ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2002. Серия 1. Том 9, № 1, 59–83

УДК 519.17

ОБ ЭНТРОПИИ КОМПОЗИЦИЙ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ЦВЕТНЫХ ГРАФОВ*)

С. В. Сорочан

Для конечного множества $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ рассматриваются q-цвéтные графы, получающиеся в результате раскрашивания ребер полного неориентированного графа в q цветов. Для наследственных классов цветны́х графов, т. е. классов, замкнутых относительно удаления и переименования вершин, исследуется поведение энтропии — предела при $n \to \infty$ отношения логарифма по основанию q числа n-вершинных q-графов, принадлежащих классу, к логарифму по основанию q числа всех n-вершинных q-графов. Рассмотрены некоторые специальные наследственные классы q-графов, названные композициями, и получены значения, которые может принимать энтропия таких классов. Приведены основные свойства так называемых регулярных композиций наследственных классов q-графов.

Введение

В настоящей статье продолжается начатое в [4] исследование наследственных классов цветных графов и обобщаются некоторые результаты, полученные в [1] и [2] для наследственных классов обыкновенных графов.

В [4] было введено понятие *цветного графа*, или *q-графа*. Такой граф возникает в результате раскрашивания ребер полного графа в q цветов. Точнее, если $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ — множество цветов, то *q-графом* с множеством вершин V называется пара $G = (V, g)$, где $g : V^{(2)} \to Q$, а $V^{(2)}$ — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества V. Если $g(x, y) = \alpha$, то пара (x, y) называется ребром цвета α. Для произвольного непустого множества $M \subseteq Q$ через $\mathscr{O}^{(q)}(M)$ будем обозначать класс таких q-графов, что $g(V^{(2)}) \subseteq M$.

Обыкновенный граф можно рассматривать как 2-граф. Некоторые термины, применяемые для обыкновенных графов, естественным образом распространяются на цветные графы. Это относится, в частности,

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00601).

к понятиям изоморфизма, порожденного подграфа и наследственного класса.

Два цветных графа называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая цвета ребер.

Подграф G' цветного графа $G = (V, g)$, порожденный множеством $V' \subseteq V$, это цветной граф (V', g'), где g' — ограничение g на V'. Этот подграф обозначается через $G\langle V'\rangle$.

Класс $\mathscr{X}^{\langle q\rangle}$ q-графов называется *наследственным* (или *фрагментно замкнутым*), если в нем содержится каждый q-граф, изоморфный подграфу графа $G \in \mathscr{X}^{\langle q\rangle}$.

Если V и U — непересекающиеся множества, то *двудольным q-графом* с неупорядоченными долями V и U [4] называется тройка (V, U, g), где $g : V \times U \to Q$. Иначе говоря, двудольный цветной граф возникает в результате раскрашивания ребер полного двудольного графа в q цветов. Для непустого $P \subseteq Q$ множество всех двудольных q-графов с $g(V \times U) \subseteq P$ будем обозначать через $\mathscr{B}^{\langle q\rangle}(P)$. Определения изоморфизма, подграфа и наследственного класса распространяются на двудольные цветные графы очевидным образом. Двудольный подграф заданного q-графа G, порожденный долями V и U, $V, U \subseteq V(G)$, $V \cap U = \varnothing$ и удалением всех ребер, принадлежащих одной и той же доле, будем обозначать через $G\langle V, U\rangle$.

Пусть $\mathscr{X}^{\langle q\rangle}$ и $\mathscr{Y}^{\langle q\rangle}$ — произвольные наследственные классы q-графов и двудольных q-графов соответственно. На протяжении этой статьи будем, как правило, рассматривать именно *классы q-графов*. Поэтому верхний индекс $^{\langle q\rangle}$ в обозначении таких классов будем опускать. Обозначим через $\mathscr{X}_n$ совокупность q-графов из $\mathscr{X}$ с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, а через $\mathscr{Y}_{n_1,n_2}$ — множество двудольных q-графов из $\mathscr{Y}$, в которых $V = \{1, 2, \ldots, n_1\}$, $U = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2\}$.

Рассмотрим последовательности
$$h_n(\mathscr{X}) = \log_q |\mathscr{X}_n| \Big/ \binom{n}{2} \quad \text{и} \quad h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y}) = \frac{\log_q |\mathscr{Y}_{n_1,n_2}|}{n_1 n_2}.$$

Оказывается, что эти последовательности монотонно не возрастают (причем вторая монотонно не возрастает по каждому индексу). Эти факты являются следствиями теоремы 8 из [5], и их доказательства мы не приводим. Отметим только, что применение данной теоремы к классам $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ приводит соответственно к неравенствам
$$|\mathscr{X}_{n+1}|^{n-1} \leqslant |\mathscr{X}_n|^{n+1} \quad \text{и} \quad |\mathscr{Y}_{n_1-i+2,n_2+i-1}|^{n_i} \leqslant |\mathscr{Y}_{n_1,n_2}|^{n_i+1}, \quad i = 1, 2,$$
из которых и вытекают указанные монотонности. Из монотонностей следует, что если классы $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ бесконечны, то существуют пределы
$$h(\mathscr{X}) = \lim_{n\to\infty} h_n(\mathscr{X}) \quad \text{и} \quad h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}) = \lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y}),$$

называемые *энтропиями* классов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно (заметим, что существование предела $h(\mathscr{X})$ было установлено также в [4], однако обоснование не опиралось на монотонность величин $h_n(\mathscr{X})$).

Очевидно, что $h(\mathscr{X}) = -\infty$ для конечного фрагментно замкнутого класса $\mathscr{X}$ q-графов и $0 \leqslant h(\mathscr{X}) \leqslant 1$ для бесконечного класса $\mathscr{X}$, причем из монотонности величин $h_n(\mathscr{X})$ следует, что $h = 1$ только для класса всех q-графов. В частности, $h(\mathscr{O}(M)) = \log_q |M|$ и $h_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}(P)) = \log_q |P|$.

Пополнением двудольного q-графа $G = (V, U, g)$ называется любой q-граф $H = (V \cup U, h)$ такой, что h совпадает с g на $V \times U$. Для бесконечных наследственных классов $\mathscr{X}^{(1)}$ и $\mathscr{X}^{(2)}$ пополнение H двудольного q-графа $G = (V, U, g)$, в котором $H\langle V\rangle \in \mathscr{X}^{(1)}$ и $H\langle U\rangle \in \mathscr{X}^{(2)}$, назовем $(\mathscr{X}^{(1)}, \mathscr{X}^{(2)})$-пополнением графа G.

В [4] было доказано, что

- существует q минимальных (по включению) наследственных классов q-графов, для которых $h = 0$: ими являются *классы $\mathscr{O}_\alpha$ одноцветных q-графов*, т. е. графов, каждое ребро которых имеет цвет α, $\alpha = 1, 2, \ldots, q$;
- область значений энтропии бесконечных фрагментно замкнутых классов q-графов является разрывным множеством: $h(\mathscr{X}) = 0$ либо $\frac{1}{2}\log_q 2 \leqslant h(\mathscr{X}) \leqslant 1$;
- среди наследственных классов q-графов с энтропией $h = \frac{1}{2}\log_q 2$ имеется $\binom{q+1}{2}\binom{q}{2}$ минимальных (по включению) классов; этими классами являются классы $F(\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{O}_\beta; \mathscr{B}(\{\gamma, \delta\}))$ всех $(\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{O}_\beta)$-пополнений двудольных q-графов из $\mathscr{B}(\{\gamma, \delta\})$, где $\alpha \leqslant \beta, \gamma < \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, q$.

