ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2002. Серия 1. Том 9, № 1, 49–53

УДК 519.74

(k,l)-РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ КУБИЧЕСКИХ МУЛЬТИГРАФОВ*)

А. В. Пяткин

Исследуется (k,l)-раскраска инциденторов ориентированных мультиграфов степени 3. Показано, что в случаях, когда $k = l = 0$ и $k = l = 1$, для такой раскраски требуется $k+4$ цвета, а в остальных случаях достаточно $k+3$ цвета.

Пусть $G = (V,E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ обозначаются соответственно его максимальные степень и исходящая и входящая полустепени. Если дуга e инцидентна вершине v, то упорядоченную пару (v,e) называем *инцидентором* мультиграфа G. Инцидентор удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Для дуги $e = uv$ инцидентор (u,e) называется *начальным*, а инцидентор (v,e) — *конечным*. Два инцидентора называем *однотипными*, если они являются либо начальными, либо конечными. Два инцидентора называются *смежными*, если они инцидентны одной вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначаем через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Для дуги $e = uv$ будем писать $f(e) = (a,b)$, если $f(u,e) = a$ и $f(v,e) = b$. Раскраску инциденторов называем *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (k,l)-*раскраской*, где $0 \leqslant k \leqslant l$, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[k,l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k,l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (k,l)-*хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке голландско-российской программы NWO (грант NWO 047–008–006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581).

Заметим, что в случае $k = l = 0$ мы имеем дело с обычной задачей реберной раскраски мультиграфов и $\chi_{0,0}(G)$ — реберное хроматическое число мультиграфа G. Положим $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G) \mid G$ — мультиграф степени $\Delta\}$. Очевидно, что

$$k + \Delta \leqslant \chi_{k,l+1}(\Delta) \leqslant \chi_{k,l}(\Delta) \leqslant \chi_{k+1,l}(\Delta). \qquad (1)$$

Нижняя оценка в (1) получается при рассмотрении мультиграфа, имеющего источник или сток степени Δ. Действительно, если в мультиграфе есть источник максимальной степени, то начальный инцидентор одной из инцидентных ему дуг будет окрашен цветом Δ. Но тогда конечный инцидентор этой дуги получит цвет не менее чем $k + \Delta$. Если же граф имеет сток степени Δ, то для раскраски его инциденторов потребуется Δ цветов, больших или равных $k + 1$, а значит, наибольший из них не меньше $k + \Delta$.

Понятия (k, l)-инциденторной раскраски и (k, l)-хроматического числа были введены в [1]. В частности, было доказано, что $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$ и $\chi_{1,1}(3) = 5$. Из формулы Шеннона (см. [2]) следует, что $\chi_{0,0}(3) = 4$. В данной статье находится значение $\chi_{k,l}(3)$ для остальных k и l. Мы показываем, что

$$\chi_{k,l}(3) = \begin{cases} k + 4, & \text{если } k = l = 0 \text{ или } k = l = 1; \\ k + 3 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, только в случаях $k = l = 0$ и $k = l = 1$ нижняя оценка из (1) оказывается неточной.

Докажем, что $\chi_{k,l}(3) = k + 3$ при $l = k > 1$. Далее эта же формула устанавливается при $l > k$.

Сначала покажем, что $\chi_{k,k}(3) = k + 3$ для $k \geqslant 2$. При $k \geqslant 3$ эта формула будет следовать из более общего результата, который мы докажем для мультиграфов произвольной степени. Случай $k = 2$ потребует специального рассмотрения.

