ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2002. Серия 1. Том 9, № 2, 21–35

УДК 519.177

О ПУТЕВЫХ ЯДРАХ И РАЗБИЕНИЯХ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ*)

Л. С. Мельников, И. В. Петренко

Пусть $\tau(G)$ обозначает число вершин в длиннейшем пути неориентированного графа G. Для пары натуральных чисел (a, b) таких, что $a+b = \tau(G)$, граф G называется (a, b)-*разбиваемым*, если его множество вершин $V(G)$ можно разбить на два класса A, B таким образом, что $\tau(G[A]) \leqslant a$ и $\tau(G[B]) \leqslant b$, где $G[A]$ и $G[B]$ — индуцированные подграфы на множествах вершин A и B в G. Подмножество K множества $V(G)$ называется P_n-*ядром*, если $\tau(G[K]) \leqslant n-1$ и каждая вершина $v \in V(G-K)$ смежна с вершиной, которая является конечной в пути длины $n-1$ в графе G. Известно, что наличие P_n-ядра в графе G означает, что G является $(\tau(G)-n+1, n-1)$-разбиваемым. В настоящей статье доказано, что каждый граф имеет P_8-ядро.

1. Постановка задачи, формулировка основного результата

Пусть $G = (V, E)$ — конечный неориентированный граф. Число вершин в наиболее длинном пути графа G будем обозначать через $\tau(G)$. Через $g(G)$ и $c(G)$ будем обозначать длину кратчайшего (т. е. *обхват*) и длиннейшего циклов в G соответственно. Через C_n и P_n будем обозначать цикл длины n и путь с n вершинами соответственно. В графе G вершину $v \in V$ будем называть P_n-*терминальной вершиной*, если она является конечной вершиной для пути P_n, но не является конечной для пути P_{n+1} в G.

Пусть S — некоторое подмножество вершин из $V(G)$. Подграф графа G, порожденный множеством S, будем обозначать через $G[S]$. *Открытой окрестностью вершины* $v \in V(G)$ называется множество

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00–07–90296 и 02–01–00039), INTAS (грант 97–1001) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

вершин $N(v) = \{u \in V(G) \mid (u,v) \in E(G)\}$. *Открытой окрестностью подмножества* $A \subset V(G)$ называется множество $N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a)$, а *замкнутой окрестностью* множества A называется множество $N[A] = N(A) \cup A$.

Введем следующие определения.

Определение 1. Пусть a, b — натуральные числа такие, что $a + b = \tau(G)$. Разбиение $\{A, B\}$ множества $V(G)$ называется (a,b)-разбиением, если $\tau(G[A]) \leqslant a$ и $\tau(G[B]) \leqslant b$.

Если для графа G и чисел a, b имеется (a,b)-разбиение, то граф G будем называть (a,b)-*разбиваемым.*

Определение 2. Если граф G является (a,b)-разбиваемым для любой пары чисел (a,b) такой, что $a + b = \tau(G)$, то граф G называется τ-разбиваемым.

Аналогичное понятие о разбиениях ранее было введено для других параметров. Граф G называется Δ-*разбиваемым* (где $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень графа G), если для любой пары натуральных чисел (a,b) такой, что $a + b \geqslant \Delta(G) - 1$, существует разбиение $\{V_1, V_2\}$ множества $V(G)$ такое, что $\Delta(G[V_1]) \leqslant a$ и $\Delta(G[V_2]) \leqslant b$. В [10] доказано, что каждый граф G является Δ-разбиваемым. Для двойственного понятия М. Штибиц [12] доказал подобный результат, связанный с минимальной степенью $\delta(G)$.

В [1] была высказана гипотеза о том, что произвольный граф G является τ-разбиваемым. Имеются доказательства ее справедливости для некоторых классов графов. Однако полного доказательства для общего случая не получено. Эта гипотеза также тесно связана с открытой проблемой Михока [11] о ядрах и нашла отражение в диссертациях [8, 13]. Краткое описание рассматриваемых задач и их связь с отмеченной выше гипотезой см. в [5]. Версия этой гипотезы для ориентированных графов имеется в [9].