В [3] было установлено, что при описании области допустимых значений энтропии наследственных классов обыкновенных графов определяющую роль играют классы $\mathscr{E}_{i,j}$ всех графов, в каждом из которых множество вершин можно разбить на $i + j$ секций, среди которых i секций порождают полные, а j секций — пустые подграфы, $i, j \in Z_+$. Оказалось, что классы $\mathscr{E}_{i,j}$, где $i + j = k$, являются минимальными (по включению) среди наследственных классов обыкновенных графов с энтропией $h = 1 - 1/k, k \in Z_+$, причем допустимые значения энтропии исчерпываются только числами указанного вида. Например, энтропии классов плоских и реберных графов равны нулю, а энтропии классов двудольных, расщепляемых, триангулированных, совершенных графов и графов без треугольников равны 1/2.

Очевидно, что классы цветных графов $\mathscr{O}_\alpha$ и $F(\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{O}_\beta; \mathscr{B}(\{\gamma, \delta\}))$ являются естественными обобщениями классов обыкновенных графов $\mathscr{E}_{i,j}$ при $i + j = 1$ и $i + j = 2$ соответственно на случай произвольного числа цветов q.

Цель данной статьи состоит в исследовании специальных фрагментно замкнутых классов (называемых в дальнейшем *композициями наследственных классов цветных графов*), которые являются обобщением классов $\mathscr{E}_{i,j}$ для произвольных целых неотрицательных i и j. Их изучение может дать определенное представление относительно структуры области допустимых значений энтропии наследственных классов q-графов.

Статья построена следующим образом. В § 1 вводится понятие композиции наследственных классов q-графов и показывается, что проблема нахождения энтропии таких классов сводится к некоторой задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями. В § 2 содержится основной результат работы: дается ответ на вопрос о значениях энтропии рассматриваемых композиций, причем производится разделение всех композиций на регулярные, энтропия которых вычисляется непосредственно, и нерегулярные, энтропия каждой из которых совпадает с максимальной энтропией в ней целиком содержащейся композиции с меньшим количеством секций. Наконец, в § 3 устанавливается связь между энтропиями регулярных композиций, одна из которых порождается удалением некоторой секции другой, обнаруживается наследование свойства регулярности хотя бы одной порожденной k-композицией регулярной $(k+1)$-композиции, доказывается, что любая регулярная k-композиция порождается удалением одной из секций некоторой регулярной $(k+1)$-композиции и устанавливается континуальность множества наследственных классов цветных графов с нулевой и ненулевой энтропией.

§ 1. Композиции наследственных классов цветных графов

Введем понятие композиции наследственных классов цветных графов. Пусть для каждой пары i, j, где $1 \leqslant i, j \leqslant k, i \leqslant j$ и $k \geqslant 2$, при $i = j$ выбран некоторый бесконечный наследственный класс $\mathscr{X}^{ii}$ q-графов, а при $i \neq j$ — некоторый бесконечный наследственный класс $\mathscr{X}^{ij}$ двудольных q-графов. Полагаем $\mathscr{X}^{ji} = \mathscr{X}^{ij}$ при любых $i < j$. Множество всех выбранных классов обозначим через $\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}$. Тогда *$k$-композицией $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = \|\mathscr{X}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$ наследственных классов q-графов из $\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}$* назовем совокупность таких q-графов G, что множество вершин в G можно разбить на непересекающиеся подмножества $V_1, \ldots, V_k$ (некоторые из них могут быть пустыми) так, что $G\langle V_i\rangle \in \mathscr{X}^{ii}$, $G\langle V_i, V_j\rangle \in \mathscr{X}^{ij}$ при всех $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$. Классы $\mathscr{X}^{11}, \ldots, \mathscr{X}^{kk}$ будем называть *секциями* k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$.

Каждой k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ поставим в соответствие симметрическую квадратную матрицу $H_{(k)} \equiv H = (h^{ij})$ порядка k, в которой

$$h^{ii} = h(\mathscr{X}^{ii}) \quad \text{и} \quad h^{ij} = h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{ij}), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, k.$$

Матрицу $H_{(k)}$ будем называть *матрицей энтропий* k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$.

Заметим, что композиция определена с точностью до нумерации секций. Поэтому матрица энтропий определяется с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов.

Рассмотрим проблему вычисления энтропии введенных k-композиций. Справедлива следующая

Теорема 1.

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \max\left\{ \sum_{i,j=1}^{k} h^{ij} x_i x_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{k} x_j = 1,\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, k \right\}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_1^\circ, \ldots, x_k^\circ\}^\top$ — вектор, на котором достигается максимум правой части утверждения теоремы. Из определения класса $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ вытекает следующая верхняя оценка для числа q-графов с n вершинами в этом классе:

$$\left|\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)_n\right|$$
$$\leqslant \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} q^{\sum_{j=1}^{k} h_{n_j}(\mathscr{X}^{jj})\binom{n_j}{2} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} h_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij}) n_i n_j}$$
$$\leqslant \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} h_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij}) n_i n_j},$$

где $h_{n_j,n_j}(\mathscr{X}^{jj}) = h_{n_j}(\mathscr{X}^{jj}), \quad j = 1, \ldots, k$.

По определению и свойству величин $h_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})$ и h^{ij} (см. введение) $h_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij}) = h^{ij} + \varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})$, где $\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})$ монотонно не возрастают по каждому индексу и $\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij}) \to 0$ при $n_i, n_j \to \infty$. Учитывая, что

сумма полиномиальных коэффициентов не превосходит k^n, получаем

$$\left|\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)_n\right| \leqslant k^n \sum_{n_1+\dots+n_k=n} q^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k}\left(h^{ij}+\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})\right)n_in_j}$$

$$\leqslant q^{n\log_q k} \sum_{x_1+\dots+x_k=1} q^{\frac{n^2}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k}\left(h^{ij}+\varepsilon_{nx_i,nx_j}(\mathscr{X}^{ij})\right)x_ix_j}$$

$$\leqslant q^{O(n)} q^{\frac{n^2}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k} h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ} \sum_{n_1+\dots+n_k=n} q^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k}\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})n_in_j}.$$

Число слагаемых в сумме по $(n_1,\dots,n_k)$ в последнем выражении равно $\binom{n+k-1}{k-1}$. Разобьем $\sum\limits_{i,j=1}^{k}\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})n_in_j$ на две суммы $\sum'$ и $\sum''$. Сумма $\sum'$ берется по всем таким i и j, что $n_i<\sqrt{n}$ или $n_j<\sqrt{n}$, сумма $\sum''$ берется по всем остальным i и j. Тогда имеем $\sum'=O(n\sqrt{n})$, а из отмеченных выше свойств величин ε_{n_i,n_j} следует, что $\sum''\leqslant k^2n^2\max\limits_{i,j}\varepsilon_{\sqrt{n},\sqrt{n}}(\mathscr{X}^{ij})=o(n^2)$. Поэтому

$$\sum_{n_1+\dots+n_k=n} q^{\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k}\varepsilon_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})n_in_j} \leqslant \binom{n+k-1}{k-1} q^{O(n\sqrt{n})+o(n^2)} = q^{o(n^2)}.$$

Таким образом,

$$\left|\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)_n\right| \leqslant q^{\frac{n^2}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k}h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ+o(n^2)}.$$

Следовательно, $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^{k}h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ$.

Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольное n и положим $n_j=\lceil x_j^\circ n\rceil$, $1\leqslant j\leqslant k$, и $n'=\sum\limits_{j=1}^{k}n_j$. Рассмотрим какое-нибудь разбиение множества $\{1,\dots,n'\}$ на подмножества $V_1,\dots,V_k$, где $|V_j|=n_j$, $1\leqslant j\leqslant k$. Все q-графы, которые можно получить, если на каждом V_j построить q-граф из $\mathscr{X}^{jj}$, а на каждой паре (V_i,V_j) —

двудольный q-граф из $\mathscr{X}^{ij}$, принадлежат $\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)_{n'}$. Следовательно,

$$\left|\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)_{n'}\right| \geqslant q^{\sum\limits_{j=1}^{k} h_{n_j}(\mathscr{X}^{jj})\binom{n_j}{2} + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} h_{n_i,n_j}(\mathscr{X}^{ij})n_i n_j}$$

$$\geqslant q^{\frac{n^2}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{k} h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ - \frac{n}{2}\sum\limits_{j=1}^{k} h_{n_j}(\mathscr{X}^{ij})x_j^\circ}.$$

Отсюда с учетом условия $n \leqslant n' \leqslant n+k$ получаем

$$h_n\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) \geqslant h_{n'}\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) \geqslant \frac{n^2}{(n+k)(n+k-1)}\sum_{i,j=1}^{k} h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ - o(1).$$

Следовательно, $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) \geqslant \sum\limits_{i,j=1}^{k} h^{ij}x_i^\circ x_j^\circ$. Теорема 1 доказана.

