) двусвязен.*

Доказательство. Предположим, что вершина v — точка сочленения в мультиграфе G и $K_1, K_2, \dots, K_m$ — компоненты связности подграфа $G - v$. Положим $G_i = G[V(K_i) \cup \{v\}]$ $(i = 1, \dots, m)$. Если при некотором i выделенные вершины принадлежат одному и тому же подграфу G_i, то вершины a и b согласованы в G_i по предположению о минимальности N. Так как каждый подграф G_j при $j \neq i$ является 3-раскрашиваемым и $V(G_i) \cap V(G_j) = \{v\}$, то вершины a и b будут согласованы во всем G. Если $a \in V(K_i)$ и $b \in V(K_j)$, где $i \neq j$, то существует 3-раскраска подграфа G_i, в которой вершины a и v окрашены в разные цвета и существует 3-раскраска подграфа G_j, в которой вершины b и v также окрашены различно. Отсюда следует, что существует 3-раскраска мультиграфа G, в которой вершины a и b окрашены одним цветом, т. е. вершины a и b согласованы в G. Свойство (G1) доказано.

Из свойства (G1) следует, что каждая грань $f \in F(G)$ ограничена простым циклом $C_f = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. Поэтому запись $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ далее будет использоваться для определения как цикла C_f, так и самой грани f. Из (G1) получаем следствие

(**G2**) *Степень любой вершины $v \in V(G)$ не меньше 2.*

(**G3**) *Если $v \notin \{a, b\}$, то $d(v) \geqslant 3$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что $d(v) = 2$ и $v \notin \{a, b\}$. Тогда в подграфе $G - v$ вершины a и b согласованы, причем соответствующую раскраску подграфа $G - v$ можно продолжить на вершину v. Свойство (G3) доказано.

(**G4**) *Ранг любой грани в мультиграфе G равен 4 или 5.*

Доказательство. Из условия $g(G) > 3$ следует, что мультиграф G не содержит треугольных граней. Предположим, что в G имеется грань f ранга $k \geqslant 6$, ограниченная циклом $C_f = (v_1, v_2, \dots, v_k)$. Докажем, что цикл C_f содержит такие две несмежные вершины v_i и v_j, что мультиграф $G \cup v_i v_j$ является контрпримером к теореме 1 с несогласованными вершинами a и b (вопреки предположению о максимальности $|E(G)| = M$).

Сначала рассмотрим случай, когда в G отсутствуют ребра v_iv_j (внешние хорды грани f), где $j - i \equiv 4 \pmod k$. Не уменьшая общности, можно считать, что хотя бы одна вершина v_1 или v_4 невыделенная. Если граф $G \cup v_1v_4$ не содержит 3-циклов, то он является искомым контрпримером.

Пусть мультиграф $G \cup v_1v_4$ содержит 3-цикл. Тогда в G имеется цепь $v_1\, u\, v_4$, причем в силу сделанных предположений $u \notin \{v_5, v_k\}$. Кроме того, в G отсутствуют ребра v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7 и цепи вида $v_2\ u'\ v_5$ и $v_3\ u'\ v_6$ (в силу наличия цепи $v_1\ u\ v_4$ и условия $g(G) > 3$). Следовательно, добавление к G любого ребра v_2v_5 или v_3v_6 не приводит к образованию 3-циклов. Поэтому, добавляя к G то из ребер v_2v_5 или v_3v_6, у которого один из концов не является выделенной вершиной, получаем искомый контрпример.

Предположим, что в G имеется такое ребро v_iv_j, что $j - i \equiv 4 \pmod k$. Пусть, для определенности, этим ребром является $v_{k-1}v_3$. Тогда в мультиграфе G отсутствуют ребра v_kv_4, v_1v_5, v_2v_6 и цепи $v_1\, u'\, v_4$ и $v_2\, u'\, v_5$. Отсюда следует, что при добавлении к G любого ребра v_1v_4 или v_2v_5 не образуются 3-циклы. Следовательно, добавляя к G то из указанных ребер, у которого хотя бы один конец не является выделенной вершиной, получаем искомый контрпример. Свойство (G4) доказано.

(G5) *В мультиграфе G любая 4-грань f инцидентна в точности одной выделенной вершине x, т. е. $f = (x, v_2, v_3, v_4)$, где $x \in \{a, b\}$. При этом (если $x = a$) вторая выделенная вершина b смежна с v_3 и в G существует цепь $v_2\, u\, w\, v_4$* (рис. 2).

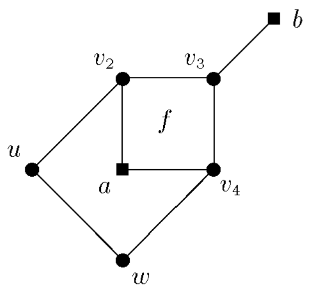


Рис. 2

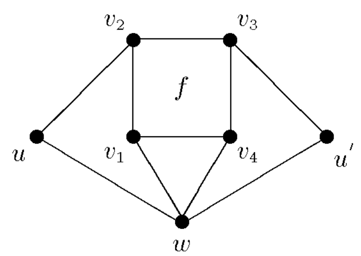


Рис. 3

Доказательство. Пусть $f = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Так как $v_1v_3 \notin E(G)$ и $v_2v_4 \notin E(G)$, то ни в одном из мультиграфов $G_1 = G_{v_1 * v_3}$ и $G_2 = G_{v_2 * v_4}$ нет петель. Если хотя бы один мультиграф G_i $(i = 1, 2)$ не содержит 3-циклов и образы выделенных вершин a и b не смежны в G_i, то ввиду минимальности $|V(G)|$ образы вершин a и b согласованы в G_i. В таком

случае вершины a и b согласованы в G. Если каждый мультиграф G_i содержит 3-цикл, то в мультиграфе G имеются цепи $v_2\,u\,w\,v_4$ и $v_3\,u'\,w\,v_1$, а значит, и 3-цикл (v_1, v_4, w) (рис. 3). Если образы выделенных вершин смежны как в G_1, так и в G_2, то в мультиграфе G грань f инцидентна двум смежным выделенным вершинам, что невозможно. Следовательно, один из мультиграфов G_i (для определенности G_2) содержит 3-цикл, а в другом (G_1) образы выделенных вершин смежны. Отсюда следует утверждение (G5).

(**G6**) *В мультиграфе G имеется не более двух 4-граней. Если в G имеются две 4-грани f и f', то они инцидентны двум различным выделенным вершинам и смежны, т. е. $f = (a, v_2, v_3, v_4)$ и $f' = (b, v_2', v_4, v_3)$, где $v_2 \neq v_2'$. При этом в G существуют цепи $v_2\,u\,w\,v_4$ и $v_2'\,u'\,w'\,v_3$* (рис. 4).

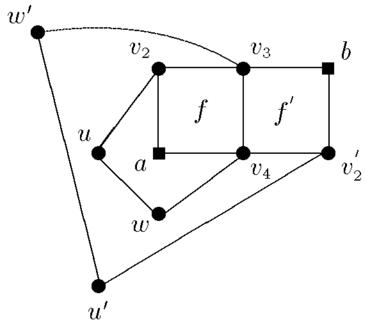


Рис. 4

Доказательство. I. Докажем, что каждая выделенная вершина инцидентна не более чем одной 4-грани. Отсюда следует, что всего в G имеется не более двух 4-граней. Предположим, что вершина a инцидентна двум различным 4-граням $f = (a, v_2, v_3, v_4)$ и $f' = (a, v_2', v_3', v_4')$. Тогда согласно свойству (G5) вершины v_3 и v_3' смежны с вершиной b; при этом возможны следующие случаи:

а) $\{v_2, v_3, v_4\} \cap \{v_2', v_3', v_4'\} = \varnothing$ (рис. 5, *а*);

б) $v_4 = v_4'$, $\{v_2, v_3\} \cap \{v_2', v_3'\} = \varnothing$ (рис. 5, *б*);

в) $v_3 = v_3'$, $\{v_2, v_4\} \cap \{v_2', v_4'\} = \varnothing$ (рис. 5, *в*);

г) $v_3 = v_3'$, $v_4 = v_4'$, $v_2 \neq v_2'$ (рис. 5, *г*).

