ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2002. Серия 1. Том 9, № 1, 27–41

УДК 519.174

# ДВУДОЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА В ЗАДАЧАХ РАСКРАСКИ ИНЦИДЕНТОРОВ*)

*В. Г. Визинг*

Ориентированному мультиграфу $G$ ставится в соответствие двудольный неориентированный мультиграф $B(G)$, называемый его двудольной интерпретацией. Двудольная интерпретация $B(G)$ используется для решения задач, связанных с $p$-раскраской и $(p,q)$-раскраской инциденторов мультиграфа $G$.

## 1. Введение. Основные понятия

Под мультиграфом $G = (V, A)$, если не оговорено противное, понимается конечный ориентированный мультиграф без петель [5–7] с непустым множеством вершин $V = V(G)$ и непустым множеством дуг $A = A(G)$. Через $d(v)$, $d^+(v)$ и $d^-(v)$ обозначаются соответственно степень, полустепень исхода и полустепень захода вершины $v \in V$. Максимальные значения этих величин для мультиграфа $G$ обозначаются соответственно через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$. Если $\Delta(G) = k$, то будем говорить, что $G$ — мультиграф степени $k$. Будем обозначать через $\sigma(G)$ число, равное $\max(\Delta^+(G), \Delta^-(G))$.

Каждая дуга $a = (u, v)$ имеет два *инцидентора.* Начальным инцидентором этой дуги при вершине $u$ является упорядоченная пара $i_1(a) = (u, a)$, а конечным инцидентором при вершине $v$ — упорядоченная пара $i_2(a) = (v, a)$ . Различные инциденторы при одной и той же вершине называются *смежными.* Два инцидентора называются *однотипными,* если они оба являются либо начальными, либо конечными; в противном случае инциденторы называются *разнотипными.*

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество этих чисел обозначается через $C$. Пусть $k, l \in C$. Если $k \leqslant l$, то *интервалом* $[k, l]$ называется подмножество всех цветов $c$, удовлетворяющих неравенствам $k \leqslant c \leqslant l$; величина $l - k + 1$ называется *длиной*

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS (проект INTAS–OPEN–97–1001).

интервала. Если $k > l$, то под интервалом $[k, l]$ понимается пустое множество; длина такого интервала считается равной нулю.

*Раскраска* какого-либо множества инциденторов — это отображение его в $C$. Раскраска инциденторов называется *правильной,* если смежные инциденторы окрашиваются различно. Пусть $p$ и $q$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant p \leqslant q$. Правильная раскраска $\varphi$ инциденторов называется *$(p, q)$-раскраской* (*$p$-раскраской*), если для любой дуги $a$ с раскрашенными начальным $i_1$ и конечным $i_2$ инциденторами выполняются неравенства $p \leqslant \varphi(i_2) - \varphi(i_1) \leqslant q$ (выполняется неравенство $p \leqslant \varphi(i_2) - \varphi(i_1)$). Будем обозначать через $\chi(p, q, G)$ (через $\chi(p, \infty, G)$) наименьшее натуральное $k$, при котором существует $(p, q)$-раскраска ($p$-раскраска) всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1, k]$.

Раскраска инциденторов называется *интервальной,* если для каждой вершины множество цветов, использованных для раскраски инциденторов при этой вершине, образует интервал. Наименьшее натуральное $k$ такое, что существует правильная интервальная $p$-раскраска всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1, k]$, обозначается через $\gamma(p, G)$.

Пусть имеется раскраска инциденторов и вершин мультиграфа. Она называется *тотальной $p$-раскраской,* если вершины раскрашены правильно, инциденторы $p$-раскрашены и любая вершина окрашена в цвет, отличный от цветов всех инциденторов при ней. Наименьшее натуральное $k$ такое, что существует тотальная $p$-раскраска всех вершин и инциденторов мультиграфа $G$ цветами из интервала $[1, k]$, обозначается через $\tau(p, G)$.

Раскраска инциденторов называется *полуправильной,* если смежные однотипные инциденторы окрашиваются различно. Очевидным образом определяются понятия полуправильных $p$-раскраски, $(p, q)$-раскраски, интервальной и тотальной $p$-раскрасок. Соответствующие числовые характеристики мультиграфа $G$ обозначаются через $h\chi(p, \infty, G)$, $h\chi(p, q, G)$, $h\gamma(p, G)$, $h\tau(p, G)$.

Заметим, что раскраску дуг мультиграфа можно рассматривать как (0,0)-раскраску инциденторов. Если эта (0,0)-раскраска является полуправильной, то раскраску дуг будем называть полуправильной.

Пусть имеется раскраска инциденторов и вершин мультиграфа $G$ с использованием цветов, принадлежащих конечному множеству $C_1 \subseteq C$. Будем говорить, что цвет $c \in C_1$ *присутствует* в вершине $v$, если в этот цвет окрашена либо сама вершина, либо какой-либо инцидентор при ней. В противном случае цвет $c$ называется *отсутствующим* в вершине $v$.

Введем понятие монотонной перекраски инциденторов. Пусть имеются раскраски $\varphi$ и $\psi$ некоторого множества $S$ инциденторов. Переход от раскраски $\varphi$ к раскраске $\psi$ будем называть *монотонной перекраской,* если для любых $i', i'' \in S$ таких, что $\varphi(i') < \varphi(i'')$, выполняется неравенство $\psi(i') < \psi(i'')$. Очевидно, что в результате монотонной перекраски различно окрашенные инциденторы остаются различно окрашенными.