Таким образом, проблема вычисления энтропии любой композиции наследственных классов цветных графов сводится к задаче поиска максимума квадратичной формы с линейными ограничениями.

§ 2. Энтропия композиций наследственных классов

Исследуем задачу квадратичного программирования из предыдущего параграфа. Для удобства перепишем ее в матричной форме: найти

$$\max\left\{F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \mid \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\right\}. \tag{I}$$

Здесь $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_k\}^\top$, $\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}_{(k)} = \{1,\dots,1\}_{(k)}^\top$, $\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}_{(k)} = \{0,\dots,0\}_{(k)}^\top$, H — матрица энтропий k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, а запись $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ означает, что каждая компонента вектора $\mathbf{x}$ неотрицательна.

Решим задачу квадратичного программирования (I), исключая из рассмотрения тривиальный случай, когда все элементы матрицы H равны нулю.

Нетрудно видеть, что целевая функция задачи (I) непрерывна, а допустимая область $\mathscr{D} = \left\{\mathbf{x} \in R^k : \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\right\}$ является ограниченным замкнутым множеством. Следовательно, по теореме Вейерштрасса точка $\mathbf{x}^\circ \in \mathscr{D}$, в которой целевая функция принимает максимальное значение, в действительности существует.

Пусть $\operatorname{int}\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathscr{D} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0},\}$ — множество всех внутренних точек допустимой области, а $\partial\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathscr{D} \mid x_j = 0$ при некотором $j\}$ — ее граница.

Рассмотрим ослабленный вариант задачи (1), когда отсутствует требование неотрицательности переменных: найти

$$\max\left\{F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \mid \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1\right\}. \tag{II}$$

Отметим, что задача (II) есть обычная задача поиска условного максимума. Она удобна тем, что не содержит ограничений-неравенств. Однако ввиду того, что допустимая область этой задачи не является ограниченным множеством, она может не иметь точек условного максимума.

Задачу (II) удобно представить в иной форме. Именно пусть $\mathbf{c}$ — фиксированная точка такая, что $\mathbf{1}^\top\mathbf{c} = 1$. Обозначим через Q матрицу размера $k \times (k-1)$, в столбцах которой записаны координаты базисных векторов $(k-1)$-мерного подпространства, задаваемого линейным однородным уравнением $\mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 0$. Например, в качестве Q можно взять матрицу

$$Q_\circ = \left.\left\| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{matrix}}_{k-1} \right\|\right\} k$$

Тогда каждая точка $\mathbf{x}$ из допустимой области задачи (II) может быть представлена в виде $\mathbf{x} = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_{k-1}\}^\top$ — столбец параметров, $y_j \in R, j = 1, \ldots, k-1$. Следовательно, k-мерную задачу (II) поиска условного максимума можно переписать как $(k-1)$-мерную задачу нахождения безусловного максимума: найти

$$\max_{\mathbf{y}\in R^{k-1}} (\mathbf{c} + Q\mathbf{y})^\top H\,(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}). \tag{III}$$

Отметим, что представление задачи в форме (II) предпочтительнее с точки зрения выражения получаемого решения, а представление в форме (III) удобнее для получения достаточного условия экстремума.

Легко видеть, что соответствие между задачами типа (II) и (III) взаимно однозначное: то, что каждой задаче $\mathbf{y}$ типа (III) соответствует единственная задача $\mathbf{x}$ типа (II), очевидно; обратное следует из единственности разложения вектора $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ по базису подпространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top\mathbf{u} = 0$. Таким образом, представления (II) и (III) эквивалентны. Отсюда, в частности, вытекает взаимно однозначное соответствие между стационарными точками этих задач.

Проведем параллельное исследование задач (II) и (III). Для (II) составим функцию Лагранжа

$$L^{\mathrm{II}}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}^\top H\mathbf{x} - 2\lambda\,(\mathbf{1}^\top\mathbf{x} - 1),$$

где λ — множитель Лагранжа. Используя необходимые условия экстремума, получаем соотношения, которым должны удовлетворять стационарные точки $\mathbf{x}^s$ и $\mathbf{y}^s$ задач (II) и (III):

$$H\mathbf{x}^s = \lambda\mathbf{1}, \quad Q^\top H\, Q\, \mathbf{y}^s = -\, Q^\top H\, \mathbf{c}. \tag{2.1}$$

Вычислим матрицу Γ вторых производных (гессиан) целевой функции задачи (III). Легко видеть, что

$$\Gamma \equiv \left\| \left. \frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{c}+Q\mathbf{y}} \right\|_{i,j=1}^{k-1} = Q^\top H\, Q.$$

Дальнейшее исследование задач (II) и (III) зависит от наличия определенных свойств матриц H и $Q^\top H\, Q$. Возможны следующие два принципиально различных случая.

Случай 1. Гессиан задачи (III) является отрицательно определенной матрицей, т. е. $Q^\top H\, Q < 0$ (заметим, что по закону инерции для квадратичных форм это условие не зависит от выбора матрицы Q), а стационарные точки $\mathbf{x}^s$ и $\mathbf{y}^s$ задач (II) и (III) существуют и единственны, причем $\mathbf{x}^s$ — внутренняя точка допустимой области задачи (I).

Следует отметить, что в этом случае решаемая задача является задачей выпуклого программирования.

На самом деле существование и единственность точек $\mathbf{x}^s$ и $\mathbf{y}^s$ являются следствиями формулы (2.1) и условия $Q^\top H\, Q < 0$ и их можно было особо не оговаривать. Действительно, из (2.1) следует, что

$$\mathbf{y}^s = -\,(Q^\top H\, Q)^{-1} Q^\top H\, \mathbf{c}. \tag{2.2}$$

Теперь из взаимно однозначного соответствия между стационарными точками задач (II) и (III) следует единственность точки $\mathbf{x}^s$, а значит (в силу (2.1)), и регулярность матрицы H. Более точная связь между определителями матриц H и $Q^\top H\, Q$ содержится в следующем утверждении.

Лемма 1. *Если H — матрица энтропий k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, Q — матрица размера $k \times (k-1)$, в столбцах которой записаны базисные векторы подпространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 0$, и $Q^\top H\, Q$ — отрицательно определенная матрица, то знаки определителей матриц H и $Q^\top H\, Q$ совпадают.*

Доказательство. Дополним столбцы матрицы Q до базиса пространства R^k вектором $\mathbf{1}_{(k)}$ и образуем квадратную матрицу $\overline{Q} = \left\| Q \mid \mathbf{1}_{(k)} \right\|$ порядка k. Рассмотрим матрицу

$$\overline{Q}^\top H\, \overline{Q} = \left\| \begin{matrix} Q^\top H\, Q & Q^\top H\, \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top H\, Q & \mathbf{1}^\top H\, \mathbf{1} \end{matrix} \right\|.$$

Вычислим ее определитель двумя способами:

$$\det(\overline{Q}^\top H\,\overline{Q}) = \det{}^2\overline{Q}\det H$$
$$= \det(Q^\top H\,Q)\left[\mathbf{1}^\top H\,\mathbf{1} - \mathbf{1}^\top H\,Q\big(Q^\top H\,Q\big)^{-1}Q^\top H\,\mathbf{1}\right].$$

Выражение в квадратных скобках положительно, поскольку матрица $\big(Q^\top H\,Q\big)^{-1}$ является отрицательно определенной. Следовательно,

$$\operatorname{sign}\det H = \operatorname{sign}\det(Q^\top H\,Q) \neq 0. \tag{2.3}$$

Лемма 1 доказана.