В случаях а) и б) в силу свойства (G5) в мультиграфе G должны содержаться цепи $v_4\,v_3'\,w\,v_2$ и $v_4'\,v_3\,w\,v_2'$, что невозможно ввиду отсутствия 3-циклов в G. В случае в) по той же причине невозможно существование цепи длины 3, соединяющей вершины v_2 и v_4. В случае г) получаем, что $v_4 = v_4' \notin \{a, b\}$ и $d(v_4) = 2$, что противоречит (G3).

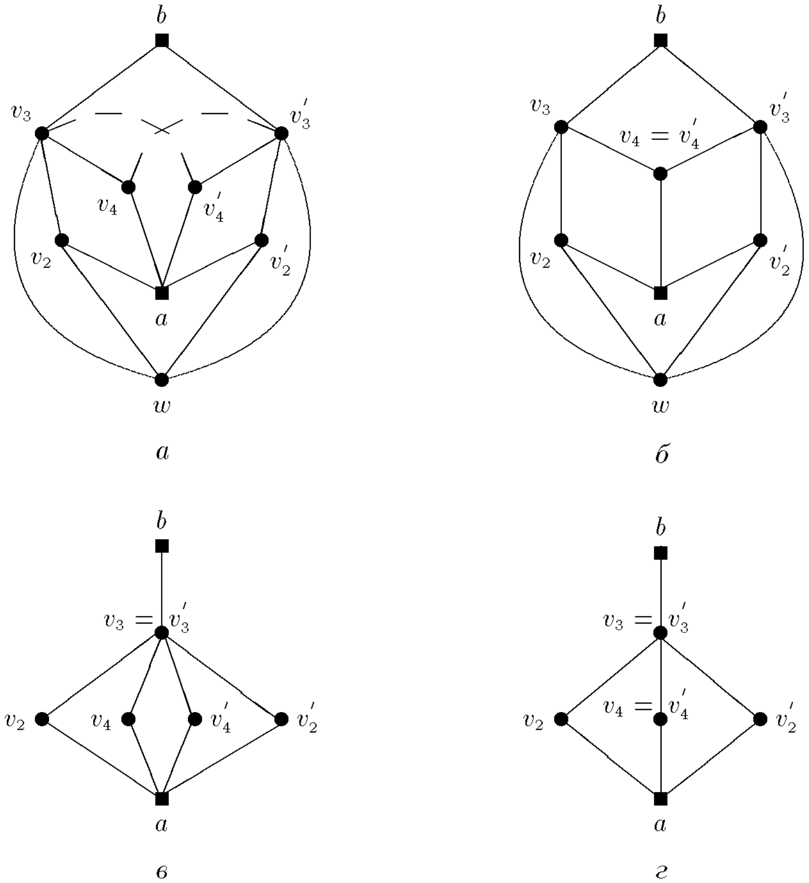


Рис. 5

II. Пусть $f = (a, v_2, v_3, v_4)$ и $f' = (b, v_2', v_3', v_4')$. Докажем, что ребро bv_3 инцидентно грани f', а ребро av_3' инцидентно грани f, что завершит доказательство свойства (G6) (с учетом (G5)). Предположим, что ребро bv_3 не инцидентно грани f'. Тогда цепь длины 3, соединяющая вершины v_2' и v_4', должна проходить через вершину v_3, что невозможно ввиду наличия ребер av_3' и bv_3 и условия $g(G) > 3$ (два возможных случая взаимного расположения граней f и f' изображены на рис. 6, *а, б*). Свойство (G6) доказано.

Не теряя общности, можно считать, что если в мультиграфе G имеется 4-грань, то вершина a инцидентна 4-грани (это следует из (G5)). Кроме того, свойства (G4)–(G6) позволяют зафиксировать такое вложение мультиграфа G в плоскость, при котором внешняя грань является пятиугольной и инцидентна вершине b. Действительно, из свойств (G4) и (G6) следует, что вершина b инцидентна хотя бы одной 5-грани.

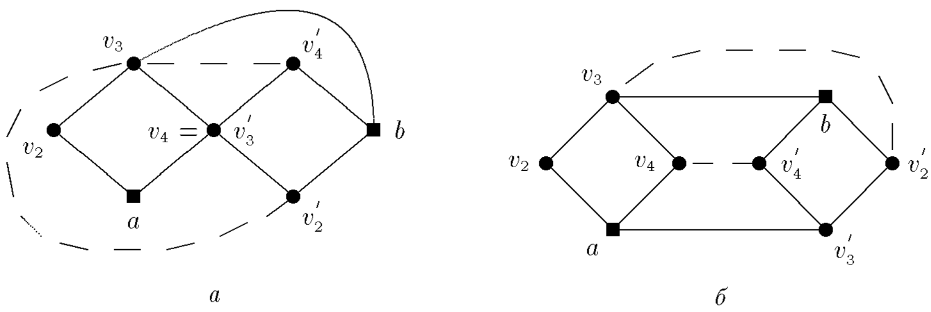


Рис. 6

Выберем эту грань в качестве внешней и установим следующее свойство мультиграфа G.

(**G7**) *Если в мультиграфе G имеются две 4-грани, то $d(a) > 2$ или $d(b) > 2$.*

Доказательство. Пусть $f = (a, v_2, v_3, v_4)$ и $f' = (b, v_2', v_4, v_3)$ — данные 4-грани (см. свойство (G6)). Предположим, что $d(a) = d(b) = 2$. Обозначим через P_i $i = 1, \ldots, k$, всевозможные цепи в G вида $v_2 u_i w_i v_4$, где $w_i \neq v_2'$. Цепи P_i при $i = 1, \ldots, k$ назовем цепями первого типа. Цепями второго типа назовем все цепи вида $P_i = v_2 u_i v_2'$ $(i = k+1, \ldots, l)$ и цепями третьего типа — все цепи вида $v_3 w_i u_i v_2'$, у которых $w_i \neq v_2$ $(i = l+1, \ldots, m)$ (рис. 7).