В [6] было определено одно из обобщений хроматического числа — так называемое k-*хроматическое число* $\chi_k(G)$ графа G, которое равно наименьшему числу множеств V_i, $i = 1, 2, \ldots$, на которые разбивается $V(G)$ таким образом, что $\tau(G[V_i]) \leqslant k$ для каждого i. В частности, в [6] была получена следующая верхняя оценка для k-хроматического числа произвольного графа: $\chi_k(G) \leqslant \lfloor(\tau(G) - 1 - k)/2\rfloor + 2$. Если гипотеза о τ-разбиваемости произвольного графа верна, то полученная в [6] оценка может быть улучшена до $\chi_k(G) \leqslant \lceil \tau(G)/k \rceil$.

Определение 3. Для произвольного графа G подмножество $K \subseteq V(G)$ называется P_n-ядром графа G, если $\tau(G[K]) \leqslant n - 1$ и каждая вершина $v \in V(G - K)$ смежна с P_{n-1}-терминальной вершиной из $G[K]$.

Отметим, что максимальное независимое множество вершин образует P_2-ядро, а вершины максимального подграфа, не содержащего P_3, образуют P_3-ядро.

Определение 4. Для произвольного графа G подмножество $S \subseteq V(G)$ называется P_n-полуядром графа G, если $\tau(G[S]) \leqslant n-1$ и каждая вершина $v \in N(S)-S$ смежна с P_{n-1}-терминальной вершиной графа $G[S]$.

Согласно результатам из [7] справедливость гипотезы о существовании P_n-ядра для произвольного графа G при $n \geqslant 2$ влечет справедливость гипотезы о τ-разбиваемости произвольного графа G. Там же доказано, что если любой граф G из некоторого наследственного класса $\mathscr{H}$ имеет P_n-полуядро, то любой граф из $\mathscr{H}$ имеет P_n-ядро. Таким образом, утверждения о существовании в произвольном графе P_n-ядра и P_n-полуядра равносильны.

Утверждение 1. *Пусть G — такой граф, что $\tau(G) = a+b$, где $1 \leqslant a \leqslant b$. Если в G существует P_{b+1}-полуядро, то граф G является (a,b)-разбиваемым.*

Приведем еще два утверждения из [7].

Утверждение 2. *Если C является $(n-1)$-циклом в графе G, то C является P_n-полуядром в G.*

Утверждение 3. *Если G — такой граф, что $g(G) \geqslant n-2$, то в G существует P_n-ядро.*

Наконец, в [7] было доказано, что в каждом графе G имеется P_7-ядро.

В настоящей статье с использованием некоторых идей из [7] доказывается теорема о существовании P_8-ядра в неориентированном графе G. Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *В любом графе G имеется P_8-ядро.*

Следствие 1. *Граф G с $\tau(G) \geqslant 8$ является $(7, \tau(G)-7)$-разбиваемым.*

Теорема 2. *Граф G является τ-разбиваемым при любом $\tau \leqslant 15$.*

2. Доказательство теоремы о существовании P_8-ядра

Если $\tau(G) \leqslant 7$, то $K = V(G)$ — P_8-ядро в графе G.

Пусть G — такой граф, что $\tau(G) \geqslant 8$.

Ввиду утверждений 1–3 достаточно показать, что в графе G имеется P_8-полуядро. При этом можно считать, что $g(G) \leqslant 6$ и в G нет C_7.

Рассмотрим следующие случаи.

1. В G имеется C_6 и отсутствует C_7.
2. В G имеется C_5 и отсутствуют C_7 и C_6.

3. В G имеется C_4 и отсутствуют C_7, C_6 и C_5.

4. В G имеется C_3 и отсутствуют C_7, C_6, C_5 и C_4.

В графе G с $\tau(G) \geqslant 8$ будет содержаться один из подграфов, изображенных на рис. 1–11. В случае 1, когда граф G является связным и содержит P_8, подграф H_1 будет содержаться в G. Аналогично в случаях 2–4 один из подграфов, изображенных на рис. 2–11, будет являться подграфом связного графа G, содержащего P_8.

Используем следующий алгоритм.

Пусть $S = H_s$, где s — наименьший номер такой, что H_s является подграфом графа G.

Для некоторых $A, B \subseteq V(G)$ сначала полагается, что $B = V(G) \setminus V(S)$ и $A = \varnothing$.

Шаг 1. Все вершины из B, смежные с P_7-терминальными вершинами из S, перемещаются в A. Если $N(S) \bigcap B = \varnothing$, то алгоритм прекращает работу. В противном случае выполняется шаг 2.