Используя (2.3) и (2.1), находим множитель Лагранжа и единственную стационарную точку задачи (II):

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}, \quad \mathbf{x}^s = \frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.4}$$

Вспоминая связь между переменными задач (II) и (III), можно найти другое выражение для стационарной точки задачи (II):

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s = \big[E_{(k)} - Q\,(Q^\top H\,Q)^{-1}Q^\top H\big]\,\mathbf{c}. \tag{2.5}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае единственной стационарной точке $\mathbf{y}^s$ задачи (III), вычисляемой по формуле (2.2), соответствует единственная стационарная точка $\mathbf{x}^s$ задачи (II), вычисляемая по формулам (2.4) или (2.5).

Из (2.4) и (2.5) следует, что для любой точки $\mathbf{c} \in R^k$ такой, что $\mathbf{1}^\top\mathbf{c} = 1$, справедливо равенство

$$\big[E_{(k)} - Q\,(Q^\top H\,Q)^{-1}Q^\top H\big]\,\mathbf{c} = \frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}. \tag{2.6}$$

Используя (2.4), условие $\mathbf{x}^s \in \operatorname{int}\mathscr{D}$ можно переписать в виде

$$\frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} > \mathbf{0}.$$

На самом деле данное условие равносильно более простому неравенству $H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ (при этом неравенство $\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} > 0$ выполняется автоматически). Действительно, если предположить, что $H^{-1}\mathbf{1} < \mathbf{0}$, то, домножая это неравенство слева на матрицу H, каждый элемент которой неотрицателен, получим $\mathbf{1} < \mathbf{0}$. Противоречие.

Далее обратимся к достаточному условию максимума в многомерной задаче математического программирования. Поскольку матрица вторых производных задачи (III) отрицательно определена, точка $\mathbf{y}^s$ является локальным, а следовательно (в силу единственности стационарной точки), и глобальным максимумом этой задачи. Таким образом, $\mathbf{x}^s$ —

точка глобального максимума задачи (II). Так как $\mathbf{x}^s \in \operatorname{int} \mathscr{D}$, то точки глобального максимума задач (I) и (II) совпадают, т. е.

$$\mathbf{x}^\circ = \mathbf{x}^s = \frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}.$$

Значение целевой функции в точке глобального максимума равно

$$F(\mathbf{x}^\circ) = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} = \mathbf{c}^\top \left[H - H\,Q\,(Q^\top H\,Q)^{-1} Q^\top H\right] \mathbf{c}. \qquad (2.7)$$

Таким образом, при выполнении условий

$$Q^\top H\,Q < 0 \quad \text{и} \quad H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$$

энтропия исследуемой k-композиции наследственных классов вычисляется по формуле

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = F(\mathbf{x}^\circ) = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} = \det H \Big/ \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу h^{ij}.

Случай 2. Имеет место ситуация, противоположная случаю 1.

Этот случай допускает несколько реализаций. Рассмотрим детально каждую из них.

2.1. Матрица вторых производных целевой функции задачи (III) является отрицательно определенной, а стационарная точка задачи (II) не является внутренней точкой допустимой области задачи (I), т. е. $Q^\top H\,Q < 0$ и $\mathbf{x}^s \notin \operatorname{int} \mathscr{D}$.

Как и в случае 1, по лемме 1 получаем, что стационарные точки $\mathbf{x}^s$ и $\mathbf{y}^s$ задач (II) и (III) существуют и единственны. Более того, они являются единственными точками максимума соответствующих задач.

Предположим, что точка глобального максимума задачи (I) является внутренней точкой допустимой области. Тогда существует такая окрестность точки $\mathbf{x}^\circ$, целиком лежащая в $\operatorname{int} \mathscr{D}$, что для любой ее точки $\mathbf{x}$ справедливо неравенство $F(\mathbf{x}) \leqslant F(\mathbf{x}^\circ)$. Значит, $\mathbf{x}^\circ$ — точка максимума задачи (II), причем $\mathbf{x}^\circ \neq \mathbf{x}^s$. Следовательно, задача (II) имеет две точки максимума $\mathbf{x}^\circ$ и $\mathbf{x}^s$. Противоречие. Отсюда заключаем, что предположение неверно и $\mathbf{x}^\circ$ является *граничной точкой допустимой области задачи* (I).

2.2. Матрица вторых производных целевой функции задачи (III) не является отрицательно определенной.

В этой ситуации возможны еще два подслучая.

2.2.1. Матрица вторых производных целевой функции задачи (III) не является отрицательно полуопределенной.

По теореме о достаточных условиях экстремума задача (III), а следовательно, и задача (II) не имеют точек максимума. Если теперь предположить, что $\mathbf{x}^\circ \in \operatorname{int}\mathscr{D}$, то, повторяя рассуждения случая 2.1, снова получим, что $\mathbf{x}^\circ$ — точка максимума задачи (II). Следовательно, в данном случае оказывается, что точка $\mathbf{x}^\circ$ лежит на границе допустимой области задачи (I).

2.2.2. Матрица вторых производных целевой функции задачи (III) не является отрицательно определенной, но является отрицательно полуопределенной, т. е. $Q^\top H\, Q \leqslant 0$.

Отметим, что согласно общей теории решения многомерных экстремальных задач этот случай требует дополнительных исследований. Проведем их для задач (II) и (III).

Лемма 2. *Если $Q^\top H\, Q \leqslant 0$, то стационарные точки задач* (II) *и* (III) *являются точками максимума соответствующей задачи.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^s$ и $\mathbf{y}^s$ — соответствующие друг другу стационарные точки задач (II) и (III), т. е. $\mathbf{x}^s = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s$. Возьмем произвольную точку $\mathbf{y} \in R^{k-1}$ задачи (III) и соответствующую ей точку $\mathbf{x} = \mathbf{c} + Q\mathbf{y}$ задачи (II). Пусть $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}^s$. Тогда, используя отрицательную полуопределенность матрицы $Q^\top H\, Q$, соотношение для стационарных точек (2.1) и определение матрицы Q, получаем

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}) &= (\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s + Q\Delta\mathbf{y})^\top H(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s + Q\Delta\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s)^\top H(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s) + 2\Delta\mathbf{y}^\top Q^\top H(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s) + \Delta\mathbf{y}^\top Q^\top H\, Q\Delta\mathbf{y} \\
&\leqslant F(\mathbf{c} + Q\mathbf{y}^s) + 2\Delta\mathbf{y}^\top Q^\top H\mathbf{x}^s = F(\mathbf{x}^s) + 2\lambda\Delta\mathbf{y}^\top Q^\top \mathbf{1} = F(\mathbf{x}^s).
\end{aligned}
$$

Лемма 2 доказана.

Известно, что если матрица не является отрицательно определенной, но является отрицательно полуопределенной, то она вырожденная. Следовательно, $\det(Q^\top H\, Q) = 0$. Используя второе из соотношений (2.1), получаем, что если стационарная точка задачи (III) существует, то она не единственная. Из взаимно однозначного соответствия между стационарными точками задач (II) и (III) вытекает аналогичное утверждение и для стационарной точки задачи (II). Следовательно, используя первое из соотношений (2.1), получаем $\det H = 0$.

Итак, в случае 2.2.2 $\det(Q^\top H\, Q) = 0$ и $\det H = 0$.

Далее, если $\operatorname{rank}\|H \mid \mathbf{1}\| > \operatorname{rank} H$

$$
\left(\text{эквивалентно, } \operatorname{rank}\left\|Q^\top H\, Q \mid Q^\top H\,\mathbf{c}\right\| > \operatorname{rank}(Q^\top H\, Q)\right),
$$

то задачи (II) и (III) не имеют стационарных точек. Поэтому, повторяя рассуждения из случая 2.2.1, вновь получаем, что точка глобального максимума задачи (I) лежит на границе допустимой области.