Мультиграф $F = (V, A_1)$ мы называем 2-*фактором* мультиграфа $G = (V, A)$, если $A_1 \subseteq A$ и $\Delta(F) \leqslant 2$. Если степень каждой вершины фактора равна 2, то он называется *однородным* 2-*фактором.* Теорема Петерсена [15] утверждает, что любой однородный мультиграф четной степени $2k$ ($k \geqslant 1$) разбивается на $k$ однородных 2-факторов. Из теоремы Петерсена вытекает следующее утверждение: любой (не обязательно однородный) мультиграф четной степени $2k$ разбивается на $k$ 2-факторов. Именно это более общее утверждение будем называть теоремой Петерсена.

Будем говорить, что 2-фактор $F$ *касается* вершины $v$, если степень этой вершины в факторе не меньше 1. Если степень вершины $v$ в факторе равна 2, то будем говорить, что $F$ *насыщает* вершину $v$. Из теоремы Петерсена следует, что любой мультиграф четной степени $\Delta \geqslant 2$ имеет 2-фактор, касающийся всех вершин степени не меньше $\Delta - 1$ и насыщающий все вершины степени $\Delta$.

2-фактор $F$ называется *линейным фактором,* если $\sigma(F) = 1$.

Введем, наконец, понятие двудольной интерпретации мультиграфа $G$. Двудольный неориентированный мультиграф $B(G) = (X, Y, E)$, где $X$ и $Y$ — множества вершин соответственно первой и второй долей, $E$ — множество ребер, называется *двудольной интерпретацией* мультиграфа $G = (V, A)$, если выполняются следующие условия:

a) $|X| = |Y| = |V|$ и существуют 1-1 отображения $f_1 : V \to X$ и $f_2 : V \to Y$;

b) $|E| = |A|$, причем каждой дуге $a = (u, v) \in A$ взаимно однозначным образом соответствует ребро $e \in E$, инцидентное вершинам $f_1(u)$ и $f_2(v)$.

Вершины $f_1(v)$ и $f_2(v)$ называются *образами* вершины $v \in V$ соответственно в первой и второй долях мультиграфа $B(G)$; вершина $v$ называется *прообразом* вершин $f_1(v)$ и $f_2(v)$. Аналогично образом дуги $(u, v) \in A$ является ребро $(f_1(v), f_2(v)) \in E$, а дуга $(u, v)$ является прообразом этого ребра.

Понятие полуправильной раскраски инциденторов было введено автором в [1] и вместе с двудольной интерпретацией мультиграфа использовано для получения верхней оценки $\tau(p, G) \leqslant \Delta(G) + p + 1$

и упрощения доказательства формулы Пяткина [9], касающейся вычисления $\chi(p,\infty,G)$. Однако возможности этих понятий были, к сожалению, использованы не полностью и в п. 2 настоящей работы мы в значительной мере исправляем этот недостаток. Здесь же указывается принципиальная возможность использования полуправильной раскраски в задаче интервальной раскраски инциденторов, которая рассмотрена в [2].

В п. 3 двудольная интерпретация мультиграфа применяется для выявления линейных факторов. Центральный результат состоит в том, что любой мультиграф содержит линейный фактор, касающийся всех вершин максимальной степени.

В п. 4 рассматривается $(p,q)$-раскраска инциденторов, изучение которой начато в [3]. Имеют место очевидные неравенства (при $p \leqslant q$) $\chi(p,\infty,G) \leqslant \chi(p,q,G) \leqslant \chi(p,p,G)$. Мы рассматриваем те случаи, когда эти неравенства превращаются в равенства. Главный результат состоит в том, что если $\Delta(G) = \Delta$ , то при $p \leqslant \Delta - 1$ имеет место равенство $\chi(p,\Delta-1,G) = \chi(p,\infty,G)$. В конце статьи указывается, как можно упростить и усилить некоторые результаты, полученные в [3].

## 2. Полуправильная раскраска

Вычисление числовых характеристик, связанных с правильной раскраской инциденторов, в ряде случаев сводится к вычислению аналогичных характеристик, связанных с более общей полуправильной раскраской. В настоящем разделе рассматриваются задачи, решение которых облегчается благодаря этому обстоятельству.

**Теорема 1.** *Для любого мультиграфа $G$ с $\Delta(G) = \Delta$ выполняются равенства*

$$\chi(p,\infty,G) = \max(\Delta, h\chi(p,\infty,G)), \tag{1}$$
$$\gamma(p,G) = \max(\Delta, h\gamma(p,G)), \tag{2}$$
$$\tau(p,G) = \max(\Delta+1, h\tau(p,G)). \tag{3}$$

Доказательство. Докажем равенство (1). Пусть $t = \max(\Delta, h\chi(p,\infty))$. Так как правильная раскраска инциденторов является разновидностью полуправильной, то $\chi(p,\infty,G) \geqslant h\chi(p,\infty,G))$. Кроме того, очевидно, что $\chi(p,\infty,G) \geqslant \Delta$. Поэтому $\chi(p,\infty,G) \geqslant t$.