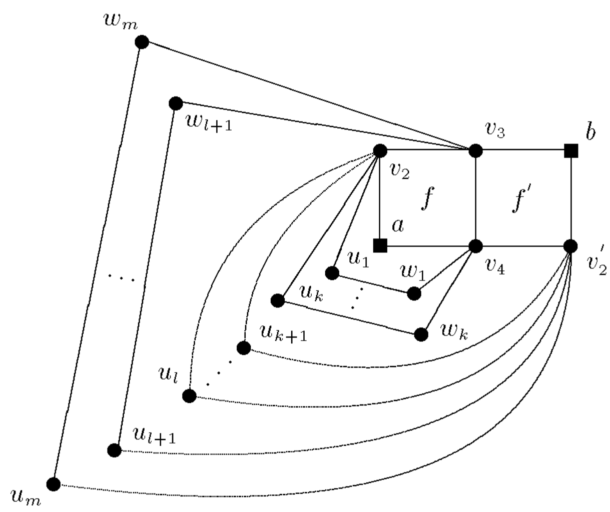


Рис. 7

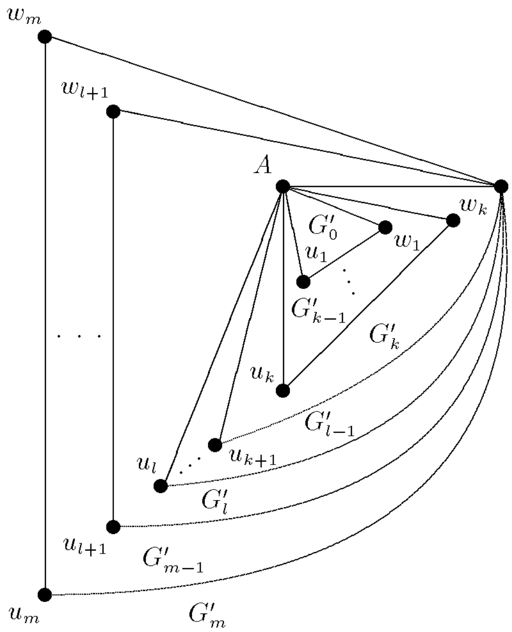


Рис. 8

Заметим, что при некоторых $i = 1, \dots, m-1$ возможны равенства $u_i = u_{i+1}$ и $w_i = w_{i+1}$. Из свойства (G5) следует, что $m > 0$, хотя возможно, что $k = 0$ или $l - k = 0$ или $m - l = 0$. Из выбора плоского представления мультиграфа G и условия $d(b) = 2$ следует, что если P_i — произвольная цепь первого (второго) типа, а P_j — произвольная цепь второго (третьего) типа, то внутренняя область цикла (b, v_3, P_i, v_2', b) в G содержится во внутренней области цикла (b, v_3, P_j, v_2', b). Отсюда следует, что цепи P_i при $i = 1, \dots, m$ можно перенумеровать таким образом, чтобы при каждом $i = 1, \dots, m-1$ внутренняя область цикла (b, v_3, P_i, v_2', b) содержалась во внутренней области цикла $(b, v_3, P_{i+1}, v_2', b)$.

Обозначим через G' плоский мультиграф, получаемый удалением из мультиграфа G вершин a и b и последующим отождествлением вершины v_2 с вершиной v_4 и вершины v_3 с вершиной v_2' (при этом отождествляются ребра v_2v_3 и v_4v_2'). Положим $A = v_2 * v_4$ и $B = v_3 * v_2'$. Из условия $g(G) > 3$ следует, что мультиграф G' не содержит петель.

Докажем, что мультиграф G' является 3-раскрашиваемым. Очевидно, что любой 3-цикл T_i мультиграфа G' получается из какой-то цепи P_i мультиграфа G при отождествлении вершин v_2, v_4 или вершин v_3, v_2'.

Следовательно, множество всех 3-циклов мультиграфа G' состоит из m циклов $T_1, \dots, T_m$, где $T_i = Au_iw_i$ при $i = 1, \dots, k$, $T_i = Au_iB$ при $i = k+1, \dots, l$ и $T_i = Bw_iu_i$ при $i = l+1, \dots, m$. При этом для каждого $i = 1, \dots, m-1$ выполняется включение $\mathrm{Int}\, T_i \subset \mathrm{Int}\, T_{i+1}$ (рис. 8).

Положим $G'_0 = G'[\mathrm{Int}^*\ T_1]$ и $G'_m = G'[\mathrm{Ext}^*\ T_m]$. Обозначим через G'_i при $i = 1, \ldots, m-1$ подграф в G', порожденный вершинами циклов T_i, T_{i+1} и вершинами, заключенными между T_i и T_{i+1}. Из определения подграфов G'_i следует, что $G' = \bigcup\limits_{i=0}^{m} G'_i$ и $G'_{i-1} \cap G'_i = T_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. При этом каждый подграф G'_i при $i = 1, \ldots, m-1$ содержит в точности два 3-цикла T_i и T_{i+1}, а подграфы G'_0 и G'_m содержат по одному 3-циклу (T_1 и T_m соответственно). Докажем индукцией по i, что мультиграф $\bigcup\limits_{j=0}^{i} G'_j$ является 3-раскрашиваемым при каждом $i = 0, \ldots, m$ (заметим, что $\bigcup\limits_{j=0}^{i} G'_j = G'[\mathrm{Int}^*(T_{i+1})]$ при $i \leqslant m-1$). Так как мультиграф G'_0 содержит в точности один 3-цикл, то по теореме Грюнбаума он является 3-раскрашиваемым. Далее, если задана 3-раскраска мультиграфа $\bigcup\limits_{j=0}^{i-1} G'_j$, то она индуцирует 3-раскраску на вершинах цикла T_i в мультиграфе G'_i. Так как мультиграф G'_i содержит не более двух 3-циклов, то по теореме Грюнбаума указанная 3-раскраска продолжается до 3-раскраски мультиграфа G'_i, а следовательно, и мультиграфа $\bigcup\limits_{j=0}^{i} G'_j$.

Теперь пусть имеется 3-раскраска φ' мультиграфа $G' = \bigcup\limits_{i=0}^{m} G'_i$ цветами из множества $\{1, 2, 3\}$, и пусть $\varphi'(A) = 1$, $\varphi'(B) = 2$. Определим 3-раскраску φ мультиграфа G, полагая $\varphi(v_2) = \varphi(v_4) = 1$, $\varphi(v_3) = \varphi(v'_2) = 2$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 3$ и $\varphi(v) = \varphi'(v)$ при $v \in V(G) \setminus \{a, b, v_2, v_3, v_4, v'_2\}$. Полученная раскраска φ противоречит предположению о несогласованности вершин a и b в G. Свойство (G7) доказано.

2. Переход к подграфу без разделяющих 4- и 5-циклов

Обозначим через $\mathscr{C}(G)$ множество всех разделяющих 4- и 5-циклов в мультиграфе G. Назовем *окружением* разделяющего цикла $C \in \mathscr{C}(G)$ и обозначим через $N(C)$ множество всех вершин в G, смежных с вершинами из C (по определению $C \subset N(C)$). Будем говорить, что подграф H *ограничен* разделяющим циклом C, если $H = G[\mathrm{Int}^*\ C]$ или $H = [\mathrm{Ext}^*\ C]$. В обоих случаях обозначим через f_C грань мультиграфа H с граничным циклом C.

Лемма 1. *Если $\mathscr{C}(G) \neq \varnothing$, то в G существуют разделяющий цикл $C \in \mathscr{C}(G)$ и ограниченный им подграф H со следующими свойствами:*

(H1) $\mathscr{C}(H) = \varnothing$;

(**H2**) *в* H *нет* 4*-циклов, отличных от* C;

(**H3**) *если* a *(соответственно* b*)* $\in V(H) \setminus C$, *то* b *(соответственно* a*)* $\notin V(H)$;

(**H4**) *если* a *(соответственно* b*)* $\in V(H) \setminus N(C)$, *то* b *(соответственно* a*)* $\notin V(H) \cup N(C)$;

(**H5**) *если* $\{a, b\} \subset V(H)$, *то* $\{a, b\} \subset C$.

Доказательство. Сначала предположим, что в мультиграфе G нет 4-граней. Выберем минимальный по вложению разделяющий цикл $C_0 \in \mathscr{C}(G)$, т. е. такой цикл из $\mathscr{C}(G)$, что подграф $H_0 = G[\mathrm{Int}^* C_0]$ не содержит других циклов из $\mathscr{C}(G)$ кроме C_0. Если в $\mathscr{C}(G)$ имеется цикл C' такой, что $\mathrm{Int}\, C' \subset \mathrm{Ext}\, C_0$, то среди всех таких циклов выберем минимальный по вложению цикл C_1 и положим $H_1 = G[\mathrm{Int}^* C_1]$ (рис. 9, *а*).