Шаг 2. Если две вершины $x, y \in S$ смежны с вершиной b из B, то вершина b перемещается в S и осуществляется переход к шагу 1. В противном случае выполняется шаг 3.

Шаг 3. Пусть P_6-терминальная вершина x из S смежна с b из B. Тогда вершина b перемещается в S и выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 4.

Шаг 4. Пусть P_5-терминальная вершина x из S смежна с вершиной b из B. Тогда вершина b перемещается в S и выполняется шаг 1. В противном случае выполняется шаг 5.

Шаг 5. Пусть P_4-терминальная вершина x из S смежна с вершиной b из B. Тогда вершина b перемещается в S и выполняется шаг 1.

Конец.

Следует отметить, что в S нет и при исполнении алгоритма не появляются P_n-терминальные вершины с $n \leqslant 3$.

После завершения работы описанного алгоритма, т. е. когда $N(S) \cap B$ окажется пустым, S станет P_8-ядром графа G. Действительно, каждая вершина из A будет смежна с P_7-терминальной вершиной в S. Поэтому остается доказать, что $\tau(S) = 7$. Для этого достаточно показать, что в процессе работы алгоритма в S не возникнет путь длины 8.

Путь длины 8 может возникнуть только в процессе перемещения вершин из B в S. Шаги 3, 4 и 5 осуществляются только тогда, когда в B нет вершин, смежных более чем с одной вершиной из S или с некоторой P_7-терминальной вершиной из S. Поэтому при выполнении шагов 3, 4 и 5 в S не может возникнуть путь длины 8. Следовательно, достаточно выяснить, что при выполнении шага 2 описанного алгоритма путь длины 8 не возникнет.

Случай 1. Имеется цикл длины 6, но нет цикла длины 7.

Рассматриваемому случаю соответствует подграф H_1, изображенный на рис. 1. Вершины x_2, x_6, x_7 являются P_7-терминальными. Пусть существует вершина $b \in B$, которая смежна с двумя вершинами из $S = H_1$. Поскольку по условию в G нет C_7 и при этом шаг 1 алгоритма уже выполнялся хотя бы один раз, такими парами могут быть:

1) x_1, x_3 (симметричный случай x_1, x_5);
2) x_3, x_5;
3) x_1, x_4.

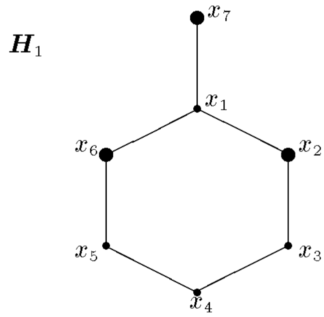

Рис. 1. В G имеется C_6 и нет C_7

Отметим, что если в $G[S]$ есть другие ребра, то часть перечисленных вариантов может отпасть, как, например, в случае, когда смежны вершины x_5 и x_2. При этом вершина x_4 является P_7-терминальной и все смежные с ней вершины из B были бы перемещены в A еще на первом шаге работы алгоритма. В этом случае из всех перечисленных вариантов остались бы два симметричных, когда b смежна с x_1 и x_5 или когда b смежна с x_1 и x_3, а также случай, когда вершина b смежна с вершинами x_3 и x_5.

Рассмотрим перечисленные выше подслучаи.

Пусть вершина b смежна с x_1 и x_3. Тогда при ее перемещении в S вершины b и x_4 становятся P_7-терминальными, все смежные с ними вершины из B перемещаются в A на следующем шаге работы алгоритма. При этом $\tau(S)$ остается неизменным, т. е. равным 7. Аналогично рассматривается подслучай, когда b смежна с вершинами x_1 и x_5. Заметим, что в этом случае после перемещения вершины b при дальнейшем выполнении шага 2 алгоритма можно добавить либо дубликат вершины b, либо дубликат вершины x_5, либо вершину из B, смежную с вершинами x_3 и x_5.

Рассмотрим подслучай 2. Пусть вершины x_3, x_5 смежны с некоторой вершиной из B. Тогда при перемещении вершины b на шаге 2 алгоритма вершины b и x_4 становятся P_7-терминальными и все смежные с ними вершины из B на следующем шаге перемещаются в A. При последующей работе алгоритма в S могут быть добавлены вершины, которые являются дубликатом вершины x_4, либо другие вершины из B, смежные с x_1, x_3 или x_1, x_5. При этом $\tau(S)$ остается неизменным, т. е. $\tau(S) = 7$.