Докажем обратное неравенство. Построим полуправильную $p$-раскраску $\varphi$ всех инциденторов мультиграфа $G$ с помощью цветов из интервала $[1,t]$. Такая раскраска существует, так как $t \geqslant h\chi(p,\infty,G)$. Затем для каждой вершины $v \in V(G)$ произведем такую монотонную перекраску начальных инциденторов при $v$, чтобы при новой раскраске

цвета этих инциденторов принадлежали интервалу $[1, d^+(v)]$. При новой раскраске, как и при раскраске $\varphi$, цвета этих начальных инциденторов будут попарно различными. Аналогично монотонно перекрасим конечные инциденторы при $v$ так, чтобы их цвета попали в интервал $[t - d^-(v) + 1, t]$. После указанной перекраски инциденторов при каждой вершине мультиграфа получим новую раскраску всех инциденторов с использованием цветов из $[1, t]$. Раскраска $\psi$ является правильной, так как $t \geqslant \Delta$; она является $p$-раскраской, так как раскраска $\varphi$ была $p$-раскраской, а при перекрасках цвета начальных инциденторов не увеличивались, а цвета конечных — не уменьшались. Следовательно, $t \leqslant \chi(p, \infty, G)$. Равенство (1) доказано.

Докажем (2). Снова пусть $t = \max(\Delta, h\gamma(p, G))$. Докажем неравенство $\gamma(p, G) \leqslant t$; обратное неравенство очевидно. Пусть $\varphi$ — полуправильная интервальная раскраска всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1, t]$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ произведем перекраску инциденторов при этой вершине следующим образом. Пусть $c$ — наибольший при раскраске $\varphi$ цвет инцидентора при вершине $v$. Очевидно, что $c \leqslant t$ . Положим $r = c - d(v) + 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $r > 0$. Тогда длина интервала $[r, c]$ равна $d(v)$. Монотонно перекрасим все начальные инциденторы при $v$ так, чтобы при новой раскраске их цвета попали в интервал $[r, r + d^+(v) - 1]$. Затем монотонно перекрасим конечные инциденторы так, чтобы их цвета попали в интервал $[r + d^+(v), c]$.

Случай 2. $r \leqslant 0$. Это означает, что $c < d(v) \leqslant t$. Перекрасим монотонно начальные инциденторы при вершине $v$ так, чтобы их цвета попали в интервал $[1, d^+(v)]$, а конечные инциденторы — так, чтобы их цвета попали в интервал $[d^+(v) + 1, d(v)]$.

Легко видеть, что осуществив указанным образом перекраску инциденторов при каждой вершине мультиграфа, мы получим правильную интервальную $p$-раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$ с помощью $t$ цветов. Равенство (2) доказано.

Равенство (3) доказывается аналогично. Положим $t = \max(\Delta + 1, h\tau(p, G))$. Неравенство $\tau(p, G) \geqslant t$ очевидно. Для доказательства обратного неравенства строим полуправильную тотальную $p$-раскраску $\varphi$ всех вершин и инциденторов мультиграфа $G$ цветами из интервала $[1, t]$. Затем монотонно перекрашиваем начальные и конечные инциденторы при каждой вершине $v$ в цвета из множества $[1, t] \setminus \{\varphi(v)\}$ так, чтобы начальные инциденторы оказались окрашенными в $d^+(v)$ меньших, а конечные — в $d^-(v)$ больших цветов из этого множества. В результате получим правильную тотальную $p$-раскраску всех вершин и инциденторов

мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1, t]$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В [2] показано, что правильная интервальная $p$-раскраска всех инциденторов мультиграфа существует не всегда. Из доказательства справедливости равенства (2) видно, что интервальные правильная и полуправильная $p$-раскраски всех инциденторов мультиграфа одновременно или существуют, или не существуют.

**Теорема 2.** *Для любого мультиграфа $G = (V, A)$ справедливо равенство*

$$h\chi(p, \infty, G) = \sigma(G) + p. \tag{4}$$

Доказательство. Неравенство $h\chi(p, \infty, G) \geqslant \sigma(G) + p$ очевидно. Докажем обратное неравенство. Рассмотрим двудольную интерпретацию $B(G)$ мультиграфа $G$. Очевидно, что $\Delta(B(G)) = \sigma(G)$. По теореме Кёнига [6, 7] все ребра в $B(G)$ можно правильно раскрасить $\sigma(G)$ цветами. После такой раскраски окрасим каждую дугу мультиграфа $G$ в тот цвет, в который окрашен образ этой дуги в мультиграфе $B(G)$. Получим полуправильную 0-раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$. Увеличив на $p$ цвета всех конечных инциденторов, получим полуправильную $p$-раскраску всех инциденторов $G$ с помощью $\sigma(G) + p$ цветов. Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

**Следствие 1.** *Для любого мультиграфа $G$ справедливы равенства*

$$\chi(p, \infty, G) = \max(\Delta(G), \sigma(G) + p) = \max(\Delta(G), \Delta^+(G) + p, \Delta^-(G) + p). \tag{5}$$

При $p = 0$ эта формула была получена в [8], при $p = 1$ — в [14], при произвольном $p$ она впервые была доказана А. В. Пяткиным в [9]. Однако приведенное в [9] доказательство было достаточно сложным и существенно опиралось на случаи $p = 0$ и $p = 1$. Независимое от этих случаев довольно простое доказательство было дано в [1]. Приведенное в настоящей работе доказательство еще проще.

**Теорема 3.** *Для любого мультиграфа $G = (V, A)$ справедливо неравенство*

$$h\tau(p, G) \leqslant \Delta(G) + p + 1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \Delta(G)$. Обозначим через $D_1$ и $D_2$ множество источников и множество стоков степени $\Delta$ мультиграфа $G$ соответственно (не будем делать очевидных оговорок в тех случаях, когда какое-либо из этих множеств или оба множества пусты). Обозначим через $\varphi$ такую правильную раскраску всех вершин мультиграфа $G$ цветами из $[1, \Delta + 1]$, что вершины из $D_1$ получают цвет $\Delta + 1$, а вершины

из $D_2$ — цвет 1. Затем каждой дуге $a = (u, v) \in A$ предпишем множество цветов $S(a)$, руководствуясь следующими правилами:

1) если $u \in D_1$ и $v \in D_2$, то $S(a) = [1, \Delta + 1]$;
2) если $u \in D_1$ и $v \notin D_2$, то $S(a) = [1, \Delta + 1] \setminus \{\varphi(v)\}$;
3) если $u \notin D_1$ и $v \in D_2$, то $S(a) = [1, \Delta + 1] \setminus \{\varphi(u)\}$;
4) если $u \notin D_1$ и $v \notin D_2$ , то $S(a) = [1, \Delta + 1] \setminus \{\varphi(u)\} \setminus \{\varphi(v)\}$.