Если же

$$\operatorname{rank}\|H \mid \mathbf{1}\| = \operatorname{rank} H \qquad \left(\operatorname{rank}\left\|Q^\top H\, Q \mid Q^\top H\, \mathbf{c}\right\| = \operatorname{rank}(Q^\top H\, Q)\right),$$

то у каждой задачи (II) и (III) имеется линейное многообразие стационарных точек размерности $k - \operatorname{rank} H = k - 1 - \operatorname{rank}(Q^\top H\, Q)$. По лемме 2 все точки этих многообразий являются точками максимума задач (II) и (III) соответственно. Но тогда в многообразии точек максимума задачи (II) найдется точка $\mathbf{x}^\circ$, лежащая на границе допустимой области задачи (I).

Таким образом, в случае 2 обязательно найдется точка максимума задачи (I) (быть может, она определяется не единственным образом), которая лежит на границе допустимой области этой задачи. По определению граничной точки существует хотя бы одна компонента $j^\circ \in \{1, \dots, k\}$ такая, что $\mathbf{x}^\circ_{j^\circ} = 0$. Не уменьшая общности, положим $j^\circ = k$ (этого всегда можно добиться перенумерацией секций композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$). Тогда по теореме 1 имеем

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \sum_{i,j=1}^{k} h^{ij} x_i^\circ x_j^\circ = \sum_{i,j=1}^{k-1} h^{ij} x_i^\circ x_j^\circ = h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k-1)})\right).$$

Следовательно, энтропия рассматриваемой k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ совпадает с максимальной энтропией целиком содержащейся в ней композиции с меньшим числом секций. Получается, что в этом случае композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ заведомо не является минимальным (по включению) классом среди наследственных классов q-графов с заданным значением энтропии.

Композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ назовем *регулярной k-композицией*, если для ее матрицы энтропий H выполнены

требование максимальности

$\langle 1\rangle$ $Q^\top H\, Q < 0$ (Q — матрица размера $k \times (k-1)$, в столбцах которой записаны базисные векторы подпространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 0$)

и *условие внутренней допустимости*

$\langle 2\rangle$ $H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ (неравенство понимается покомпонентно).

Проведенные выше исследования показывают, что справедлива следующая

Теорема 2. *Энтропия каждой регулярной k-композиции наследственных классов q-графов вычисляется по формуле*

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} = \det H \Big/ \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}, \tag{2.8}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу h^{ij}.

Любая нерегулярная композиция не является минимальным (по включению) классом среди наследственных классов q-графов с заданным значением энтропии, энтропия нерегулярной композиции равна максимальной энтропии целиком содержащейся в ней композиции с меньшим количеством секций.

Теорема 2 является основным результатом статьи. Она используется при доказательстве большинства последующих утверждений.

Замечание 1. Энтропия указанного во введении класса $\mathscr{E}_{i,k-i}, i = 1,\ldots,k$ k-дольных 2-графов равна $1-\frac{1}{k}$.

Действительно, класс $\mathscr{E}_{i,k-i}$ имеет матрицу энтропий

$$H = \mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^{\top} - E_{(k)}.$$

Взяв матрицу $Q = Q_{\circ}$, получаем

$$Q_{\circ}^{\top} H\, Q_{\circ} = -(\mathbf{1}_{(k-1)}\mathbf{1}_{(k-1)}^{\top} + E_{(k-1)}) < 0,$$
$$\det H = (-1)^{k-1}(k-1) \neq 0 \quad \text{при} \quad k \geqslant 2,$$
$$H^{-1} = \frac{\mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^{\top}}{k-1} - E_{(k)}, \quad H^{-1}\mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{k-1} > 0, \quad \mathbf{1}^{\top}H^{-1}\mathbf{1} = \frac{k}{k-1}.$$

Ясно, что каждый класс $\mathscr{E}_{i,k-i}$ является регулярной композицией. Отсюда и из формулы (2.8) следует, что

$$h\,(\mathscr{E}_{i,k-i}) = 1 - \frac{1}{k}, \quad i = 0,1,\ldots,k,$$

что полностью согласуется с результатом из [1].

Замечание 2. Если $h^{ij} = 0$ хотя бы для одной пары (i,j), $i \neq j$, то $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ — нерегулярная k-композиция.

В самом деле, если, например, $h^{12} = 0$, то элемент матрицы $Q_{\circ}^{\top} H\, Q_{\circ}$, находящийся в левом верхнем углу, неотрицателен, т. е. $h^{11} + h^{22} - 2\,h^{12} \geqslant 0$. Следовательно, $Q_{\circ}^{\top} H\, Q_{\circ}$ не является отрицательно определенной матрицей.

Учитывая последнее замечание, в дальнейшем будем рассматривать только такие k-композиции наследственных классов q-графов, для которых

$$h^{ij} > 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,k.$$

Следствие 1. *Для произвольных бесконечных наследственных классов $\mathscr{X}^{(1)}$ и $\mathscr{X}^{(2)}$ таких, что $h(\mathscr{X}^{(1)}) = h(\mathscr{X}^{(2)}) = 0$, энтропия любого класса двудольных q-графов вдвое больше энтропии класса всех его $(\mathscr{X}^{(1)}, \mathscr{X}^{(2)})$-пополнений.*

Действительно, матрица энтропий класса $F(\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)};\mathscr{Y})$, состоящего из всех $(\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)})$-пополнений двудольных графов из $\mathscr{Y}$, имеет вид

$$H=\begin{Vmatrix} 0 & h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}) \\ h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далее $\{1,-1\}H\{1,-1\}^{\top}=-2\,h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y})<0$, $H^{-1}\{1,1\}^{\top}=\frac{\{1,1\}^{\top}}{h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y})}>\{0,0\}^{\top}$. Поэтому $F(\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)};\mathscr{Y})$ — регулярная композиция, а

$$h\left(F(\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)};\mathscr{Y})\right)=\frac{1}{2}\,h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}).$$

Следствие 2. *Если $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ — нерегулярная композиция, для матрицы энтропий H которой выполнено условие $\langle 1\rangle$, но нарушено условие $\langle 2\rangle$, то*

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)\leqslant\frac{1}{\mathbf{1}^{\top}H^{-1}\mathbf{1}}.$$

Если же условие $\langle 2\rangle$ имеет место, а $\langle 1\rangle$ нарушено, то

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)\geqslant\frac{1}{\mathbf{1}^{\top}H^{-1}\mathbf{1}}.$$

Действительно, в первом случае стационарная точка

$$\mathbf{x}^{s}=\frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^{\top}H^{-1}\mathbf{1}}$$

является точкой максимума задачи (II), но, возможно, не является допустимой точкой задачи (I). Отсюда следует верхняя оценка для энтропии. Во втором же случае точка $\mathbf{x}^{s}$ допустима, но, возможно, не является точкой максимума, откуда получается нижняя оценка для энтропии.

§ 3. Важнейшие свойства регулярных композиций

Поскольку проблема вычисления энтропии наследственных классов цветных графов успешно решается для композиций таких классов, а особое значение при этом играют регулярные композиции, представляется интересным изучить основные свойства последних. Некоторые свойства уже были установлены в предыдущем параграфе (см. соотношения (2.3), (2.6) и (2.7)). Здесь мы рассмотрим еще несколько свойств регулярных композиций наследственных классов q-графов.

k-композицию

$$C_i(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})=\begin{Vmatrix} \mathscr{X}^{11} & \dots & \mathscr{X}^{1,i-1} & \mathscr{X}^{1,i+1} & \dots & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{i-1,1} & \dots & \mathscr{X}^{i-1,i-1} & \mathscr{X}^{i-1,i+1} & \dots & \mathscr{X}^{i-1,k+1} \\ \mathscr{X}^{i+1,1} & \dots & \mathscr{X}^{i+1,i-1} & \mathscr{X}^{i+1,i+1} & \dots & \mathscr{X}^{i+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,i-1} & \mathscr{X}^{k+1,i+1} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k+1} \end{Vmatrix}$$

назовем *композицией, порожденной удалением i-й секции* из $(k+1)$-композиции

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}) = \begin{Vmatrix} \mathscr{X}^{11} & \dots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \dots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{X}^{k+1,k+1} \end{Vmatrix},$$

или просто *порожденной композицией*, $i = 1, \dots, k+1$.