Пусть вершина b смежна с вершинами x_1 и x_4. Тогда вершины b, x_3, x_5 становятся P_7-терминальными, а все смежные с ними вершины перемещаются в A на следующем шаге работы алгоритма. При повторном выполнении шага 2 в S могут быть добавлены только вершины, которые также смежны с вершинами x_1, x_4, причем независимо от их числа величина $\tau(S)$ остается неизменной.

Таким образом, случай, когда в графе G имеется C_6 и нет C_7, разобран.

Случай 2. В графе G нет циклов длины 6 и 7, но есть цикл длины 5.

Доказательство разбивается на 8 подслучаев. На рис. 2, 3 и 4 этому случаю соответствуют подграфы $H_2, \ldots, H_9$, один из которых может являться подграфом графа G.

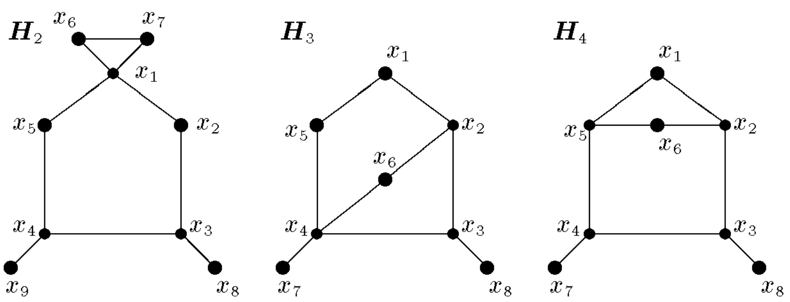

Рис. 2. В G имеется C_5 и нет C_6, C_7

Подслучай $S = H_2$. Если в B имеется вершина b, которая смежна с двумя вершинами из S (см. рис. 2), то такими вершинами могут быть вершины x_1, x_3, или (симметричный случай) x_1, x_4. Вершины x_3, x_4 отпадают в связи с предположением о том, что в G нет C_6. Пусть b смежна с x_1, x_3. Тогда после перемещения b в S вершина b становится P_7-терминальной, а все смежные с ней вершины из B на следующем шаге алгоритма перемещаются в A. На последующих шагах работы алгоритма в S могут быть перемещены вершины из B, смежные с x_1, x_3 или с x_1, x_4. Отметим, что при этом $\tau(S) = 7$, т. е. остается неизменным.

Подслучай $S = H_3$ (см. рис. 2). Так как вершины x_1, x_5, x_6, x_7 и x_8 являются P_7-терминальными, то в силу принятых допущений, если имеется вершина $b \in B$, смежная с двумя вершинами из S, такими вершинами могут быть только x_2 и x_4. Если такая вершина b будет добавлена в S, то она станет P_7-терминальной. При дальнейшем перемещении в S таких вершин, которые являются дубликатами вершины x_6, величина $\tau(S)$ не изменится.

Подслучай $S = H_4$**.** Пусть b — вершина из B, которая смежна с двумя вершинами из S. В силу принятых допущений такими парами (см. рис. 2) не могут быть (x_2, x_4) и (x_3, x_5), так как в этом случае в G содержится H_3. Пусть $b \in B$ смежна с вершинами x_2 и x_5. Легко видеть, что вершина b становится P_7-терминальной, поскольку является дубликатом вершин x_1 и x_6. Отметим, что $\tau(S) = 7$.