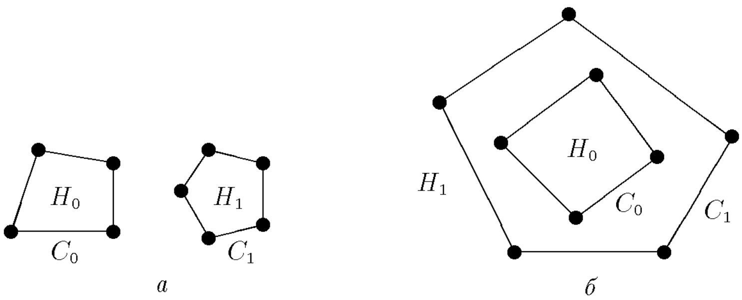


Рис. 9

Если в $\mathscr{C}(G)$ нет циклов указанного вида, то в качестве C_1 выберем такой максимальный по вложению цикл из $\mathscr{C}(G)$, что $\mathrm{Ext}\, C_1 \subset \mathrm{Ext}\, C_0$ (возможно, что $C_1 = C_0$). Положим $H_1 = G[\mathrm{Ext}^* C_1]$ (рис. 9, *б*). Во всех случаях из определения подграфов H_0 и H_1 следует, что $\mathscr{C}(H_0) = \mathscr{C}(H_1) = \varnothing$ и $H_0 \cap H_1 = C_0 \cap C_1$. В качестве подграфа H выберем тот подграф H_i, в котором имеется меньше выделенных вершин. Если каждый подграф H_i $(i = 0, 1)$ содержит в точности одну выделенную вершину, выберем тот из них, в котором выделенная вершина находится на меньшем расстоянии от цикла C_i. Очевидно, что для определенного таким образом подграфа H выполняются все утверждения леммы.

Теперь допустим, что в мультиграфе G имеется 4-грань $f = (a, v_2, v_3, v_4)$. Согласно свойству (G5) вершины b и v_3 смежны в G, причем существует цепь $v_2\, u\, w\, v_4$ (см. рис. 2). Из выбора плоского представления мультиграфа G следует, что $b \in \mathrm{Ext}\, C_a$, где через C_a обозначен 5-цикл (a, v_2, u, w, v_4). Если цикл C_a является разделяющим в G, т. е. $C_a \in \mathscr{C}(G)$, то в его внутренней области выберем минимальный по вложению разделяющий цикл $C \in \mathscr{C}(G)$ (возможно $C = C_a$). Положим $H = G[\mathrm{Int}^* C]$. Очевидно, что подграф H обладает свойством (H1). Из

условий $b \in \operatorname{Ext} C_a$ и $a \in C_a$ следует, что $b \notin V(H)$ и $a \notin V(H) \setminus C$. Это означает, что выполнены свойства (H3)–(H5). Справедливость свойства (H2) следует из (G6), (H1) и условия $b \in \operatorname{Ext} C_a$.

Предположим, что цикл C_a не является разделяющим в G. Тогда $d(a) = 2$. Если в G нет 4-грани, отличной от f, то определим разделяющий цикл $C \in \mathscr{C}(G)$ следующим образом. Если во внешней области цикла $C' = (v_2, u, w, v_4, v_3)$ имеется хотя бы один такой цикл из $\mathscr{C}(G)$, что его внутренняя область не пересекается с $\operatorname{Int} C'$, то в качестве C выберем любой такой минимальный по вложению цикл. Положим $H = G[\operatorname{Int}^* C]$. Если в $\mathscr{C}(G)$ нет циклов указанного вида, то в качестве C выберем любой такой максимальный по вложению цикл из $\mathscr{C}(G)$, что $\operatorname{Int} C' \subset \operatorname{Int} C$ (возможно $C = C'$). Положим $H = G[\operatorname{Ext}^* C]$. Очевидно, что определенный таким образом подграф H обладает свойствами (H1) и (H2). Из условий $a \in \operatorname{Int} C'$ и $b \in N(C')$ следует, что $a \notin V(H)$ и $b \notin V(H) \setminus N(C)$. Поэтому H обладает свойствами (H3)–(H5).

Наконец, пусть $d(a) = 2$ и в мультиграфе G имеются 4-грани $f = (a, v_2, v_3, v_4)$, $f' = (b, v_2', v_4, v_3)$ и цепи $v_2\, u\, w\, v_4$, $v_2'\, u'\, w'\, v_3$ (см. свойства (G5) и (G6) и рис. 4). Тогда из свойства (G7) следует, что $d(b) > 2$ и 5-цикл $C_b = (b, v_2', u', w', v_3)$ является разделяющим в G. Из выбора плоского представления мультиграфа G следует, что вершина a и грани f и f' находятся во внутренней области цикла C_b. Пользуясь тем же принципом, что и в случае с циклом C', во внешней области цикла C_b выберем минимальный (или максимальный) по вложению цикл $C \in \mathscr{C}(G)$ и положим $H = G[\operatorname{Int}^* C]$ ($H = G[\operatorname{Ext}^* C]$). Получим подграф H, удовлетворяющий всем требованиям леммы. Лемма 1 доказана.

Выберем в мультиграфе G разделяющий цикл C и подграф H, как в лемме 1, если $\mathscr{C}(G) \neq \varnothing$. Положим $C = \varnothing$ и $H = G$ при $\mathscr{C}(G) = \varnothing$. Заметим, что в этом случае мультиграф H обладает свойствами (H1) и (H2) (но не свойствами (H3)–(H5)) из леммы 1. Действительно, согласно сделанным предположениям в $H = G$ нет разделяющих 4- и 5-циклов. Если в G имеется 4-грань $f = (a, v_2, v_3, v_4)$, то по свойству (G5) существует и разделяющий 5-цикл (v_2, u, w, v_4, v_3). Противоречие.

Определение 2. Пусть $v \in V(H)$. Назовем вершину v *граничной* (в H), если $v \in C$, и *внутренней* в противном случае. Очевидно, что если v — внутренняя вершина, то $d_H(v) = d_G(v)$. Назовем вершину $v \in V(H)$ *незначимой*, если $C \neq \varnothing$ и $v \notin N(C)$, и *значимой* в противном случае. Заметим, что при $C = \varnothing$ все вершины мультиграфа $H = G$ являются внутренними и значимыми.

Предложение. *Если в мультиграфе G при отождествлении вершин u, v из H образы выделенных вершин становятся смежными, то вершины u, v — значимые и одна из них — выделенная.*

Доказательство. Очевидно, что одна из вершин u или v — выделенная, а другая смежна со второй выделенной вершиной. Пусть для определенности $u = a$ и вершина v смежна с b. Если $C = \varnothing$, то по определению вершины u и v — значимые. Предположим, что $C \neq \varnothing$. Тогда $b \in V(H) \cup N(C)$ и по свойству (H4) вершина $u = a$ значимая. Из смежности вершин v и b и свойства (H5) следует, что вершина v также является значимой. Предложение доказано.

Докажем следующие свойства подграфа H.

(H6) *В подграфе H любая внутренняя вершина $v \in V(H)$ смежна не более чем с одной граничной вершиной, никакие две вершины степени 2 не смежны в H. В H имеется не менее двух граничных вершин степени не менее 3.*

Доказательство. Если в H внутренняя вершина v смежна с двумя различными граничными вершинами, то из условия $r(f_C) \leqslant 5$ следует, что в H имеется цикл $C' \neq C$ длины не более 4, что противоречит свойству (H2) и условию $g(G) > 3$. Если x и y — две смежные 2-вершины в H, то согласно свойству (G3) они являются граничными. Тогда в H существует 5-грань (z_1, x, y, z_2, v), в которой вершина v — внутренняя и смежна с граничными вершинами z_1 и z_2, что противоречит ранее доказанному. Третье утверждение в (H6) является следствием доказанного второго утверждения. Свойство (H6) доказано.

Пусть $W \subset V(H)$ — произвольное множество вершин в H. Положим $d_H(W) = \sum\limits_{v \in W} d_H(v)$.

