ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2002. Серия 1. Том 9, № 1, 54–58

УДК 519.714.4

# О СВЯЗИ НИЖНИХ ОЦЕНОК СЛОЖНОСТИ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЗАДАЧЕЙ О МИНИМАЛЬНОМ ПОКРЫТИИ

*К. Л. Рычков*

Приводится обобщение и более «прямое» доказательство теоремы А. А. Разборова [6] о сведении нижних оценок сложности схем из функциональных элементов в базисе $\{\vee, \wedge, \neg\}$ к задаче «минимальное покрытие».

## Введение

Рассматриваются схемы из функциональных элементов в базисе $\{\vee, \wedge\}$, на входы которых кроме переменных $x_1, \ldots, x_n$ подаются также отрицания переменных $\bar{x_1} \ldots, \bar{x_n}$. Определение понятия схемы из функциональных элементов можно найти в [1]. Под сложностью $L(f)$ булевой функции $f$ в данном классе схем понимается минимальное число функциональных элементов $\vee, \wedge$ (т. е. дизъюнкторов и конъюнкторов), необходимое для реализации функции $f$ схемами из данного класса. Известно (например, [2]), что сложность булевой функции в указанном классе схем превышает сложность той же функции в классе «обычных» схем из функциональных элементов в базисе $\{\vee, \wedge, \neg\}$ не более чем в два раза.

А. А. Разборовым [6] доказано следующее утверждение. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — отличная от константы булева функция; $E^n$ — множество всех двоичных наборов длины $n$; $N_f^0$ — множество нулей функции $f$ (т. е. множество наборов из $E^n$, на которых $f$ равна 0) и $N_f^1$ — множество единиц функции $f$ (т. е. множество наборов из $E^n$, на которых $f$ равна 1); $X_i^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, — множество наборов из $E^n$, задаваемое уравнением $x_i = \varepsilon$. Для набора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_f^1$ через $\mathscr{F}^\beta$ обозначим множество монотонно неубывающих функционалов $F : \mathscr{P}(N_f^0) \to \{0, 1\}$, определенных на всех подмножествах множества $N_f^0$ и удовлетворяющих условиям

$$F(N_f^0 \cap X_i^1) = \beta_i, \quad F(N_f^0 \cap X_i^0) = \beta_i \oplus 1; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Через $\mathscr{F}$ обозначим $\bigcup\limits_{\beta \in N_f^1} \mathscr{F}^\beta$. Каждой паре $(A, B)$, где $A, B \subseteq N_f^0$, поставим в соответствие множество функционалов

$$\delta(A, B) = \{F \in \mathscr{F} \mid F(A) = F(B) = 1, F(A \cap B) = 0\}.$$

Положим $\Delta = \{\delta(A, B) \mid A, B \subseteq N_f^0\}$. Через $\tau(\mathscr{F})$ обозначим мощность минимального покрытия множества $\mathscr{F}$ элементами из $\Delta$. Пусть $L_\wedge(f)$ обозначает минимальное число конъюнкторов , необходимое для реализации функции $f$ в рассматриваемом классе схем (число дизъюнкторов не ограничено).

**Теорема 1 (А. А. Разборов).** *Для любой отличной от константы булевой функции $f$ справедливо неравенство*

$$L_\wedge(f) \geqslant \tau(\mathscr{F}).$$

Кроме того, в [6] доказано существование таких положительных констант $c_1$ и $c_2$, что для любой булевой функции $f$ от $n$ существенных переменных такой, что $L(f) \geqslant c_1 n^3$, справедливо также неравенство

$$\tau(\mathscr{F}) \geqslant c_2 (L(f))^{1/3}.$$

Поэтому по крайней мере для достаточно сложных булевых функций $f$, существенно зависящих от всех переменных, соответствующее множество функционалов $\mathscr{F}$ заведомо непусто, а величина $\tau(\mathscr{F})$ не слишком сильно отличается от $L(f)$.

Теорема 1 доказана в [6] при помощи метода аппроксимаций, что обусловлено, по-видимому, целями статьи — показать сильные и слабые стороны метода. Несомненно, теорема 1 представляет интерес сама по себе, вне зависимости от метода аппроксимаций. Кроме того, заслуживает внимания и более «прямое», без использования этого метода, доказательство теоремы.

В настоящей статье теорема Разборова формулируется в несколько более общем виде и приводится ее «прямое» доказательство. Отметим, что это доказательство напоминает доказательство аналогичной теоремы для контактно-вентильных схем, приведенное в [3]. Укажем также на родство этих двух теорем и теоремы Храпченко для сложности параллельно-последовательных контактных схем (формул в базисе $\{\vee, \wedge, \neg\}$) [5, 4].