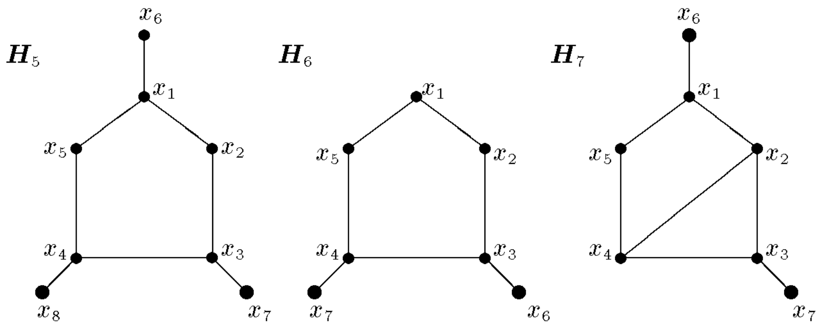

Рис. 3. В G имеется C_5 и нет C_6, C_7

Подслучай $S = H_5$**.** Этот подграф изображен на рис. 3. В этом случае вершины x_7 и x_8 являются P_7-терминальными. Если имеется $b \in B$, смежная с двумя вершинами из S, то b может быть смежна с вершинами x_1, x_3 либо с x_1, x_4. В этом случае b является дубликатом вершин x_2 или x_5 соответственно, причем вершина b и дублируемая ею вершина становятся P_7-терминальными. При этом величина $\tau(S)$ не изменяется, т. е. остается равной 7. Допустив, что вершина b смежна с вершинами x_1, x_6, получим, что в графе G содержится подграф H_2, что противоречит предположению о минимальности номера s подграфа H_s. Аналогично, допуская, что b смежна с x_2, x_5, получаем, что в G имеется подграф H_4, а допуская, что b смежна с x_2, x_4 или (симметричный случай) с x_3, x_5, получаем, что в G имеется подграф H_3. Таким образом, этот подслучай разобран.

Подслучай $S = H_6$**.** В целом этот случай (см. рис. 3) ввиду принятых допущений аналогичен предыдущему. Поэтому во избежание повторов рассуждений большую их часть можно опустить. Если допустить, что при выполнении алгоритмом шага 4 в S будет перемещена вершина b, смежная с x_1, то это противоречит допущению о минимальности номера s подграфа H_s, так как в этом случае граф G будет содержать подграф H_5.

Подслучай $S = H_7$**.** В этом случае вершина $b \in B$ может быть смежна с вершинами x_1, x_4, или x_2, x_5, или x_2, x_4. И в каждом из этих случаев граф G содержит подграф H_6 (см. рис. 3). Если предположить, что b смежна с x_3 и x_5, то окажется, что граф G содержит C_6, образуемый вершинами $x_1, x_2, x_4, x_3, b, x_5$. Аналогично граф G содержит C_6 и в случае, если вершина b смежна с вершинами x_1 и x_3.

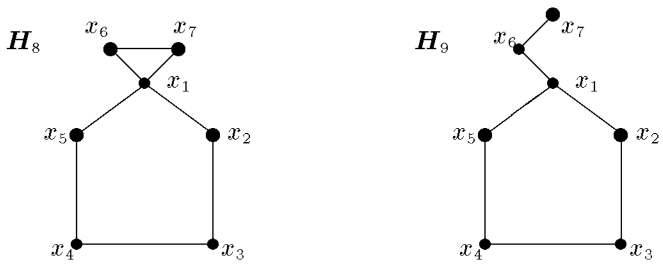

Рис. 4. В G имеется C_5 и нет C_6, C_7

Подслучай $S = H_8$**.** Если существует вершина b, смежная с двумя вершинами из S (см. рис. 4), то такими вершинами могут быть только x_1, x_3 или x_1, x_4. В обоих случаях при перемещении вершины b в S она становится P_7-терминальной, причем $\tau(S)$ не изменяется.

Подслучай $S = H_9$**.** Этот подграф изображен на рис. 4. Если $b \in B$ смежна с вершинами x_1 и x_6, то G содержит H_8. Если b смежна с вершинами x_1, x_3 или вершинами x_1, x_4, то b, будучи перемещена в S, становится P_7-терминальной и, являясь дубликатом x_2 или x_5 соответственно, никак не влияет на $\tau(S)$.

Таким образом, случай 2 (наличие в G цикла C_5 наряду с отсутствием C_6 и C_7) разобран. Следующий случай (напомним, что это случай, *когда в графе G имеется C_4 и нет циклов C_5, C_6 и C_7*) состоит из подобного разбора вариантов с той разницей, что требуется рассмотреть 13 вариантов подграфов, из которых один может содержаться в G. На рис. 5–9 эти подграфы обозначены через $H_{10}, \ldots, H_{22}$. Принимая во внимание число перебираемых случаев и полагая, что читатель уже ознакомился с логикой доказательства, далее постараемся быть более лаконичными.

Случай 3. Пусть G таков, что в нем есть цикл длины 4 и отсутствуют циклы длины 5, 6 и 7. В этом случае в графе G имеется один из подграфов H_s, $10 \leqslant s \leqslant 22$, которые изображены на рис. 5–9. Как и прежде, полагаем, что s — минимальный номер такой, что граф $S = H_s$ является подграфом графа G. Приступим к перебору всех подслучаев.