Лемма 1. *Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф и $m = \max\{\Delta^+(G), \Delta^-(G)\}$. Тогда существует такое разбиение множества ребер $E = E_1 \cup \ldots \cup E_m$, что при каждом $i = 1, \ldots, m$ выполняется равенство $\Delta^+(G_i) = \Delta^-(G_i) = 1$, где $G_i = (V, E_i)$.*

Доказательство. Сначала построим вспомогательный неориентированный двудольный мультиграф H следующим образом. Каждой вершине $v \in V(G)$ поставим в соответствие вершины v^+ и v^- мультиграфа H, а каждой дуге $e = uv \in E(G)$ — ребро u^+v^-. Ясно, что степень мультиграфа H равна m. Следовательно, по теореме Кенига (см. [2]) ребра мультиграфа H можно правильно раскрасить в m цветов. Взяв

в качестве E_i множество дуг G, соответствующих ребрам цвета i в мультиграфе H $(i=1,\dots,m)$, получим требуемое разбиение. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть $G=(V,E)$ — ориентированный мультиграф и $k\geqslant m$, где $m=\max\{\Delta^+(G),\Delta^-(G)\}$. Тогда существует (k,k)-раскраска инциденторов мультиграфа G в $m+k$ цветов.*

Доказательство. Пусть $E=E_1\cup\ldots\cup E_m$ — разбиение множества E, удовлетворяющее лемме 1. Все дуги $e\in E_i$ раскрасим по правилу $f(e)=(i,k+i)$. Так как $k\geqslant m$, то полученная раскраска является искомой (k,k)-раскраской инциденторов мультиграфа G. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 легко следует, что $\chi_{k,k}(3)=k+3$ при $k\geqslant 3$. Осталось доказать эту формулу при $k=2$. Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть $G=(V,E)$ — ориентированный кубический мультиграф, в котором существует такое подмножество ребер $E_0\subset E$, что для каждой вершины $v\in V$ в мультиграфе $G_0=(V,E_0)$ выполняются следующие условия: 1) $d_{G_0}(v)\geqslant 1$; 2) $d^+_{G_0}(v)\leqslant 1$; 3) $d^-_{G_0}(v)\leqslant 1$, где $d_{G_0}(v)$, $d^+_{G_0}(v)$ и $d^-_{G_0}(v)$ — степень и исходящая и входящая полустепени вершины v в G_0 соответственно. Тогда для любой дуги $e_0\notin E_0$ и цвета $t\in\{1,3\}$ существует $(2,2)$-раскраска G в 5 цветов, в которой начальный (конечный) инцидентор i дуги e_0 получит цвет t $(t+2)$.*

Доказательство. Для каждой дуги $e\in E_0$ ее начальный инцидентор раскрасим цветом 2, а конечный — цветом 4. Степень оставшегося мультиграфа $G_1=G\setminus E_0$ не превосходит 2, т. е. его компоненты связности являются цепями и циклами. Для каждой компоненты C в G_1 выберем направление обхода (т. е. каждая дуга в C будет либо сонаправлена выбранному обходу, либо нет). При этом для компоненты, содержащей дугу e_0, направление обхода выбираем в зависимости от t: если $t=1$, то e_0 должна быть сонаправлена обходу, а в противном случае нет. Положим $f(e)=(1,3)$ для каждой сонаправленной обходу дуги $e\in C$, и $f(e)=(3,5)$ для остальных дуг. Легко убедиться, что полученная $(2,2)$-раскраска инциденторов мультиграфа G в 5 цветов удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Справедлива формула $\chi_{2,2}(3)=5$.*

Доказательство. Допустим, что это не так, и существуют мультиграфы степени не более 3 с (2,2)-хроматическим числом, большим 5. Среди всех таких мультиграфов рассмотрим мультиграфы с наименьшим числом вершин и выберем среди них мультиграф с наибольшим числом ребер. Обозначим его через G. Тогда в G может быть не более

одной вершины, степень которой меньше 3. Если такой вершины нет, то положим $G_0 = G$. Иначе обозначим ее через v и построим кубический мультиграф G_0 следующим образом: рассмотрим копию G' мультиграфа G и вершины v' и v соединим недостающим числом дуг.