После этого рассмотрим мультиграф $B(G)$, каждому ребру которого предпишем то же множество цветов, которое предписано его прообразу в $G$. Очевидно, что $\Delta(B(G)) \leqslant \Delta$, причем если $\Delta(B(G)) = \Delta$, то степень $\Delta$ в мультиграфе $B(G)$ имеют те и только те вершины, прообразы которых принадлежат либо $D_1$, либо $D_2$. Каждому ребру мультиграфа $B(G)$, которое инцидентно хотя бы одной вершине степени $\Delta$, предписано не менее $\Delta$ цветов; остальным ребрам предписано не менее $(\Delta - 1)$ цветов.

Воспользуемся следующей теоремой из [10], обобщающей теорему Галвина [12], касающуюся раскраски ребер двудольного мультиграфа в предписанные цвета: если каждому ребру двудольного неориентированного мультиграфа предписано число цветов не меньшее, чем максимальная степень вершины, которой инцидентно это ребро, то существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа в предписанные цвета. Применив эту теорему к мультиграфу $B(G)$, можно правильно раскрасить все ребра мультиграфа $B(G)$ в предписанные цвета. Затем, окрасив каждую дугу мультиграфа $G$ в тот цвет, в который окрашен ее образ в $B(G)$, получим полуправильную 0-раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$. При этом если начальный инцидентор при вершине из $D_1$ окажется окрашенным в цвет $\Delta$+1, то перекрасим его в тот цвет из $[1, \Delta]$, который отсутствует в этой вершине. Аналогично если конечный инцидентор при вершине из $D_2$ окажется окрашенным в цвет 1, то перекрасим его в цвет из $[2, \Delta + 1]$, отсутствующий в этой вершине. В результате получим полуправильную тотальную 0-раскраску мультиграфа $G$ с использованием цветов из $[1, \Delta + 1]$. Следовательно, при $p = 0$ теорема 3 доказана.

Пусть теперь $p \geqslant 1$. Сделаем следующую перекраску конечных инциденторов при каждой вершине мультиграфа. Пусть при вершине $v \in V$ есть $k$ конечных инциденторов, цвета которых при раскраске $\psi$ равны $c_1, \ldots, c_k$, причем $c_1 < c_2 < \cdots < c_k \leqslant \Delta + 1$. Рассмотрим цвета $c_{k+1} = \Delta + 2, \ldots, c_{k+p} = \Delta + p + 1$. Каждый конечный инцидентор цвета $c_j$ окрасим в цвет $c_{j+p}$ $(j = 1, \ldots, k)$. После указанной перекраски цвет каждого конечного инцидентора мультиграфа $G$ увеличится не менее чем на $p$, и мы получим тотальную полуправильную $p$-раскраску мультиграфа $G$ с помощью цветов из интервала $[1, \Delta + p + 1]$. Следовательно,

неравенство (6) справедливо. Теорема 3 доказана.

Из теорем 1 и 3 вытекает

**Следствие 2.** *Для любого мультиграфа $G$ справедливо неравенство*

$$\tau(p, G) \leqslant \Delta(G) + p + 1. \tag{7}$$

Замечание 2. Неравенство (7) содержится в [1] и доказывается значительно сложнее. Вместе с тем в [1] высказывается гипотеза, что для любого мультиграфа $G$ справедливо неравенство

$$\tau(p, G) \leqslant \chi(p, \infty, G) + 1. \tag{8}$$

Из следствий 1 и 2 вытекает, что неравенство (8) справедливо, если $p = 0$ или $\sigma(G) = \Delta(G)$. Однако при произвольном $p \geqslant 1$ вопрос открыт. Привлекая полуправильную раскраску, вопрос можно сформулировать так: верно ли, что для любого мультиграфа $G$ всегда справедливо неравенство $h\tau(p, G) \leqslant \chi(p, \infty, G) + 1$?

Отметим, что в [4] доказано, что для неориентированных мультиграфов всегда выполняется неравенство (8) .

## 3. Линейные факторы

В этом разделе устанавливаются две теоремы о линейных факторах.

**Теорема 4.** *Любой мультиграф $G = (V, A)$ разбивается на $\sigma(G)$ линейных факторов.*

Доказательство. Рассмотрим двудольную интерпретацию $B(G)$ мультиграфа $G$. Так как $\Delta(B(G)) = \sigma(G)$, то ребра в $B(G)$ можно правильно раскрасить $\sigma(G)$ цветами. Очевидно, что дуги мультиграфа $G$, являющиеся прообразами ребер $B(G)$, окрашенных одним и тем же цветом, образуют линейный фактор мультиграфа $G$. Теорема 4 доказана.

Для доказательства второй теоремы о линейных факторах потребуются лемма и несколько дополнительных понятий.