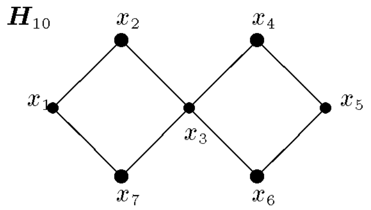

Рис. 5. В G имеется C_4 и нет C_5, C_6, C_7

Подслучай $S = H_{10}$. Этому подслучаю соответствует подграф, изображенный на рис. 5. Если имеется $b \in B$, которая смежна с двумя вершинами из S, то такими вершинами могут быть либо x_1, x_3, либо x_3, x_5. В обоих случаях вершина b становится P_7-терминальной, причем при ее добавлении в S увеличения $\tau(S)$ не происходит. Следует заметить, что в этом случае на шаге 5 алгоритма существует также возможность добавления вершины b, смежной с вершиной x_3, а затем повторного выполнения шага 2. Отметим, что при этом могут быть добавлены 3 вершины b_1, b_2, b_3 при последовательном выполнении шагов 5, 2, 2 (в этом случае все добавленные вершины станут P_7-терминальными) или при последовательном выполнении шагов 5, 4, 2 (в этом случае P_7-терминальными станут вершины b_1 и b_3). Однако возрастания $\tau(S)$ при этом не произойдет.

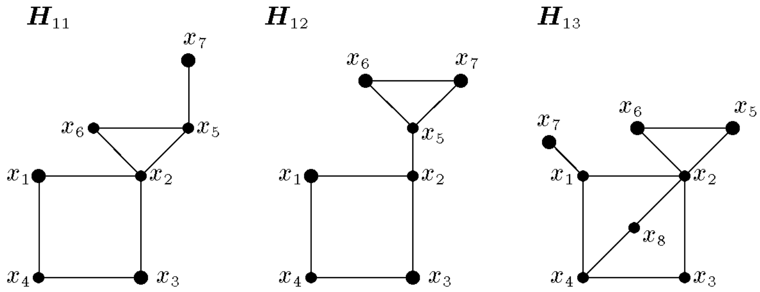

Рис. 6. В G имеется C_4 и нет C_5, C_6, C_7

Подслучай $S = H_{11}$. Если предположить, что вершина b из B смежна с вершинами x_2, x_5, или x_5, x_6, или x_2, x_6, то в графе G содержится подграф H_{10} (см. рис. 6), чего быть не может. Если же такая вершина была бы смежна с несмежными вершинами x_4, x_5 или x_4, x_6, то в G содержался бы C_5, что также противоречит принятым допущениям. Таким образом, b может быть смежна только с вершинами x_2 и x_4; при этом b является дубликатом x_1 и P_7-терминальной вершиной. Легко видеть, что $\tau(S) = 7$ после добавления такой вершины.

Подслучай $S = H_{12}$. Полагая, что вершина b смежна с вершинами x_2 и x_5 (см. рис. 6), получим, что в G имеется подграф H_{11}, а полагая, что b смежна с вершинами x_4 и x_5, получим, что в G содержится C_5. Это противоречит сделанным допущениям. Если же вершина b смежна с вершинами x_2 и x_4, то b является дубликатом вершин x_1, x_3 и P_7-терминальной, а $\tau(S) = 7$.

Подслучай $S = H_{13}$. Пусть вершина $b \in B$ смежна с некоторыми двумя вершинами из S. Легко видеть (см. рис. 6), что такими вершинами не могут быть ни x_1, x_8, ни x_2, x_8, ни x_4, x_8, ни x_3, x_8, так как, допуская, что вершина b смежна с одной из таких пар вершин, получим, что G содержит цикл длины более 4 (C_6, C_5, C_5, C_6 соответственно). Допустим, что вершина b смежна с вершинами x_1 и x_3. Тогда в G имеется C_6, состоящий из вершин $x_1, b, x_3, x_4, x_8, x_2$. Отдельно следует разобрать случай, когда b смежна с вершинами x_2 и x_4. В этом случае вершина b является дубликатом вершины x_8. Рассмотрим $G[S \cup \{b\}]$. Предположим, что вершина $b_1 \in B$ смежна с b и некоторой вершиной из S. Так как b является дубликатом x_8, то разобранные выше подслучаи имеют для b ту же силу, что и для x_8. Таким образом, для вершины b_1 остается рассмотреть только случай, когда b_1 смежна с вершинами b и x_8. Нетрудно видеть, что такой случай невозможен, поскольку в этом случае в графе G имеется C_6, состоящий из вершин $x_2, x_3, x_4, b, b_1, x_8$. Таким образом, вершина b_1 не может быть смежна с двумя вершинами из $G[S \cup \{b\}]$ за исключением, конечно, вершин x_2 и x_4, при этом b_1 становится дубликатом вершины b. Если же вершина $b_1 \in B$ смежна только с вершиной b из $G[S \cup \{b\}]$, то после перемещения b_1 в S на шаге 3 алгоритма она становится P_7-терминальной, причем все смежные с ней вершины на следующем шаге алгоритма будут перемещены в множество A. Отметим, что в рассмотренном случае при выполнении шагов алгоритма $\tau(S)$ не возрастает и равно 7.