(H7) *Пусть $z', z'' \in C$, $d_H(z') \geqslant 3$, $d_H(z'') \geqslant 3$, $W' = C \setminus \{z'\}$, $W'' = C \setminus \{z', z''\}$. Тогда*

а) *если $r(f_C) = 4$, то* $d_H(C) \geqslant 12,\ d_H(W') \geqslant 9,\ d_H(W'') \geqslant 6,$ (1)

б) *если $r(f_C) = 5$, то* $d_H(C) \geqslant 14,\ d_H(W') \geqslant 10,\ d_H(W'') \geqslant 7.$ (2)

Доказательство. а) Пусть $r(f_C) = 4$ и $f_C = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Достаточно доказать, что $d_H(z_i) \geqslant 3$ при $i = 1, \ldots, 4$. Предположим, напротив, что $d_H(z_1) = 2$. В подграфе H рассмотрим грань $f = (z_1, z_2, v_1, v_2, z_4) \neq f_C$, инцидентную вершине z_1. Из отсутствия в H 4-циклов, отличных от C, следует, что вершины v_1 и v_2 являются внутренними, а из отсутствия 3-циклов и разделяющих 5-циклов, — что $d_H(v_1) = d_H(v_2) = d_G(v_1) = d_G(v_2) = 2$. С учетом свойства (G3) это означает, что $\{v_1, v_2\} = \{a, b\}$. Противоречие с условием $ab \in E(G)$.

б) Пусть $r(f_C) = 5$ и $f_C = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$. Согласно свойству (H6) в граничном цикле C имеется не более двух вершин степени 2. Следовательно, выполняются последние два неравенства в (2). Остается доказать, что $d_H(C) \geqslant 14$. Если число 2-вершин в C не превосходит 1,

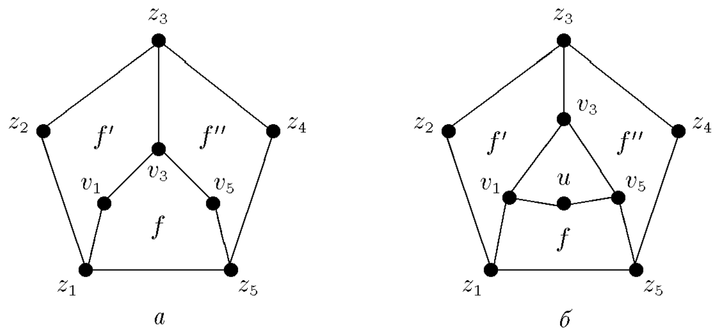


Рис. 10

то $d_H(C) \geqslant 2 + 4 \cdot 3 = 14$. Пусть в H имеются в точности две граничные вершины z_2 и z_4 степени 2 ($d_H(z_2) = d_H(z_4) = 2$). Докажем, что по крайней мере одна вершина z_1, z_3 или z_5 имеет степень не менее 4 в H, т. е. $d_H(C) \geqslant 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 14$. Предположим, что $d_H(z_1) = d_H(z_3) = d_H(z_5) = 3$. Обозначим через v_1, v_3 и v_5 внутренние вершины, смежные с вершинами z_1, z_3 и z_5 соответственно. Рассмотрим в H грани $f' = (z_1, z_2, z_3, v_3, v_1)$, $f'' = (z_5, z_4, z_3, v_3, v_5)$ и 5-грань $f \neq f_C$, инцидентную ребру z_1z_5 (рис. 10). Если грань f ограничена циклом $(z_1, v_1, v_3, v_5, z_5)$, то в H имеются две внутренние 2-вершины v_1 и v_5 (рис. 10, *а*), что противоречит свойствам (G3) и (H5). Если же $f = (z_1, v_1, u, v_5, z_5)$, где $u \neq v_3$, то в H имеется 4-цикл (u, v_1, v_3, v_5) (рис. 10, *б*), что противоречит (H2). Свойство (H7) доказано.

3. Слабые 5-грани и их свойства

Пусть $f = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \neq f_C$ — некоторая 5-грань в H.

Определение 3. Назовем f *слабой* 5-гранью, если f инцидентна не менее четырем внутренним невыделенным вершинам степени 3.

Определение 4. Назовем f *специальной гранью* со *специальным ребром* v_3v_4, если $d_H(v_1) = 2$, а вершины v_3, v_4 имеют степень 3, являются внутренними и невыделенными. При этом вершину v_1 будем называть *специальной вершиной*.

Замечание. Из свойства (G3) следует, что специальная вершина в H может быть либо граничной, либо внутренней и выделенной.

Пусть $f = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ — слабая 5-грань, v_1, v_2, v_3, v_4 — внутренние невыделенные 3-вершины. Обозначим через f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 5-грани мультиграфа H, отличные от f и инцидентные ребрам v_5v_1, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 и v_4v_5 соответственно. Обозначим через w_i при $i = 1, \ldots, 4$ вершину в H, смежную с v_i и не инцидентную грани f (такая вершина w_i существует и единственна в силу условий $d(v_i) = 3$ и $g(G) > 3$). Пусть

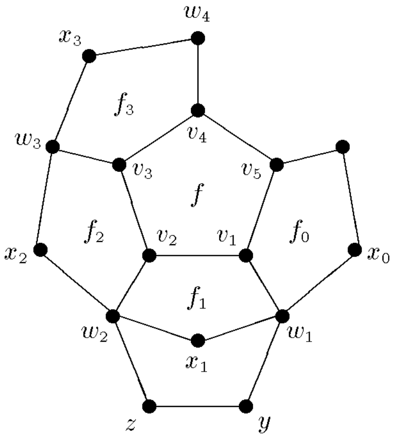


Рис. 11

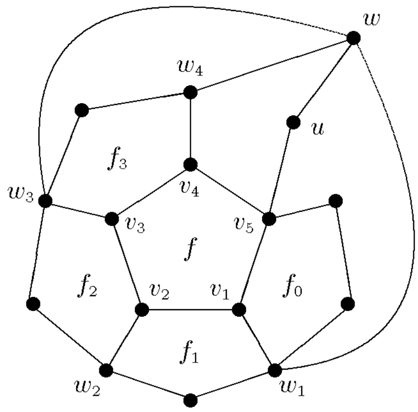


Рис. 12

$f_1 = (v_1, w_1, x_1, w_2, v_2), f_2 = (v_2, w_2, x_2, w_3, v_3)$ и $f_3 = (v_3, w_3, x_3, w_4, v_4)$ (рис. 11).

Лемма 2. *В описанных условиях выполняется одно из двух утверждений:*

(i) *одна из вершин w_1, w_2, w_3, v_5 — выделенная и значимая;*

(ii) *одна из граней f_1 или f_2 — специальная со специальным ребром v_1v_2 (соответственно v_2v_3).*

Доказательство. Предположим, что утверждения (i) и (ii) не верны. Положим $G' = G - \{v_1, v_2, v_3\}$. Согласно предложению при отождествлении вершин w_1, w_2 или w_2, w_3 или w_1, v_4 или w_3, v_5 в подграфе G' образы выделенных вершин не становятся смежными (так как утверждение (i) леммы не верно).

Из условия $g(G) > 3$ следует, что при отождествлении вершин w_1, w_2 или w_2, w_3 в G' не образуются петли. Докажем, что при отождествлении этих пар вершин не образуются 3-циклы. Допустим, что при отождествлении в G' вершин w_1 и w_2 образуется 3-цикл. Тогда в мультиграфе G имеется цепь $w_1\,y\,z\,w_2$, причем можно считать, что в области мультиграфа G, ограниченной циклом (w_1, y, z, w_2, x_1) и не содержащей вершин v_1 и v_2 (будем считать эту область внутренней), нет цепей длины 3, соединяющих вершины w_1 и w_2 (рис. 11).