Пусть $H = (V, E)$ — неориентированный мультиграф с множеством вершин $V$ и множеством ребер $E$. Пару $(x, y)$, элементами которой являются различные вершины мультиграфа $H$, назовем *высокой,* если $d(x) + d(y) \geqslant \Delta(H)$. Пусть $W$ — некоторое паросочетание в мультиграфе $H$. Говорят, что $W$ *насыщает* некоторую вершину, если в $W$ существует ребро, инцидентное этой вершине. Будем говорить, что $W$ *касается* пары $(x, y)$, если $W$ насыщает хотя бы один элемент этой пары.

**Лемма 1.** *Пусть $H = (V, E)$ — неориентированный мультиграф, $S$ — такое множество высоких пар без общих элементов, что подграф, порожденный элементами пар из $S$, является двудольным. Тогда существует паросочетание $W$, касающееся каждой пары из $S$.*

Доказательство. Окрестностью пары из $S$ назовем множество тех и только тех вершин мультиграфа $H$, которые смежны хотя бы с одним элементом пары. Обозначим через $R(S)$ семейство, состоящее из $|S|$ множеств, являющихся окрестностями пар из $S$. Докажем, что это семейство имеет систему различных представителей.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_k$ — произвольные $k$ множеств семейства, $M$ — их объединение. В соответствии с теоремой Холла (см. [6, 7]) нужно доказать, что $|M| \geqslant k$. Обозначим через $S_1$ подмножество пар из $S$, окрестности которых суть $R_1, R_2, \dots, R_k$. Пару из $S_1$ назовем *хорошей,* если хотя бы один ее элемент принадлежит $M$; в противном случае пару назовем *плохой.* Элементы хорошей пары будем называть *хорошими,* элементы плохой пары — *плохими.* Очевидно, что каждая плохая вершина не смежна ни с одним элементом из $S_1$. Пусть $g$ — число хороших, $b$ — число плохих пар в $S_1$, $g + b = k$. Если $b = 0$, то поскольку пары не имеют общих элементов, множество $M$ содержит не менее $g = k$ хороших вершин, т. е. $|M| \geqslant k$. Пусть теперь $b > 0$. Так как каждая плохая пара является высокой, то плохим вершинам инцидентны не менее $b * \Delta(H)$ ребер. Но степень каждой вершины мультиграфа $H$ не более $\Delta(H)$. Поэтому существует не менее $b$ вершин, отличных от элементов пар из $S_1$, которые принадлежат окрестностям плохих пар. Следовательно, $|M| \geqslant g + b = k$ и семейство $R(S)$ имеет некоторую систему $T$ различных представителей, $|T| = |S|$.

В каждой паре из $S$ выберем один элемент, смежный с представителем окрестности этой пары; выбранный элемент назовем *активным,* а одно из ребер, соединяющее активный элемент с представителем окрестности пары, назовем *существенным.* Обозначим через $E_1$ подмножество существенных ребер мультиграфа $H$. Мультиграф $F = (V, E_1)$ является 2-фактором мультиграфа $H$. Построим паросочетание в $F$, насыщающее все активные вершины.

Каждая компонента связности фактора $F$ является либо изолированной вершиной, либо цепью, либо циклом. Поскольку активные вершины не могут быть изолированными, рассмотрим только компоненты связности $F$, отличные от изолированной вершины. Если компонента содержит четное число вершин, то в ней строим паросочетание, насыщающее все вершины. Предположим, что компонента содержит нечетное число вершин. Тогда она не может быть циклом, так как цикл могут образовывать только активные вершины, но по условию они не могут образовывать циклы нечетной длины. Значит, такая компонента связности фактора $F$ с нечетным числом вершин является цепью. Легко видеть, что из двух висячих вершин цепи одна вершина активная, а другая — нет. Построим паросочетание в такой компоненте, насыщающее все

вершины, кроме висячей, не являющейся активной. Поступая так с каждой компонентой, содержащей нечетное число вершин, получим паросочетание, насыщающее все активные вершины и, следовательно, касающееся всех пар множества $S$. Лемма 1 доказана.

**Теорема 5.** *Любой мультиграф $G = (V, A)$ имеет линейный фактор, касающийся всех вершин максимальной степени.*

Доказательство. Пусть $\Delta(G) = \Delta$, $V_1$ — множество всех вершин степени $\Delta$ мультиграфа $G$. Построим двудольную интерпретацию $B(G) = (X, Y, E)$ мультиграфа $G$. Каждой вершине $v$ из $V_1$ поставим в соответствие пару вершин мультиграфа $B(G)$, составленную из образов вершины $v$. Множество таких пар обозначим через $S$. Так как $\Delta(B(G)) \leqslant \Delta$, то каждая пара из $S$ будет высокой в мультиграфе $B(G)$. По лемме 1 в $B(G)$ существует паросочетание $W$, касающееся каждой пары из $S$. Обозначим через $U$ множество дуг мультиграфа $G$, являющихся прообразами дуг из $W$. Мультиграф $F = (V, U)$ является линейным фактором мультиграфа $G$, касающимся каждой вершины из $V_1$. Теорема 5 доказана.

Из теоремы Петерсена и теоремы 5 вытекает

**Следствие 3.** *Любой мультиграф нечетной степени $2k + 1$ $(k \leqslant 1)$ разбивается на $(k + 1)$ 2-факторов, по меньшей мере один из которых является линейным.*

## 4. $(p, q)$-раскраска инциденторов мультиграфа

Для любого мультиграфа $G$ при любых $p$ и $q$ таких, что $0 \leqslant p \leqslant q$, справедливы неравенства $\chi(p, \infty, G) \leqslant \chi(p, q, G) \leqslant \chi(p, p, G)$. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях выполняются равенства $\chi(p, p, G) = \chi(p, \infty, G)$ и $\chi(p, q, G) = \chi(p, \infty, G)$. При этом случай $p = 0$ мы не будем рассматривать. В [3] доказано равенство $\chi(0, 1, G) = \chi(0, \infty, G)$. Что же касается $\chi(0, 0, G)$, т. е. реберного хроматического числа мультиграфа, то этой числовой характеристике посвящено большое число работ (см., например, [11, 13]). Итак, будем предполагать, что $1 \leqslant p \leqslant q$.