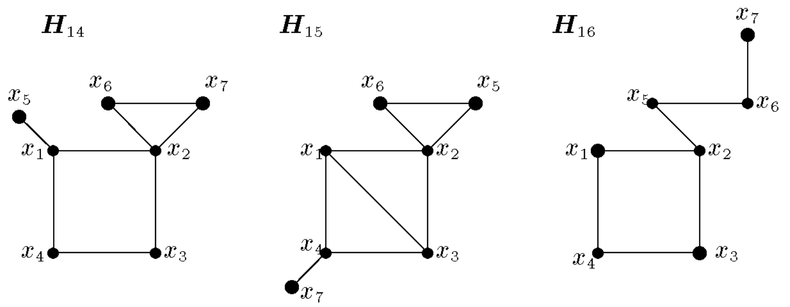

Рис. 7. В G имеется C_4 и нет C_5, C_6, C_7

Подслучай $S = H_{14}$ (см. рис. 7) значительно проще предыдущего. Предположим, что $b \in B$ смежна с двумя вершинами из S. Легко видеть, что таких пар вершин в S может быть только две. Если b смежна с вершинами x_1 и x_3, то при перемещении вершины b в S она станет

P_7-терминальной; P_7-терминальной станет и x_4, а $\tau(S)$ не изменится. Если вершина b смежна с вершинами x_2, x_4, то в графе G содержится H_{13}, а это противоречит допущению о том, что s — минимальный номер подграфа H_s.

Подслучай $S = H_{15}$. В этом подслучае (см. рис. 7), предположив, что вершина из B может быть смежна с вершинами x_1 и x_3, получим, что G содержит подграф H_{14}, чего быть не может. Предположим, что вершина $b \in B$ смежна с вершинами x_2 и x_4. Тогда в G содержится C_5. При работе алгоритма в этом случае возрастания $\tau(S)$ не произойдет.

Подслучай $S = H_{16}$. Если предположить, что (см. рис. 7) $b \in B$ смежна с вершинами x_2, x_5 или вершинами x_5, x_6, то в графе G содержатся подграфы H_{11} и H_{12} соответственно, чего быть не может. Пусть b смежна с вершинами x_2 и x_6. В этом случае в графе G содержится H_{10}. Если вершина b смежна с вершинами x_4 и x_5 или x_4 и x_6, то в графе G имеется C_5 или C_6 соответственно. Таким образом, остается единственная возможность, когда b смежна с вершинами x_2 и x_4. В этом случае при перемещении b в S вершина b становится P_7-терминальной. Легко видеть, что $\tau(S) = 7$.