Если вершины y и z принадлежат подграфу H, то цикл (w_1, y, z, w_2, x_1) ограничивает 5-грань в H (так как в H нет разделяющих 5-циклов). В этом случае $d(x_1) = 2$, откуда следует, что грань f_1 является специальной со специальным ребром v_1v_2.

Допустим, что $y \notin V(H)$ (случай, когда $z \notin V(H)$, рассматривается аналогично). Так как вершины v_1 и v_2 — внутренние в H,

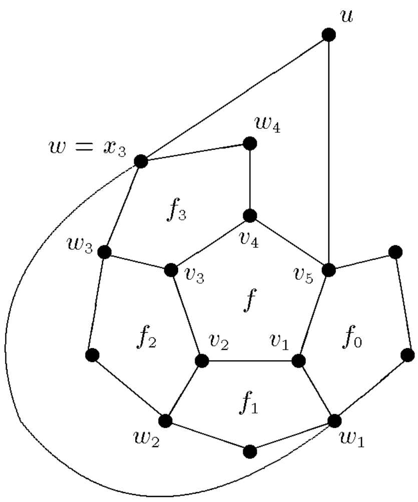


Рис. 13

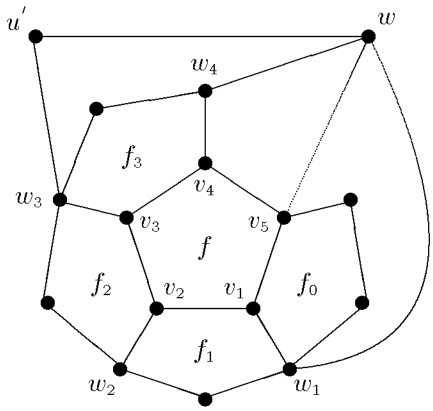


Рис. 14

то $w_1 \in C$ и $\{w_2, z\} \cap C \neq \varnothing$. Обозначим через P_1 и P_2 цепи, составляющие цикл C и расположенные во внутренней и внешней областях цикла (w_1, y, z, w_2, x_1) соответственно. Если $P_1 = w_1\, x_1\, w_2$, то вершина x_1, грань f_1 и ребро $v_1 v_2$ — специальные. Пусть $P_1 \neq w_1\, x_1\, w_2$. Если концами цепи P_1 являются вершины w_1 и w_2, то определим цикл C' заменой в цикле C цепи P_1 на цепь $w_1\, x_1\, w_2$, т. е. положим $C' = (w_1, x_1, w_2, P_2)$. Если же концами цепи P_1 служат вершины w_1 и z, то заменим в C цепь P_1 на цепь $w_1\, x_1\, w_2\, z$, т. е. положим $C' = (w_1, x_1, w_2, z, P_2)$. В обоих случаях из способа выбора цепи $w_1\, y\, z\, w_2$ следует, что определенный таким образом цикл C' имеет длину не более 5 и является разделяющим в H (так как он вложен в C), что противоречит свойству (H1). Значит, при отождествлении в G' вершин w_1 и w_2 (аналогично w_2 и w_3) не образуются петли и 3-циклы.

Заметим, что при отождествлении в G' как вершин w_1, v_4 так и вершин w_3, v_5 не образуются петли, иначе в H должен существовать один из разделяющих 5-циклов $(w_1, v_1, v_2, v_3, v_4)$ или $(w_3, v_3, v_2, v_1, v_5)$. Докажем, что при отождествлении в G' хотя бы одной пары вершин $\{w_1, v_4\}$ или $\{w_3, v_5\}$ не образуются 3-циклы. Действительно, в противном случае в G' имеется цепь $w_1\, w\, w_4\, v_4$, где $w \notin \{w_2, x_2, w_3\}$, и либо цепь $w_3\, w\, u\, v_5$ (рис. 12, 13), либо цепь $w_3\, u'\, w\, v_5$ (рис. 14).

Рассмотрим первый случай. Если $w \neq x_3$ (см. рис. 12), то 5-цикл (w_3, w, w_4, v_4, v_3) — разделяющий в G. Так как все вершины этого цикла, кроме w, принадлежат подграфу H, то $w \notin V(H)$. Отсюда следует, что $\{w_1, w_3, w_4\} \subset C$ и $\{v_5, u\} \cap C \neq \varnothing$. Обозначим через z граничную вершину в множестве $\{v_5, u\}$. Из отсутствия в H циклов длины 3 и 4

(отличных от C) следует, что w_1z, zw_4, $w_4w_3 \notin E(G)$. Это противоречит условию $r(f_C) \leqslant 5$.

Рассмотрим случай, когда $w = x_3$ (см. рис. 13). В этом случае в G имеется разделяющий 5-цикл (v_1, w_1, x_3, u, v_5), в котором все вершины, кроме u, принадлежат подграфу H. Следовательно, $u \notin V(H)$ и $\{x_3, v_5\} \subset C$. Рассмотрим цепи P_1 и P_2, на которые цикл C делится вершинами x_3 и v_5. Если какая-то цепь P_i имеет длину 1 (вершины x_3 и v_5 смежны), то в G имеется 3-цикл (u, x_3, v_5). Если длина цепи P_i равна 2, т. е. $P_i = x_3zv_5$, то в H имеется разделяющий 5-цикл (v_1, w_1, x_3, z, v_5). Следовательно, длина каждой цепи P_i $(i = 1, 2)$ не меньше 3, что противоречит условию $r(f_C) \leqslant 5$.

Теперь предположим, что в подграфе G' имеется цепь $w_3\, u'\, w\, v_5$ (см. рис. 14). Тогда в разделяющем 4-цикле (w_1, w, v_5, v_1) вершины w_1, v_1 и v_5 принадлежат подграфу H. Следовательно, $w \notin V(H), \{v_5, w_1, w_4\} \subset C$ и $\{w_3, u'\} \cap C \neq \varnothing$. Обозначая через z граничную вершину в множестве $\{w_3, u'\}$ и учитывая, что w_1v_5, v_5w_4, $w_4z \notin E(G)$, снова получаем противоречие с условием $r(f_C) \leqslant 5$.

Итак, доказано, что при отождествлении в G' одной из пар вершин $\{w_1, v_4\}$ или $\{w_3, v_5\}$ не образуются петли и 3-циклы. Осуществим это отождествление, дополняя его в первом случае отождествлением вершин w_2 и w_3, а во втором — w_1 и w_2. В результате образы вершин a и b не станут смежными (как было доказано выше). Поэтому в полученном мультиграфе они согласованы, следовательно, вершины a и b согласованы в G'. Воспользуемся соответствующей раскраской подграфа G' для получения раскраски мультиграфа G. Раскрасим вершины v_1, v_2 и v_3. Возможны следующие случаи, отвечающие двум вариантам отождествлений в G'.

Случай 1. Вершины w_2 и w_3 окрашены цветом α, а вершины w_1, v_4 — цветом β. Если $\alpha = \beta$, то вершины окрасим в порядке v_1, v_2, v_3. Если $\alpha \neq \beta$, то вершину v_2 красим в цвет β, а затем раскрашиваем вершины v_1 и v_3.

Случай 2. Вершины w_1 и w_2 окрашены цветом α, а вершины w_3, v_5 — цветом β. Если $\alpha = \beta$, осуществляем раскраску в порядке v_3, v_2, v_1. Если $\alpha \neq \beta$, то вершину v_2 красим в цвет β, а затем раскрашиваем v_1 и v_3. Лемма 2 доказана.