Обобщение касается снятия части ограничений на множество функционалов $\mathscr{F}$. Кроме того, утверждение теоремы Разборова дополняется аналогичным неравенством для $L_\vee(f)$. А именно для набора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in N_f^1$ через $\mathscr{F}_\wedge^\beta$ обозначим множество отличных от констант

монотонно неубывающих функционалов $F : \mathscr{P}(N_f^0) \to \{0,1\}$, удовлетворяющих условиям

$$F(N_f^0 \cap X_i^{\beta_i}) = 1; \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Пусть $\mathscr{F}_\wedge = \bigcup\limits_{\beta \in N_f^1} \mathscr{F}_\wedge^\beta$. Каждой паре $(A,B)$, где $A,B \subseteq N_f^0$, поставим в соответствие множество функционалов

$$\delta_\wedge(A,B) = \{F \in \mathscr{F}_\wedge \mid F(A) = F(B) = 1, F(A \cap B) = 0\}.$$

Положим $\Delta_\wedge = \{\delta_\wedge(A,B) \mid A,B \subseteq N_f^0\}$. Через $\tau(\mathscr{F}_\wedge)$ обозначим мощность минимального покрытия множества $\mathscr{F}_\wedge$ элементами из $\Delta_\wedge$.

Аналогично для набора $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in N_f^0$ через $\mathscr{F}_\vee^\alpha$ обозначим множество отличных от констант монотонно невозрастающих функционалов $F : \mathscr{P}(N_f^1) \to \{0,1\}$, удовлетворяющих условиям

$$F(N_f^1 \cap X_i^{\alpha_i \oplus 1}) = 1; \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Пусть $\mathscr{F}_\vee = \bigcup\limits_{\alpha \in N_f^0} \mathscr{F}_\vee^\alpha$. Каждой паре $(C,D)$, где $C,D \subseteq N_f^1$, поставим в соответствие множество функционалов

$$\delta_\vee(C,D) = \{F \in \mathscr{F}_\vee \mid F(C) = F(D) = 1, F(C \cup D) = 0\}.$$

Положим $\Delta_\vee = \{\delta_\vee(C,D) \mid C,D \subseteq N_f^1\}$. Через $\tau(\mathscr{F}_\vee)$ обозначим мощность минимального покрытия множества $\mathscr{F}_\vee$ элементами из $\Delta_\vee$. Пусть $L_\vee(f)$ обозначает минимальное число дизъюнкторов, необходимое для реализации функции $f$ в рассматриваемом классе схем (число конъюнкторов не ограничено). Ниже доказывается следующая

**Теорема 2.** *Для любой отличной от константы булевой функции $f$ справедливы неравенства*

$$L_\wedge(f) \geqslant \tau(\mathscr{F}_\wedge), \quad L_\vee(f) \geqslant \tau(\mathscr{F}_\vee).$$

Доказательство. Пусть схема $S$ реализует булеву функцию $f(x_1,\dots,x_n)$. Каждому конъюнктору схемы $S$ по некоторому заданному правилу поставим в соответствие элемент из множества $\Delta_\wedge$ и покажем, что совокупность таких элементов является покрытием множества $\mathscr{F}_\wedge$. Этим будет доказана справедливость первого неравенства теоремы.

Зададим это правило. Для каждой вершины $v$ схемы $S$ обозначим через $\varphi_v(x_1,\dots,x_n)$ булеву функцию, которая реализуется в этой вершине, и через $A_v$ — подмножество $N_f^0 \cap \varphi_v^{-1}(1)$ множества $N_f^0$. Отметим, что если $v$ — выход схемы $S$, то $A_v = N_f^0 \cap f^{-1}(1) = \varnothing$; если $v$ — входная вершина, помеченная переменной $x_i$, то $A_v = N_f^0 \cap X_i^1$; если $v$ — входная вершина, помеченная переменной с отрицанием $\bar{x}_i$, то

$A_v = N_f^0 \cap X_i^0$. Пусть вершина $v$ помечена символом $\wedge$ и вершины $s, t$ — родители вершины $v$ (из вершин $s, t$ ведут ориентированные дуги в вершину $v$). Тогда по определению конъюнктору $v$ ставится в соответствие элемент $\delta_\wedge(A_s, A_t)$ из множества $\Delta_\wedge$.

Пусть $F$ — произвольный функционал из множества $\mathscr{F}_\wedge$. Опишем способ нахождения конъюнктора $u$ схемы $S$, которому поставлен в соответствие элемент множества $\Delta_\wedge$, покрывающий $F$. Пусть $F \in \mathscr{F}_\wedge^\beta$ для некоторого $\beta$ из $N_f^1$. Обозначим через $V^\beta$ множество таких вершин $v$ схемы $S$, что $\varphi_v(\beta) = 1$, и через $S^\beta$ подграф схемы $S$, порожденный множеством $V^\beta$. Поскольку $f(\beta) = 1$, выход схемы $S$ заведомо принадлежит множеству $V^\beta$, и поэтому граф $S^\beta$ не пустой. Пусть $C$ — произвольная максимальная (по включению) ориентированная цепь в графе $S^\beta$, конечная вершина которой есть выход схемы $S$, и $C$ удовлетворяет следующему условию: для каждой вершины $v$ цепи $C$ справедливо равенство $F(A_v) = 0$. Как было отмечено выше, если $v$ — выход схемы $S$, то $A_v = \varnothing$. Поэтому в таком случае $F(A_v) = 0$ и, следовательно, указанная цепь существует. Начальную вершину цепи $C$ обозначим через $u$. Мы утверждаем, что вершина $u$ является конъюнктором и элемент множества $\Delta_\wedge$, поставленный в соответствие этому конъюнктору, покрывает функционал $F$.