**Теорема 6.** *Для любого мультиграфа $G$ при $p \geqslant \sigma(G)$ выполняется равенство*

$$\chi(p, p, G) = \chi(p, \infty, G). \tag{9}$$

Доказательство. Разобьем мультиграф $G$ на $\sigma(G)$ линейных факторов $F_j$ $(j = 1, \ldots, \sigma(G))$; это возможно по теореме 4. Затем начальные инциденторы дуг фактора $F_j$ окрасим в цвет $j$, а конечные — в цвет $j + p$ $(1 \leqslant j \leqslant \sigma(G))$. Сделав так для всех $\sigma(G)$ линейных факторов, получим раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием

$\sigma(G)+p$ цветов. При этом смежные однотипные инциденторы получат разные цвета. Но начальные инциденторы окрашены в цвета из интервала $[1,\sigma(G)]$, конечные — в цвета из интервала $[p+1,\sigma(G)+p]$. Так как $p+1>\sigma(G)$, то смежные разнотипные инциденторы тоже окрашиваются различно. Следовательно, построенная раскраска является $(p,p)$-раскраской, использующей цвета из интервала $[1,\sigma(G)+p]$, и $\chi(p,p,G)\leqslant\sigma(G)+p$. Так как $\sigma(G)+p\geqslant 2\sigma(G)\geqslant\Delta(G)$, то по формуле (5) имеем $\chi(p,\infty,G)=\sigma(G)+p$. Значит, $\chi(p,\infty,G)\leqslant\chi(p,p,G)\leqslant\chi(p,\infty,G)$, откуда и следует равенство (9). Теорема 6 доказана.

Так как $\Delta(G)\geqslant\sigma(G)$, то равенство (9) справедливо при $p\geqslant\Delta(G)$. Однако оно справедливо и при $p\geqslant\Delta(G)-1$. Сначала докажем следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть $F$ — 2-фактор мультиграфа $G$. Тогда при $p\geqslant 1$ можно построить $(p,p)$-раскраску всех инциденторов фактора $F$ с использованием трех цветов вида $k$, $k+p$, $k+2p$.*

Доказательство. Для каждой компоненты связности фактора $F$, отличной от изолированной вершины, выберем направление обхода. Дуги фактора $F$, направление которых совпадает с направлением обхода, назовем прямыми, остальные дуги назовем обратными. Начальные инциденторы прямых дуг окрасим в цвет $k$, конечные инциденторы прямых дуг — в цвет $k+p$. Начальные инциденторы обратных дуг окрасим в цвет $k+p$, а конечные — в цвет $k+2p$. Получим $(p,p)$-раскраску всех инциденторов фактора $F$. Лемма 2 доказана.

**Теорема 7.** *Пусть $G$ — мультиграф, $\Delta(G)=\Delta$. Если $p\geqslant\Delta-1$, то $\chi(p,p,G)=\chi(p,\infty,G)$.*

Доказательство. Теорема очевидна, если $\Delta=1$. Пусть $\Delta\geqslant 2$. Если $p\geqslant\Delta$ или $\sigma(G)\leqslant\Delta-1$, то утверждение теоремы следует из теоремы 6. Поэтому предположим, что $\sigma(G)=\Delta$, $p=\Delta-1$. Тогда $\chi(p,\infty,G)=\sigma(G)+p=2\Delta-1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\Delta$ — четное число. Тогда существует 2-фактор $F_1$ мультиграфа $G$, касающийся всех вершин степени $\geqslant\Delta-1$ и насыщающий все вершины степени $\Delta$. По лемме 2 можно построить $(p,p)$-раскраску всех инциденторов фактора $F_1$ с использованием цветов 1, $\Delta$ и $2\Delta-1$. Если $\Delta=2$, то теорема доказана. Если же $\Delta\geqslant 4$, то из $G$ удалим дуги фактора $F_1$; получим мультиграф $H$ с $\Delta(H)=\Delta-2$, $\sigma(H)=\Delta-2$. По теореме 4 мультиграф $H$ разбивается на $\Delta-2$ линейных факторов: $F_2,\dots,F_{\Delta-1}$. Начальные инциденторы фактора $F_j$ окрасим в цвет $j$, а конечные — в цвет $j+\Delta-1$ ($j=2,\dots,\Delta-1$). Получим $(p,p)$-раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1,2\Delta-1]$. Следовательно, $\chi(\Delta-1,\Delta-1,G)=\chi(\Delta-1,\infty,G)=2\Delta-1$.