4. Применение формулы Эйлера

Запишем формулу Эйлера для мультиграфа H в виде

$$\sum_{v \in V(H)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(H)} (r(f) - 4) = -8. \tag{3}$$

Число $\mu(f) = r(f) - 4$ назовем (начальным) *зарядом грани* $f \in F(H)$, а число $\mu(v) = d(v) - 4$ — (начальным) *зарядом вершины* $v \in V(H)$. Положим $V = V(H)$ и $F = F(H)$. Тогда (3) можно переписать в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu(x) = -8. \tag{4}$$

Перераспределим заряды между вершинами и гранями из H, не меняя их суммы, по следующим правилам.

П1. Пусть $f \neq f_C$ является 5-гранью в H. Тогда грань f передает заряд 1/3 инцидентной внутренней невыделенной 3-вершине v, если v не смежна с выделенными значимыми вершинами, которые не инцидентны грани f. Кроме того, грань f передает заряд 1/3 каждой инцидентной граничной 2-вершине (рис. 15).

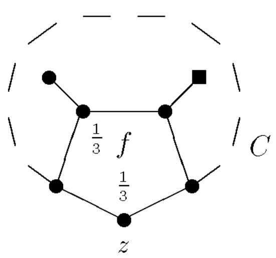


Рис. 15

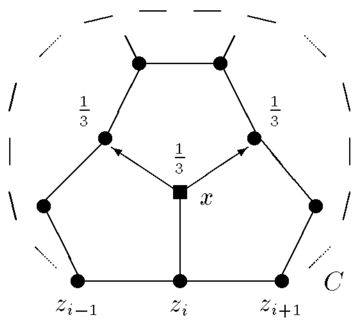


Рис. 16

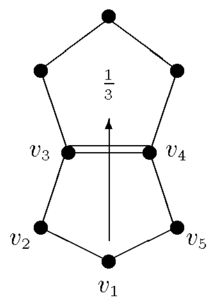


Рис. 17

П2. Пусть x — выделенная и значимая вершина в H. Тогда вершина x передает заряд 1/3 каждой инцидентной слабой 5-грани и каждой смежной внутренней невыделенной 3-вершине (рис. 16).

П3. Пусть $f = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ — специальная грань со специальной вершиной v_1 и специальным ребром v_3v_4. Тогда вершина v_1 (помимо передач по правилу П2) передает заряд 1/3 грани $f' \neq f$, инцидентной ребру v_3v_4 (рис. 17).

Заметим, что специальная вершина v в зависимости от числа инцидентных ей специальных граней может совершать от одной до двух передач заряда по правилу П3. Обозначим через $\mu'(x)$ заряд элемента $x \in V \cup F$ после применения правил П1–П3. Очевидно, что

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) = \sum_{x \in V \cup F} \mu(x). \tag{5}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 убедимся в справедливости неравенства

$$\sum_{x\in V\cup F} \mu'(x) > -8, \tag{6}$$

которое противоречит (4) и (5).

Лемма 3. *Для любой грани $f \in F$ и любой внутренней невыделенной вершины $v \in V$ выполняются неравенства $\mu'(f) \geqslant 0$ и $\mu'(v) \geqslant 0$.*

Доказательство. Так как $r(f_C) \geqslant 4$ и заряд грани f_C не меняется при применении правил П1–П3, то $\mu'(f_C) = \mu(f_C) \geqslant 0$. Пусть $f \neq f_C$. Тогда из свойств (G4) и (H2) следует, что $r(f) = 5$, следовательно, $\mu(f) = 1$. Если грань f инцидентна не более чем трем внутренним невыделенным 3-вершинам, то из правила П1 следует, что $\mu'(f) \geqslant 0$. Пусть грань f инцидентна в точности четырем внутренним невыделенным 3-вершинам v_1, v_2, v_3, v_4 (в этом случае f является слабой 5-гранью). Тогда из леммы 2 и правил П1–П3 следует, что f либо не передает заряд какой-то вершине v_i $(i = 1, \ldots, 4)$, либо получает заряд 1/3 через специальное ребро по правилу П3, либо получает заряд от вершины v_5 по правилу П2. Во всех случаях имеем $\mu'(f) \geqslant 0$. Наконец, пусть грань f инцидентна пяти внутренним невыделенным 3-вершинам. Тогда из леммы 2 и правил П1 и П3 следует, что грань f либо не передает заряд двум инцидентным вершинам, либо не передает заряд одной инцидентной вершине и получает заряд 1/3 через специальное ребро, либо передает заряд всем пяти инцидентным вершинам, но получает заряд $2\times 1/3$ через два специальных ребра. В этом случае снова имеем $\mu'(f) \geqslant 0$.

Пусть $v \in V$ — внутренняя невыделенная вершина. Тогда $d(v) \geqslant 3$ согласно свойству (G3). Если $d(v) > 3$, то из правил П1–П3 следует, что $\mu'(v) = \mu(v) \geqslant 0$. Если $d(v) = 3$ (т. е. $\mu(v) = -1$), то вершина v получает заряд либо от трех инцидентных граней по правилу П1, либо от двух инцидентных граней и смежной выделенной значимой вершины по правилам П1 и П2, либо от одной инцидентной грани и двух смежных выделенных значимых вершин. Во всех случаях имеем $\mu'(v) \geqslant 0$. Лемма 3 доказана.

Для доказательства неравенства (6) рассмотрим два случая.

Случай 1. $C = \varnothing$; $H = G$. Все вершины в G являются внутренними и значимыми. Согласно лемме 3 неравенство $\mu'(x) < 0$ может выполняться только при $x \in \{a, b\}$. Из правил П2 и П3 следует, что $\mu'(x) \geqslant d(x) - 4 - \frac{2}{3}\cdot d(x) = d(x)/3 - 4 \geqslant -3$ при $d(x) \geqslant 3$ и $\mu'(x) \geqslant -2-6\cdot\frac{1}{3} = -4$ при $d(x) = 2$, причем $\mu'(x) = -4$ только когда x — специальная 2-вершина, осуществляющая передачи двум смежным 3-вершинам, двум инцидентным слабым 5-граням по правилу П2 и двум граням через специальные ребра по правилу П3. Если для x нарушено хотя бы одно из

перечисленных условий, то $\mu'(x) > -4$. Следовательно, неравенство (6) выполняется.

Пусть $x = a$ — специальная 2-вершина и $\mu'(a) = -4$. Тогда по доказанному вершина a инцидентна двум слабым 5-граням (a, v_2, v_3, v_4, v_5) и $(a, v_2, v_3', v_4', v_5)$. При этом все вершины 6-цикла $S = (v_2, v_3, v_4, v_5, v_4', v_3')$ являются невыделенными вершинами степени 3.

Рассмотрим 3-раскраску φ вершин подграфа $G - S$ с условиями $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$. Каждая вершина $v \in S$ смежна в точности с одной (уже окрашенной) вершиной w из $G - S$. Поэтому цвет $\varphi(w)$ не может использоваться для раскраски вершины u. Следовательно, имеются в точности два цвета из множества $\{1, 2, 3\}$, которыми может быть окрашена вершина v в S. Таким образом, задана система списков (предписание) мощности 2 для раскраски вершин из S. Остается заметить, что согласно теореме о предписанной 2-раскрашиваемости четных циклов вершины 6-цикла S могут быть правильно окрашены таким образом, что цвет каждой вершины принадлежит предписанию этой вершины.