Если в G_0 есть совершенное паросочетание E_0, то оно удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда в G существует (2,2)-раскраска в 5 цветов, что противоречит выбору мультиграфа G. Значит, в G_0 нет совершенного паросочетания. Тогда по теореме Петерсена [3] в G_0 есть не менее трех перешейков, а значит, и в G есть перешейки. Обозначим через $e = xy$ такой перешеек в G, что компонента связности H_0 мультиграфа $G \setminus e$, не содержащая вершину v, является двусвязной. Для его второй компоненты связности H_1 существует (2,2)-раскраска $f : I \longrightarrow \{1, \ldots, 5\}$ инциденторов (по причине минимальности G по числу вершин). Наша цель — продолжить эту раскраску на весь мультиграф G. Можно считать, что $y \in H_1$, $x \in H_0$ (в противном случае рассуждения аналогичны). В раскраске f при вершине y были использованы два цвета. Следовательно, существует цвет $a \in \{3, 4, 5\}$, свободный при вершине y. Полагаем $f(e) = (a-2, a)$, $t = a - 2$. Для раскраски H_0 построим вспомогательный мультиграф H следующим образом. Заменим H_1 копией H_0' мультиграфа H_0, а вместо дуги $e = xy$ проведем дугу $e_0 = xx'$. По построению кубический мультиграф H имеет один перешеек, и по теореме Петерсена [3] в нем есть совершенное паросочетание P. Более того, $e_0 \in P$, так как перешеек не может принадлежать 2-фактору $F = H \setminus P$. Положим $i = (e_0, x)$. Если $t = 2$, то применим лемму 2, полагая $E_0 = P$. Так как начальные инциденторы всех дуг из E_0 получают цвет 2, то $f(i) = 2$. Если $t \in \{1, 3\}$, то выберем множество E_0 в 2-факторе F следующим образом. Если компонента связности C 2-фактора является четным циклом, то в ней есть совершенное паросочетание, которое добавляется в E_0. Если же C — нечетный цикл, то в нем найдется вершина v, которой инцидентны дуги uv и vw цикла C (т. е. ровно одна входящая и одна выходящая дуги). Добавим в E_0 эти дуги, а также совершенное паросочетание пути $C \setminus \{u,\ v,\ w\}$. Осуществив эту процедуру для всех компонент связности 2-фактора F, применим лемму 2. В любом случае получим (2,2)-раскраску инциденторов мультиграфа H, при которой инцидентор i окрашен цветом t. Заменяя обратно $H_0' \cup e_0$ на $H_1 \cup e$, получим (2,2)-раскраску мультиграфа G в 5 цветов, что противоречит его выбору. Теорема 2 доказана.

Из (1) и теорем 1 и 2 следует, что при любых $l > k \geqslant 2$ выполняется соотношение $\chi_{k,l}(3) = k + 3$. Так как случай $k = 0$ рассмотрен в [1], то далее считаем, что $k = 1$.

Теорема 3. *При любом $l \geqslant 1$ справедлива формула $\chi_{1,l}(3) = 4$.*

Доказательство. Из (1) следует, что достаточно доказать формулу $\chi_{1,2}(3) = 4$. Рассмотрим произвольный мультиграф $G = (V, E)$ степени 3. По теореме 2 существует (2,2)-раскраска мультиграфа G в 5 цветов. Преобразуем ее в искомую (1,2)-раскраску в 4 цвета. Обозначим через V_0 множество всех вершин, при которых есть конечный инцидентор, окрашенный цветом 5. Если $V_0 = \varnothing$, то искомая раскраска получена. Иначе для каждой вершины $v \in V_0$ осуществим следующую перекраску. Обозначим через t наибольший свободный цвет при вершине v. Так как $\Delta(G) = 3$, то $t \geqslant 2$. Положим $f(i) = f(i)-1$ для каждого инцидентора i при вершине v, цвет которого превосходит t. Полученная раскраска будет (1,2)-раскраской. Действительно, уменьшая на 1 цвет конечного инцидентора, мы превращаем (2,2)-раскрашенную дугу в (1,2)-раскрашенную. Если же i — начальный инцидентор, то его цвет равен 3 (так как $t \geqslant 2$), а значит, цвет конечного инцидентора этой дуги равен 5 и он также будет уменьшен на 1. Теорема 3 доказана.

Автор выражает благодарность В. Г. Визингу за существенное упрощение доказательств.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k,l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
3. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: altem@math.nsc.ru

Статья поступила
29 октября 2001 г.