Действительно, во-первых, вершина $u$ не может быть входом схемы $S$. Если бы $u$ была входом, то из равенства $\varphi_u(\beta) = 1$ следовало бы, что этому входу приписана некоторая переменная $x_i^{\beta_i}$, а это значит, что $A_u = N_f^0 \cap X_i^{\beta_i}$. Поэтому в силу условия, наложенного на цепь $C$, имели бы равенство $F(N_f^0 \cap X_i^{\beta_i}) = 0$. Но это противоречит тому, что по определению множества $\mathscr{F}_\wedge^\beta$ справедливо равенство $F(N_f^0 \cap X_i^{\beta_i}) = 1$.

Во-вторых, вершина $u$ не может быть дизъюнктором. Иначе для родителей $s$ и $t$ вершины $u$ были бы справедливы соотношения

$$\varphi_s(\beta) \vee \varphi_t(\beta) = 1; \tag{1}$$

$$A_s \subseteq A_u, A_t \subseteq A_u. \tag{2}$$

Но тогда из (1) следует, что хотя бы одна из вершин $s$ или $t$ принадлежит графу $S^\beta$, а из (2) и монотонности функционала $F$ вытекает $F(A_s) = F(A_t) = 0$. Отсюда и из отсутствия в схеме ориентированных циклов вытекает противоречие с максимальностью цепи $C$. Итак, вершина $u$ является конъюнктором.

Рассмотрим элемент множества $\Delta_\wedge$, поставленный в соответствие конъюнктору $u$. По определению этот элемент есть множество $\delta_\wedge(A_s, A_t)$, где $s, t$ — родители вершины $u$. Чтобы доказать, что $F \in \delta_\wedge(A_s, A_t)$, нужно установить справедливость равенств $F(A_s) = 1$, $F(A_t) = 1$ и $F(A_s \cap A_t) = 0$. Справедливость первых двух равенств следует из

максимальности цепи $C$ и из того факта, что в силу равенств $\varphi_s(\beta) \wedge \varphi_t(\beta) = \varphi_u(\beta) = 1$ вершины $s$ и $t$ принадлежат графу $S^\beta$. Третье равенство справедливо, поскольку $A_s \cap A_t = A_u$ и $F(A_u) = 0$. Итак, элемент множества $\Delta_\wedge$, поставленный в соответствие конъюнктору $u$, покрывает функционал $F$. Таким образом, первое неравенство теоремы доказано.

Второе неравенство доказывается аналогично с той лишь разницей, что для каждой вершины $v$ схемы $S$ вместо подмножества $A_v$ множества $N_f^0$ рассматривается подмножество $B_v \overset{\text{def}}{\equiv} N_f^1 \cap \varphi_v^{-1}(0)$ множества $N_f^1$; каждому дизъюнктору $v$ схемы $S$ ставится в соответствие элемент $\delta_\vee(B_s, B_t)$ множества $\Delta_\vee$, где $s, t$ — родители вершины $v$; вместо графа $S^\beta$, где $\beta \in N_f^1$, рассматривается граф $S^\alpha$, где $\alpha \in N_f^0$, который по определению есть подграф схемы $S$, порожденный множеством вершин $V^\alpha \overset{\text{def}}{\equiv} \{v \mid \varphi_v(\alpha) = 0\}$. Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Нигматуллин Р. Г.** Сложность булевых функций. М.: Наука, 1991.
2. **Окольнишникова Е. А.** О сведении оценок в полном базисе к оценкам в неполном базисе // Методы дискретного анализа в теории графов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. Вып. 42. С. 80–90.
3. **Разборов А. А.** Нижние оценки сложности реализации симметрических булевых функций контактно-вентильными схемами // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 6. С. 79–90.
4. **Рычков К. Л.** Модификация метода В. М. Храпченко и применение ее к оценкам сложности $\pi$-схем для кодовых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и схем: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. Вып. 42. С. 91–98.
5. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности $\pi$-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, вып. 1. С. 83–92.
6. **Razborov A. A.** On the method of approximation // Proc. of the twenty first annual symposium on theory of computing (Seattle, 1989). New York: ACM, 1989. P. 167–176.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
23 сентября 2001 г.