Случай 2. $C \neq \varnothing$. Согласно свойству (H5) в H имеется не более одной внутренней выделенной вершины (будем считать, что это вершина a). Из леммы 3 следует, что неравенство $\mu'(x) < 0$ может выполняться только при $x \in C \cup \{a\}$. Кроме того, $\mu'(f_C) = \mu(f_C) = r(f_C) - 4$. Поэтому

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) \geqslant \begin{cases} \sum\limits_{z \in C} \mu'(z) + \mu'(a) + r(f_C) - 4, & \text{если } a \in V \setminus C, \qquad (7) \\ \sum\limits_{z \in C} \mu'(z) + r(f_C) - 4, & \text{если } a \notin V \setminus C. \qquad (8) \end{cases}$$

Оценим снизу сумму зарядов граничных вершин в H. Обозначим через Q множество всех граничных выделенных вершин степени не менее 3 и положим $W = C \setminus Q$. Тогда $|Q| \leqslant 2$ и $|Q| + |W| = r(f_C)$. Если $z \in W$ и $d_H(z) \geqslant 3$, то согласно правилам П1–П3 заряд вершины z не меняется, т. е. $\mu'(z) = \mu(z)$. Если $z \in W$ — граничная 2-вершина, передающая заряд 1/3 по правилу П3, то z получает заряд 1/3 от инцидентной грани по правилу П1. Следовательно, $\mu'(z) \geqslant \mu(z)$ при $z \in W$. Поэтому

$$\sum_{z \in W} \mu'(z) \geqslant \sum_{z \in W} \mu(z) = d_H(W) - 4|W|. \tag{9}$$

Пусть $z \in Q$. Тогда вершина z передает заряд по правилу П2 не более чем $(d_H(z)-2)$ внутренним невыделенным 3-вершинам и $(d_H(z)-3)$ слабым 5-граням. Следовательно, $\mu'(z) \geqslant d_H(z) - 4 - \frac{1}{3}(d_H(z) - 2) - \frac{1}{3}(d_H(z) - 3) = (d_H(z) - 7)/3 \geqslant -4/3$ при $z \in Q$. Отсюда и из (9) следует

$$\sum_{z \in C} \mu'(z) = \sum_{z \in Q} \mu'(z) + \sum_{z \in W} \mu'(z) \geqslant -\tfrac{4}{3}|Q| + d_H(W) - 4|W|. \tag{10}$$

Если $r(f_C) = 4$, то, используя (10) и оценку для $d_H(W)$ из (1), получаем

$$\sum_{z \in C} \mu'(z) \geqslant \begin{cases} 0 + 12 - 4 \cdot 4 = -4, & \text{если } Q = \varnothing, \quad (11) \\ -4/3 + 9 - 4 \cdot 3 = -13/3, & \text{если } |Q| = 1, \quad (12) \\ 2 \cdot (-4/3) + 6 - 4 \cdot 2 = -14/3, & \text{если } |Q| = 2. \quad (13) \end{cases}$$

Если $r(f_C) = 5$, то из (10) и (2) аналогично следует, что

$$\sum_{z \in C} \mu'(z) \geqslant \begin{cases} 0 + 14 - 4 \cdot 5 = -6, & \text{если } Q = \varnothing, \quad (14) \\ -4/3 + 10 - 4 \cdot 4 = -22/3, & \text{если } |Q| = 1, \quad (15) \\ 2 \cdot (-4/3) + 7 - 4 \cdot 3 = -23/3, & \text{если } |Q| = 2. \quad (16) \end{cases}$$

Если $a \notin V \setminus C$, то из неравенств (8) и (11)–(16) следует, что

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) \geqslant \begin{cases} -14/3 + 0 > -8, & \text{если } r(f_C) = 4, \\ -23/3 + 1 > -8, & \text{если } r(f_C) = 5, \end{cases}$$

т. е. неравенство (6) выполняется.

Пусть вершина a — внутренняя в H, т. е. $a \in V \setminus C$. Тогда согласно (H3) имеем $b \notin V$ и $Q = \varnothing$. Следовательно, выполняются неравенства (11) и (14) для $\sum\limits_{z \in C} \mu'(z)$. Если вершина a — незначимая, т. е. $a \in V \setminus N(C)$, то она не передает заряд по правилу П2 и делает не более двух передач заряда по правилу П3 (что возможно только при $d(a) = 2$). В этом случае $\mu'(a) \geqslant -2 - 2/3 = -8/3$ и из неравенств (7), (11) и (14) следует, что

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) \geqslant \begin{cases} -4 - 8/3 + 0 > -8, & \text{если } r(f_C) = 4, \quad (17) \\ -6 - 8/3 + 1 > -8, & \text{если } r(f_C) = 5. \quad (18) \end{cases}$$

Предположим, что вершина a — внутренняя и $a \in N(C)$. Тогда в H имеется граничная вершина z_0 степени не менее 3, смежная с вершиной a. Если $d_H(a) \geqslant 3$, то a не является специальной вершиной. В этом случае она не передает заряд по правилу П3 и делает не более $(d_H(a)-1)$ передач заряда смежным внутренним 3-вершинам и не более $(d_H(a)-2)$ передач заряда инцидентным слабым 5-граням по правилу П2 (так как грани, инцидентные ребру az_0, не являются слабыми). Следовательно, $\mu'(a) \geqslant d_H(a) - 4 - \frac{1}{3}(d_H(a)-1) - \frac{1}{3}(d_H(a)-2) = (d_H(a)-9)/3 \geqslant -2 > -8/3$, что доказывает неравенства (17) и (18).

Пусть $d_H(a) = 2$. Теперь вершина a может быть специальной, но не инцидентной слабым 5-граням, так как каждая инцидентная ей грань инцидентна также граничной вершине z_0. Поэтому вершина a передает заряд не более чем одной смежной внутренней 3-вершине по правилу П2

и делает не более двух передач заряда по правилу П3. Отсюда следует, что

$$\mu'(a) \geqslant -2 - \tfrac{1}{3} \cdot 3 = -3, \qquad (19)$$

причем равенство в (19) достигается, только если вершина a инцидентна двум специальным граням. В этом случае $d_H(z_0) \geqslant 5$, иначе хотя бы одна грань, инцидентная вершине a, смежна с гранью f_C и не является специальной. Если $r(f_C) = 4$, то, применяя неравенства (7), (11) и (19), получаем

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) \geqslant -4 - 3 + 0 > -8.$$

Пусть $r(f_C) = 5$. Если $\mu'(a) > -3$, то из (7) и (14) следует, что

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) > -6 - 3 + 1 = -8.$$

Если же $\mu'(a) = -3$ и $d_H(z_0) \geqslant 5$, то положим $W' = C \setminus \{z_0\}$ и воспользуемся вторым неравенством из (2). Получим $d_H(C) = d_H(z_0) + d_H(W') \geqslant 5 + 10 = 15$. Отсюда и из неравенства (9) при $W = C$ следует, что

$$\sum_{z \in C} \mu'(z) \geqslant 15 - 4 \cdot 5 \geqslant -5.$$

Применяя (7), получаем

$$\sum_{x \in V \cup F} \mu'(x) \geqslant -5 - 3 + 1 > -8.$$

Это доказывает справедливость неравенства (6). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксенов В. А.** О продолжении 3-раскраски на плоских графах // Дискретный анализ: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. Вып. 26. С. 3–19.

2. **Аксенов В. А.** Хроматически связные вершины в плоских графах // Методы дискретного анализа в теории управляющих систем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. Вып. 31. С. 5–16.

3. **Borodin O. V.** A new proof of Grünbaum's 3 color theorem // Discrete Math. 1997. V. 169, N 1–3. P. 177–183.

4. **Grötzsch H.** Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel // Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.-Natur. Reihe. 1959. V. 8, N 1. S. 109–120.

5. **Grünbaum B.** Grötzsch's theorem on 3-coloring // Michigan Math. J. 1963. V. 10, N 3. P. 303–310.

6. **Jensen T. R., Thomassen C.** The color space of a graph // J. Graph Theory. 2000. V. 34, N 3. P. 234–245.

Адреса авторов:

В. А. Аксенов
Новосибирский
государственный университет,
ул. Пирогова, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
О. В. Бородин, А. Н. Глебов
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: borodin@math.nsc.ru,
angle@math.nsc.ru

Статья поступила
21 ноября 2001 г.