Приводимая ниже теорема устанавливает взаимосвязь между порожденной и порождающей композициями.

Теорема 3. *Пусть $C_{k+1}(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}) \equiv C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ — k-композиция, порожденная удалением $(k+1)$-й секции из регулярной $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, $k \geqslant 2$, H и $\overline{H}$ — матрицы энтропий композиций $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ соответственно, $h \equiv h^{k+1,k+1} = h(\mathscr{X}^{k+1,k+1})$, $\mathbf{h} \equiv \mathbf{h}_{(k)}$ — k-мерный вектор-столбец такой, что $h^{j,k+1} = h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{j,k+1})$, $j = 1, \dots, k$, $\mathbf{1} = \{1, \dots, 1\}^{\top}_{(k)}$, $\overline{\mathbf{1}} = \{1, \dots, 1\}^{\top}_{(k+1)}$. Тогда H удовлетворяет требованию максимальности и справедливы следующие соотношения*:

$$\det \overline{H} = \det H\,(h - \mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h}), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{sign}\det \overline{H} = -\operatorname{sign}\det H \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h > 0, \tag{3.3}$$

$$\overline{H}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h} \begin{Vmatrix} (\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h)\, H^{-1} - H^{-1}\mathbf{h}\mathbf{h}^{\top} H^{-1} & H^{-1}\mathbf{h} \\ \mathbf{h}^{\top} H^{-1} & -1 \end{Vmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h} \begin{Vmatrix} (\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h)\, H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1)\, H^{-1}\mathbf{h} \\ \mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1 \end{Vmatrix}, \tag{3.5}$$

$$(\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h)\, H^{-1}\mathbf{1} > (\mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1)\, H^{-1}\mathbf{h}, \quad \mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, \tag{3.6}$$

$$\overline{\mathbf{1}}^{\top}\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h}. \tag{3.7}$$

Более того, если порожденная композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ является регулярной, то энтропии композиций $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ и $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ связаны формулой

$$\frac{1}{h\Big(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\Big)} = \frac{1}{h\Big(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\Big)} - \frac{(\mathbf{1}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^{\top} H^{-1}\mathbf{h} - h}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Матрицу $\overline{H}$ можно представить в виде

$$\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^{\top} & h \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя $\det \overline{H}$ как определитель блочной матрицы, получаем (3.1).

Далее в качестве матрицы $Q_{(k\times(k-1))}$ (напомним, что столбцами этой матрицы являются координаты базисных векторов подпространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 0$) возьмем определенную ранее матрицу $Q_\circ$. Тогда

$$Q_{((k+1)\times k)} \equiv \overline{Q}_\circ = \left\| \begin{matrix} Q_\circ & \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{0}^\top & -1 \end{matrix} \right\|, \tag{3.9}$$

где $\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}_{(k-1)}$, а $\mathbf{e}^1 \equiv \mathbf{e}^1_{(k)} = \{1, 0, \ldots, 0\}^\top_{(k)}$.

Ввиду регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ матрица $\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\, \overline{Q}_\circ$ является отрицательно определенной. Представляя ее в блочном виде

$$\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\, \overline{Q}_\circ = \left\| \begin{matrix} Q_\circ^\top H\, Q_\circ & Q_\circ^\top (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h}) \\ (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top Q_\circ & (\mathbf{e}^1)^\top H \mathbf{e}^1 - 2(\mathbf{e}^1)^\top \mathbf{h} + h \end{matrix} \right\|, \tag{3.10}$$

обнаруживаем, что $Q_\circ^\top H\, Q_\circ$ также является отрицательно определенной, т. е. H удовлетворяет требованию максимальности. Следовательно,

$$\operatorname{sign} \det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\, \overline{Q}_\circ) = -\operatorname{sign} \det(Q_\circ^\top H\, Q_\circ) \neq 0. \tag{3.11}$$

По формуле (2.3) имеем

$$\operatorname{sign} \det(Q_\circ^\top H\, Q_\circ) = \operatorname{sign} \det H, \quad \operatorname{sign} \det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\, \overline{Q}_\circ) = \operatorname{sign} \det \overline{H}.$$

Эти соотношения вместе с (3.11) обосновывают справедливость (3.2).

Неравенство (3.3) является очевидным следствием (3.1) и (3.2).

Найдем энтропию регулярной композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$. Согласно теореме 2 и формуле (2.8) для этого нужно вычислить значение $\overline{\mathbf{1}}^\top \overline{H}^{-1} \overline{\mathbf{1}}$.

Справедливость блочного представления (3.4) матрицы $\overline{H}^{-1}$ легко устанавливается непосредственной проверкой.

Равенство (3.5) получается в результате умножения (3.4) справа на столбец $\overline{\mathbf{1}}$.

Далее в силу регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ имеем $\overline{H}^{-1} \overline{\mathbf{1}} > \overline{\mathbf{0}}$ (неравенство понимается покомпонентно). Отсюда и из (3.5), (3.3) следуют неравенства (3.6).

Наконец, соотношение (3.7) есть результат умножения (3.5) слева на строку $\overline{\mathbf{1}}^\top$, причем из теоремы 2 следует, что правая часть (3.7) положительна.

Пусть порожденная композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ регулярная. Тогда по теореме 2 величина $\mathbf{1}^\top H^{-1} \mathbf{1}$ является обратной к ее энтропии. Теперь формула (3.8) — очевидное следствие соотношения (3.7). Теорема 3 доказана.

Следствие 3. *Поскольку* $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right) < 1$, *правая часть соотношения* (3.7) *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h} > 1. \tag{3.12}$$

Следующая теорема устанавливает наследование свойства регулярности хотя бы одной порожденной k-композицией регулярной $(k+1)$-композиции фрагментно замкнутых классов q-графов.

Теорема 4. *Среди* k*-композиций, порожденных произвольной регулярной* $(k+1)$*-композицией наследственных классов* q*-графов, хотя бы одна композиция является регулярной.*

Доказательство. Пусть $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ — регулярная $(k+1)$-композиция с матрицей энтропий $H_{(k+1)} \equiv \overline{H}$. Обозначим через H_i матрицу, полученную из $\overline{H}$ удалением i-й строки и i-го столбца. Очевидно, что H_i является матрицей энтропий k-композиции $C_i(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порожденной удалением i-й секции из $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, $i = 1,\ldots,k+1$. Покажем, что существует такое $i^\circ \in \{1,\ldots,k+1\}$, что k-композиция $C_{i^\circ}(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ является регулярной.

Положим $\mathbf{h}^i_{(k)} \equiv \mathbf{h}^i = \{h^{1i},\ldots,h^{i-1,i},h^{i+1,i},\ldots,h^{k+1,i}\}^\top_{(k)}$, $\overline{\mathbf{e}}^i_{(k+1)} \equiv \overline{\mathbf{e}}^i = \{0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i},0,\ldots,0\}^\top_{(k+1)}$ для каждого $i = 1,\ldots,k+1$, $\mathbf{e}^i_{(k)} \equiv \mathbf{e}^i = \{0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i},0,\ldots,0\}^\top_{(k)}$ для $i = 1,\ldots,k$. При $i = k+1$, как и раньше, будем пользоваться обозначениями

$$H_{k+1} = H, \quad \mathbf{h}^{k+1} = \mathbf{h}, \quad h^{k+1,k+1} = h.$$

Возьмем представление матрицы $\overline{Q}_\circ$ в форме (3.9). По условию $\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ < 0$ и $\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} > \overline{\mathbf{0}}$.