С л у ч а й 2. $\Delta$ — нечетное число, $\Delta \geqslant 3$. По теореме 5 существует линейный фактор $F$ мультиграфа $G$, касающийся всех вершин мультиграфа $G$ степени $\Delta$. Начальные инциденторы фактора $F$ окрасим в цвет $\Delta - 1$, а конечные — в цвет $2\Delta - 2$. Удалим из $G$ дуги фактора $F$. Получится мультиграф $H_1$ с $\Delta(H_1) \leqslant \Delta - 1$. Поскольку $\Delta - 1$ — четное число, то существует 2-фактор $F_1$ мультиграфа $H_1$, касающийся всех вершин степени не менее $\Delta - 2$ и насыщающий все вершины степени $\Delta - 1$. Построим $(\Delta - 1, \Delta - 1)$-раскраску всех инциденторов фактора $F_1$ с использованием цветов 1, $\Delta$, $2\Delta - 1$. Если $\Delta = 3$, то теорема доказана. Если же $\Delta \geqslant 5$, то удалим из $H_1$ все дуги фактора $F_1$. Получится мультиграф $H_2$ с $\Delta(H_2) \leqslant \Delta - 3$. Положим $k = \sigma(H_2) \leqslant \Delta - 3$. Разобьем $H_2$ на $k$ линейных факторов $F_2, \ldots, F_{k+1}$ и при каждом $j = 2, \ldots, k+1$ начальные инциденторы фактора $F_j$ окрасим в цвет $j$, а конечные — в цвет $j + \Delta - 1$. В итоге получим $(\Delta - 1, \Delta - 1)$-раскраску всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1, 2\Delta - 1]$. Теорема 7 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Построенная в теореме 7 $(\Delta - 1, \Delta - 1)$-раскраска инциденторов обладает тем свойством, что цвета всех начальных инциденторов при каждой вершине меньше цветов всех конечных инциденторов при той же самой вершине. Это обстоятельство используется при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 8.** *Для любого мультиграфа $G = (V, A)$ с $\Delta(G) = \Delta$ при любом $p$, удовлетворяющем неравенствам $1 \leqslant p \leqslant \Delta - 1$, выполняется равенство*

$$\chi(p, \Delta - 1, G) = \chi(p, \infty, G). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\chi(p, \infty, G) = \Delta + s$, где $0 \leqslant s \leqslant p$. Если $s = 0$, то утверждение теоремы очевидно; если $p = \Delta - 1$, то равенство (10) следует из теоремы 7. Будем предполагать, что $1 \leqslant p \leqslant \Delta - 2$ и $1 \leqslant s \leqslant \Delta - 2$. Тогда $\chi(p, \infty, G) = \Delta + s = \sigma(G) + p$. Положим $r = \Delta - 1 - p$. Имеем $\chi(\Delta - 1, \infty, G) = \chi(\Delta - 1, \Delta - 1, G) = \sigma(G) + \Delta - 1 = \sigma(G) + p + \Delta - 1 - p = \Delta + s + r$. Построим $(\Delta - 1, \Delta - 1)$-раскраску $\varphi$ всех инциденторов мультиграфа $G$ цветами из интервала $[1, \Delta + s + r]$, обладающую свойством, указанным в замечании 3. Теперь перейдем к раскраске $\psi$, перекрашивая инциденторы при каждой вершине $v \in V$, руководствуясь следующими правилами.

1). Если $i$ — начальный инцидентор, для которого $\varphi(i) \leqslant s$, то полагаем $\psi(i) = \varphi(i)$ (из условия $\varphi(i) \leqslant s$ следует, что $i$ — начальный инцидентор, так как $s \leqslant \Delta - 2$).

2). Все начальные инциденторы при $v$, цвета которых при раскраске $\varphi$ больше $s$, монотонно перекрашиваем так, чтобы при получившейся раскраске $\psi$ их цвета заполнили интервал с левым концом $s + 1$.

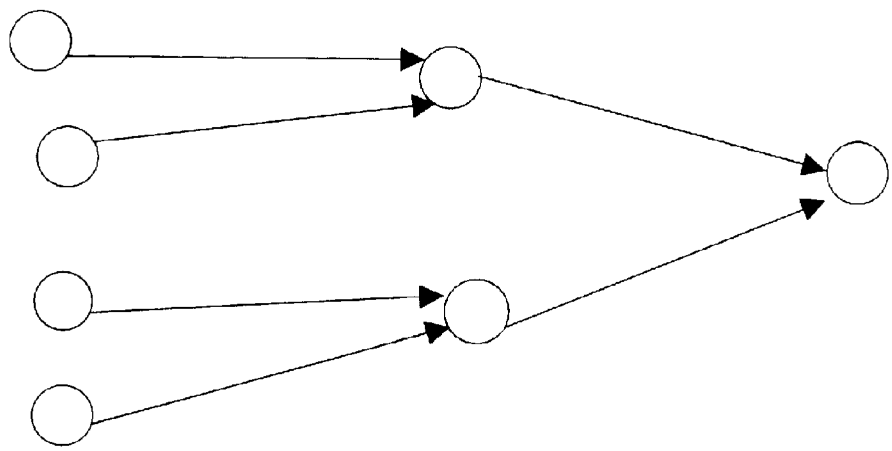
3). Рассмотрим ситуацию при вершине $v$, которая сложилась после указанной перекраски начальных инциденторов. Так как цвета начальных инциденторов при перекраске не увеличились, то они по-прежнему меньше цветов конечных инциденторов при $v$. Если при раскраске $\varphi$ цвета всех конечных инциденторов при $v$ не больше $\Delta+s$, то для всех конечных инциденторов при $v$ полагаем $\psi=\varphi$. Теперь предположим, что при $v$ есть $k$ инциденторов $(0<k\leqslant r)$, цвета которых при раскраске $\varphi$ больше $\Delta+s$. Так как длина интервала $[s+1,\Delta+s]$ равна $\Delta$, то в вершине $v$ отсутствуют по крайней мере $k$ цветов из этого интервала. Пусть $c$ является $k$-м в порядке убывания цветом из $[s+1,\Delta+s]$, отсутствующим в вершине $v$. Произведем такую монотонную перекраску конечных инциденторов при $v$, цвета которых при раскраске $\varphi$ больше $c$, чтобы при получившейся раскраске $\psi$ цвета этих инциденторов заполнили интервал с левым концом $c$. Цвет каждого такого инцидентора уменьшится не более чем на $r$ и окажется в интервале $[s+1,\Delta+s]$. Для остальных конечных инциденторов при $v$ полагаем $\psi=\varphi$.