Согласно теореме 3 любая порожденная композиция регулярной композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ удовлетворяет требованию максимальности. Тогда в соответствии с формулами (3.2), (3.3) и (3.6) при любом $i = 1,\ldots,k+1$ имеем

$$Q_\circ^\top H_i\, Q_\circ < 0, \quad \operatorname{sign}\det H_i = -\operatorname{sign}\det \overline{H} \neq 0,$$
$$(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii} > 0, \quad \mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1 > 0.$$

Найдем такое i°, что $H_{i^\circ}^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Поскольку любая композиция определяется с точностью до нумерации секций, перенумеруем секции композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ таким образом, чтобы в результате соответствующих

перестановок строк и столбцов матрицы $\overline{H}$ наименьшее значение величины $\dfrac{(\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1)^2}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}$ достигалось при $i = k+1$. Итак, не уменьшая общности, имеем

$$\arg\min_{i=1\ldots k+1} \frac{(\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1)^2}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} = k+1. \tag{3.13}$$

Покажем, что $H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Используя (3.5), находим, что

$$\left(\overline{\mathbf{e}}^{k+1}\right)^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}.$$

Аналогично

$$\left(\overline{\mathbf{e}}^{i}\right)^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} \text{ при любом } i = 1,\ldots,k+1.$$

С другой стороны, из (3.5) получаем

$$(\overline{\mathbf{e}}^{i})^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = (\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}\,(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}, \quad i = 1,\ldots,k.$$

Следовательно, при каждом $i = 1,\ldots,k$

$$(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} + \frac{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}\,(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}. \tag{3.14}$$

Далее выразим величину $(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}$. Используя (3.4) и (3.1), получаем

$$(\overline{\mathbf{e}}^{k+1})^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{e}}^{k+1} = -\frac{1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h} = \frac{\det H}{\det \overline{H}} < 0.$$

Аналогично

$$(\overline{\mathbf{e}}^{i})^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{e}}^{i} = -\frac{1}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} = \frac{\det H_i}{\det \overline{H}} < 0, \quad i = 1,\ldots,k+1.$$

С другой стороны, из (3.4) получаем

$$(\overline{\mathbf{e}}^{i})^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{e}}^{i} = (\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{e}^i - \frac{\left((\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}\right)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}, \quad i = 1,\ldots,k.$$

Поэтому при каждом $i = 1,\ldots,k$

$$\left((\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}\right)^2 = \frac{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} + (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)\,(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{e}^i. \tag{3.15}$$

Оценим снизу величину $(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}$. Пусть M_i — матрица, полученная вычеркиванием i-й строки и i-го столбца из матрицы H. Согласно формуле, выражающей элемент обратной матрицы, имеем

$$(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{e}^i = \frac{\det M_i}{\det H}, \quad i = 1,\ldots,k.$$

Возможны два случая.

1. $k \geqslant 3$. Тогда, пользуясь (3.2), получаем

$$\operatorname{sign}\det M_i = -\operatorname{sign}\det H \neq 0.$$

Значит, $(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{e}^i < 0$. Отсюда в силу (3.15) имеем

$$\big((\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h}\big)^2 < \frac{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}.$$

Следовательно, при любом $i = 1, \ldots, k$

$$(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{h} > -\sqrt{\frac{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}}. \tag{3.16}$$

2. $k = 2$. В этом случае $H = \begin{Vmatrix} h^{11} & h^{12} \\ h^{12} & h^{22} \end{Vmatrix}$, причем $\operatorname{sign}\det H = \operatorname{sign}\det(Q_\circ^\top H\, Q_\circ) = -1$, т. е. $\det H = h^{11}h^{22} - (h^{12})^2 < 0$. Если $h^{3-i,3-i} > 0$, то $(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{e}^i = \dfrac{h^{3-i,3-i}}{\det H} < 0$ и снова получаем оценку (3.16). Пусть теперь найдется $i \in \{1,2\}$ такое, что $h^{3-i,3-i} = 0$. Не уменьшая общности, возьмем $i = 2$, т. е. $h^{11} = 0$. Тогда $(\mathbf{e}^2)^\top H^{-1}\mathbf{e}^2 = 0$. Однако

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}^2)^\top H^{-1}\mathbf{h} = \{0,1\} \begin{Vmatrix} 0 & h^{12} \\ h^{12} & h^{22} \end{Vmatrix}^{-1} & \{h^{13}, h^{23}\}^\top \\ &= \frac{h^{13}}{h^{12}} > 0 > -\sqrt{\frac{(\mathbf{h}^3)^\top H_3^{-1}\mathbf{h}^3 - h^{33}}{(\mathbf{h}^2)^\top H_2^{-1}\mathbf{h}^2 - h^{22}}}.\end{aligned}$$

Таким образом, при любом $k \geqslant 2$ справедлива оценка (3.16). Подставив (3.16) в (3.14) и использовав (3.13), при любом $i = 1, \ldots, k$ получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}^i)^\top H^{-1}\mathbf{1} &> \frac{\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} - \frac{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}\sqrt{\frac{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}}\left(\sqrt{\frac{(\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1)^2}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}} - \sqrt{\frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}}\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Значит, $H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ и композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ является регулярной. Теорема 4 доказана.

Следствие 4. *Среди всех k-композиций, порожденных регулярной $(k+1)$-композицией, композиция с наибольшим значением энтропии является регулярной.*

Для обоснования достаточно убедиться, что k-композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = C_{k+1}(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, регулярность которой следует из теоремы 4, имеет максимальную энтропию среди всех порожденных k-композиций.

Согласно соотношению (3.7) при любом $i = 1, \ldots, k$ имеем

$$\overline{\mathbf{1}}^\top \overline{H}^{-1} \overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}^\top H^{-1} \mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h} = \mathbf{1}^\top H_i^{-1} \mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1)^2}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}}.$$

Отсюда с учетом (3.13) получаем

$$\mathbf{1}^\top H^{-1} \mathbf{1} = \overline{\mathbf{1}}^\top \overline{H}^{-1} \overline{\mathbf{1}} + \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}$$
$$\leqslant \overline{\mathbf{1}}^\top \overline{H}^{-1} \overline{\mathbf{1}} + \frac{(\mathbf{1}^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - 1)^2}{(\mathbf{h}^i)^\top H_i^{-1}\mathbf{h}^i - h^{ii}} = \mathbf{1}^\top H_i^{-1} \mathbf{1}$$

или же

$$\frac{1}{\mathbf{1}^\top H_{k+1}^{-1} \mathbf{1}} \geqslant \frac{1}{\mathbf{1}^\top H_i^{-1} \mathbf{1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Из этого неравенства, теоремы 2 и следствия 2 вытекает, что

$$h\left(C_{k+1}(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right) \geqslant h\left(C_i(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right) \quad \text{при любом} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Следствие 4 доказано.

Следствие 5. *Для любой регулярной k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, $k \geqslant 2$, существует последовательность наследственных классов*

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(1)}), C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(2)}), \ldots, C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k-1)}), C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}),$$

в которой все классы, кроме первого, являются регулярными композициями, а каждый класс, кроме последнего, порождается удалением одной секции из последующего класса.

Иными словами, любая регулярная композиция *регулярно воспроизводится* из некоторого однодольного класса.

Замечание 3. Регулярные $(k+1)$-композиции, в которых не все порожденные k-композиции регулярны, существуют при любом $q \geqslant 4$.