В результате описанной перекраски инциденторов при каждой вершине мультиграфа получим правильную раскраску $\psi$ всех инциденторов мультиграфа $G$. Покажем, что $\psi$ является $(p,\Delta-1)$-раскраской. Пусть $a$ — произвольная дуга мультиграфа $G$, $i_1$ и $i_2$ — соответственно ее начальный и конечный инциденторы. Тогда $\varphi(i_2)-\varphi(i_1)=\Delta-1$. Так как $\psi(i_2)\geqslant\varphi(i_2)-r$, а $\varphi(i_1)\leqslant\psi(i_1)$, то $\varphi(i_2)-\varphi(i_1)\geqslant\varphi(i_2)-r-\varphi(i_1)=\Delta-1-r=p$. С другой стороны, если $\varphi(i_1)\leqslant s$, то $\psi(i_1)=\varphi(i_1)$, $\psi(i_2)\leqslant\varphi(i_2)$. Поэтому $\psi(i_2)-\psi(i_1)\leqslant\varphi(i_2)-\varphi(i_1)=\Delta-1$. Если же $\varphi(i_1)\geqslant s+1$, то $\psi(i_1)\geqslant s+1$, а так как $\psi(i_2)\leqslant\Delta+s$, то $\psi(i_2)-\psi(i_1)\leqslant\Delta+s-s-1=\Delta-1$. Таким образом, $\psi$ является $(p,\Delta-1)$-раскраской всех инциденторов мультиграфа $G$ с использованием цветов из интервала $[1,\chi(p,\infty,G)]$. Теорема 8 доказана.

Отметим, что при любом $\Delta\geqslant 3$ имеется такой мультиграф (даже являющийся деревом), что равенство $\chi(1,q,G)=\chi(1,\infty,G)$ выполняется только при $q\geqslant\Delta-1$. Такой мультиграф $T$ при $\Delta=3$ изображен на рисунке.

Проведем рассуждение при произвольном $\Delta\geqslant 3$. Так как $\sigma(T)=\Delta-1$, то $\chi(1,T)=\Delta$. Но полустепени захода всех вершин, кроме висячих, равны $\Delta-1$. Поэтому при 1-раскраске всех инциденторов $\Delta$ цветами начальные инциденторы всех дуг, заходящих в сток, окрашиваются цветом 1, а один из конечных инциденторов этих дуг — цветом $\Delta$. Поэтому обязательно есть дуга, для которой разность между цветами конечного и начального инциденторов равна $\Delta-1$.

В заключение коснемся возможности уточнения и упрощения некоторых результатов, полученных в [3].



*Дерево T*

Теорема 1 из [1] утверждает, что для любого мультиграфа $G$ справедливо неравенство $\chi(p,p,G) \leqslant 2\chi(0,0,G) + p - r$, где $r$ — остаток от деления $\chi(0,0,G)$ на $p$. Используя теорему 4 настоящей статьи, можно, так же как и в [3], доказать, что $\chi(p,p,G) \leqslant 2\sigma(G) + p - r$, где $r$ — остаток от деления $\sigma(G)$ на $p$.

Теорема 2 из [3] утверждает, что $\chi(1,1,G) \leqslant 3\lceil\Delta/2\rceil$. При нечетном $\Delta = 2k+1$ неравенство принимает вид $\chi(1,1,G) \leqslant 3k+3$. Но если воспользоваться следствием 3 настоящей статьи и разбить $G$ на $(k+1)$ 2-факторов $F_1,\dots,F_k,F_{k+1}$, где $F_{k+1}$ — линейный фактор, а затем все инциденторы факторов $F_1,\dots,F_k$ (1,1)-раскрасить цветами из $[1,3k]$, а все инциденторы фактора $F_{k+1}$ (1,1)-раскрасить цветами $3k+1$ и $3k+2$, то получим оценку $\chi(1,1,G) \leqslant 3k+2$, т. е. справедливо неравенство $\chi(1,1,G) \leqslant \lceil 3\Delta/2\rceil$. В частности, при $\Delta = 3$ выполняется неравенство $\chi(1,1,G) \leqslant 5$, что доказывается в теореме 3 из [3].

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Б. Тофту и Л. С. Мельникову за внимание и полезные замечания при обсуждении результатов настоящей работы в Оденском университете (Дания) и рецензенту.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.

2. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.

3. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О $(k, l)$-раскраске инцидентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
4. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инцидентов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
5. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, 1999.
6. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
7. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
8. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
9. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инцидентов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.
10. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colourings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. V. 71, N 2. P. 184–204.
11. **Fiorini S., Wilson R. J.** Edge-colourings of graphs. London: Pitman, 1977.
12. **Galvin F.** The list chromatic index of a bipartite multigraph // J. Combin. Theory. Ser. B. 1995. V. 63, N 1. P. 153–158.
13. **Hilton A. J. W., Wilson R. J.** Edge-colorings of graphs: a progress report // Graph theory and its applications: East and west. New York: New York Acad. Sci., 1989. P. 241–249. (Ann. New York Acad. Sci.; V. 576).
14. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.
15. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65039 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
11 января 2001 г.