Простейшим примером такого класса является 3-композиция с матрицей энтропий

$$\overline{H} = \left\| \begin{matrix} \log_q 2 & \log_q 3 & \log_q 2 \\ \log_q 3 & 0 & \log_q 4 \\ \log_q 2 & \log_q 4 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad q \geqslant 4.$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\, \overline{Q}_\circ = - \left\| \begin{matrix} 2\log_q 3 - \log_q 2 & -(2\log_q 2 - \log_q 3) \\ -(2\log_q 2 - \log_q 3) & \log_q 2 \end{matrix} \right\| < 0,$$

поскольку $\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ) = (2\log_q 3 - \log_q 2)\log_q 2 - (2\log_q 2 - \log_q 3)^2 = (\log_q 3 - \log_q 2)(5\log_q 2 - \log_q 3) > 0$, т. е. $\overline{H}$ удовлетворяет требованию максимальности. Также легко проверить, что

$$\overline{H}^{-1} = \frac{1}{4\log_q^2 2(\log_q 3 - \log_q 2)}$$

$$\times \begin{Vmatrix} -4\log_q^2 2 & 2\log_q^2 2 & 2(\log_q 2)(\log_q 3) \\ 2\log_q^2 2 & -\log_q^2 2 & -(2\log_q 2 - \log_q 3)\log_q 2 \\ 2(\log_q 2)(\log_q 3) & -(2\log_q 2 - \log_q 3)\log_q 2 & -\log_q^2 3 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{H}^{-1}\mathbf{1}_{(3)} = \frac{1}{4\log_q^2 2}\begin{Vmatrix} 2\log_q 2 \\ \log_q 2 \\ 2\log_q 2 - \log_q 3 \end{Vmatrix} > \mathbf{0}_{(3)},$$

т. е. для $\overline{H}$ выполняется условие внутренней допустимости. Следовательно, $\overline{H}$ задает регулярную 3-композицию, энтропия которой равна

$$\frac{1}{\mathbf{1}_{(3)}^\top \overline{H}^{-1}\mathbf{1}_{(3)}} = \frac{4\log_q^2 2}{5\log_q 2 - \log_q 3}.$$

Покажем, что 2-композиция, порожденная 1-й и 3-й секциями, не является регулярной, так как ее матрица энтропий

$$H_2 = \begin{Vmatrix} \log_q 2 & \log_q 2 \\ \log_q 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

не удовлетворяет условию внутренней допустимости. Действительно,

$$H_2^{-1} = \frac{1}{\log_q 2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad H_2^{-1}\mathbf{1}_{(2)} = \frac{1}{\log_q 2}\mathbf{e}_{(2)}^1.$$

По теореме 2 энтропия этой композиции равна наибольшей среди энтропий ее порождающих однодольных классов, т. е. $\log_q 2$.

Таким образом, наследование свойства регулярности при $q \geqslant 4$ имеет место не для всех порожденных композиций. Отметим, что пока не удалось доказать аналогичное утверждение при $q = 3$.

Установим еще одно свойство регулярных композиций.

Теорема 5. *Любая регулярная k-композиция наследственных классов q-графов порождается удалением одной секции из некоторой регулярной $(k+1)$-композиции.*

Доказательство. Пусть H — матрица энтропий регулярной k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Рассмотрим $(k+1)$-композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ с матрицей энтропий

$$\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & h \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что она является регулярной при любом $h < 1$.

Поскольку $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \dfrac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} < 1$, имеем $\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1 > 0$.

Возьмем матрицу $\overline{Q}_\circ$ в форме (3.9). Вычислим $\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ)$ как определитель блочной матрицы, используя представление (3.10) при $\mathbf{h}=\mathbf{1}$:

$$\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ) = \det(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)\ \big[((\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1 - 2 + h)$$
$$-(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{1})^\top Q_\circ(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)^{-1}Q_\circ^\top(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{1})\big] = \det(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)$$
$$\times \left\{(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{1})^\top \left[H^{-1} - Q_\circ(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)^{-1}Q_\circ^\top\right](H\mathbf{e}^1 - \mathbf{1}) - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h)\right\}$$
$$= \left\{(H^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{e}^1)^\top \left[H - H\,Q_\circ(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)^{-1}Q_\circ^\top H\right](H^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{e}^1)\right.$$
$$\left. -(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h)\right\}\ \det(Q_\circ^\top H\,Q_\circ).$$

Применяя соотношение (2.7) при $\mathbf{c} = \dfrac{H^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{e}^1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1}$, получаем

$$\frac{\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\ \overline{Q}_\circ)}{\det(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)} = \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1)^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h)$$
$$= \frac{1 - (2-h)\,\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} < -\frac{1-h}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} < 0.$$

Следовательно, $\operatorname{sign}\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ) = -\operatorname{sign}\det(Q_\circ^\top H\,Q_\circ)$ и матрицы $\overline{Q}_\circ^\top \overline{H}\,\overline{Q}_\circ$ и $Q_\circ^\top H\,Q_\circ$ являются отрицательно определенными. Кроме того, из (3.5) следует, что

$$\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h}\left\|\frac{(1-h)\,H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1}\right\| > \overline{\mathbf{0}}, \tag{3.17}$$

т. е. условие внутренней допустимости выполняется. Значит, $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ — регулярная композиция. Теорема 5 доказана.

Следствие 6. *Энтропии регулярных композиций* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ *и* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ *из теоремы* 5 *связаны соотношением*

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right) = \frac{1 - h\cdot h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)}{2 - h - h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)}.$$

Это равенство вытекает из теоремы 2 и (3.17).

Легко видеть, что при любом $q \geqslant 2$ имеется по крайней мере одна регулярная 2-композиция. Отсюда вытекает

Следствие 7. *Регулярные k-композиции наследственных классов q-графов существуют при всех $q \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. Число регулярных композиций счетно.*

Возникает вопрос, как много имеется наследственных классов цветных графов с нулевой и ненулевой энтропией. Ответ на этот вопрос доставляет

Теорема 6. *Множество фрагментно замкнутых классов q-графов с нулевой энтропией континуально. Кроме того, если H — матрица энтропий регулярной k-композиции, то имеется континуальное семейство наследственных классов q-графов с энтропией, равной* $\frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}$.

Утверждение этой теоремы есть обобщение аналогичного результата из [2] для наследственных классов обыкновенных графов. Ее доказательство с незначительными модификациями повторяет доказательство теоремы 4 из [2], и мы его не приводим.

Таким образом, для фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ получено несколько принципиально новых утверждений, указывающих на существенные отличия от ситуации для наследственных классов обыкновенных графов:

- во-первых, энтропия фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ принимает более разнообразные значения по сравнению с числами вида $1 - 1/k$; например, из теоремы 2 следует, что энтропия всякой регулярной композиции равна отношению некоторых двух многочленов с рациональными коэффициентами от необязательно рациональных энтропий ее порождающих однодольных и двудольных классов (см. формулу (2.8));
- во-вторых, еще одно важное заключение из теоремы 2 состоит в том, что не всякие композиции наследственных классов q-графов ($q > 2$), обобщающие классы обыкновенных графов $\mathscr{E}_{i,j}$, являются минимальными (по включению) элементами соответствующих энтропийных слоев; более того, пока нельзя ничего сказать и о минимальности даже регулярных композиций;
- наконец, в-третьих, как показывает замечание 3, наследование свойства регулярности при $q \geqslant 4$ имеет место не для всех порожденных k-композиций регулярной $(k + 1)$-композиции.

Автор выражает глубокую признательность рецензенту и редактору за полезные советы и ценные замечания, учет которых позволил устранить неточности и облегчить восприятие результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Наследственные классы и кодирование графов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 151–164.

2. **Алексеев В. Е.** Об энтропии фрагментно замкнутых классов графов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1986. С. 5–15.

3. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 148–157.

4. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Об энтропии наследственных классов цветных графов // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 99–102.

5. **Bollobás B., Thomason A.** Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs // Bull. London Math. Soc. 1995. V. 27, N 5. P. 417–424.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
фак. вычисл. математики
и кибернетики,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
Россия

Статья поступила
25 апреля 2001 г.,
переработанный вариант —
3 декабря 2001 г.