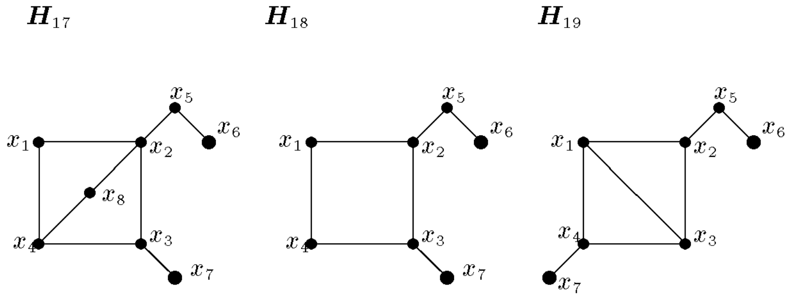

Рис. 8. В G имеется C_4 и нет C_5, C_6, C_7

Подслучай $S = H_{17}$. Перебирая все возможные пары вершин (см. рис. 8), с которыми может быть смежна b, убеждаемся в том, что почти во всех случаях в G содержится либо C_5, либо C_6. Если вершина b смежна с вершинами x_2 и x_5, то в G содержится H_{14}. Если предположить, что b смежна с вершинами x_2 и x_4, то b является дубликатом x_8. При этом следует отметить, что любая вершина из B не может быть смежна с вершинами b и x_8, поскольку это бы означало, что в G содержится цикл C_6. Аналогичная ситуация рассмотрена при разборе подслучая $S = H_{13}$.

Подслучай $S = H_{18}$. Если вершина $b \in B$ смежна с вершинами x_2, x_5 (см. рис. 8), то в G содержится H_{14}, а если b смежна с вершинами x_2 и x_4, то в G содержится H_{17}. Если же b смежна с x_1 и x_3, то при перемещении b в S она становится P_7-терминальной вершиной, как и x_4. Изменения $\tau(S)$ не происходит.

Подслучай $S = H_{19}$ изображен на рис. 8. Пусть имеется вершина $b \in B$, которая смежна с двумя вершинами из S. При этом b не может быть смежна с вершинами x_2, x_5, так как это означает, что в графе G содержится подграф H_{11}. С вершинами x_2 и x_4 вершина b не может быть смежна, так как в этом случае в графе G содержится подграф H_{18}. По той же причине вершина b не может быть смежна с вершинами x_1, x_3. Таким образом, при выполнении шага 2 описанного алгоритма к множеству S ни одна вершина из B добавлена быть не может. Это означает, что $\tau(S)$ не изменится.

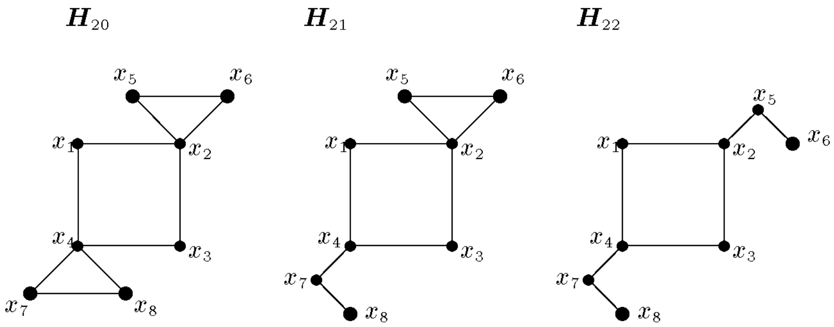

Рис. 9. В G имеется C_4 и нет C_5, C_6, C_7

Подслучай $S = H_{20}$. В этом подслучае (рис. 9) вершина $b \in B$ не может быть смежна с вершинами x_1 и x_3 (ни одновременно с обеими, ни отдельно с какой-либо одной из них), так как это привело бы к тому, что в графе G содержится подграф H_{14}. Те же ограничения, что и для x_1 и x_3, должны выполнятся для вершины b, которая смежна с вершинами x_2 и x_4, так как такая вершина b является дубликатом вершины x_1. Ясно, что в этих условиях при перемещении вершин из B в S величина $\tau(S)$ не изменится.

Подслучай $S = H_{21}$. Полагая, что вершина b смежна с x_1 и x_3 (см. рис. 9), получим, что в G содержится H_{14}. Как и в предыдущем подслучае, если вершина b, смежная с вершинами x_2 и x_4, перемещается в S, увеличения $\tau(S)$ не произойдет. Причем ни b, ни ее дубликаты не могут быть смежны с какими-либо вершинами из B, поскольку это привело бы к тому, что в G содержится подграф H_{14}. Если вершина b смежна с вершинами x_4 и x_7, то в графе G содержится H_{20}.

Подслучай $S = H_{22}$ (см. рис. 9) аналогичен предыдущему. Отличие состоит лишь в следующем. Если предположить, что b смежна с вершинами x_2, x_5 (или x_4, x_7), то в графе G содержится подграф H_{21}.

Таким образом, третий случай полностью разобран. Переходим к случаю 4 (*в графе G содержится C_3 и нет C_7, C_6, C_5, C_4*).

Случай 4. Для всех подслучаев настоящего случая (рис. 10–11) отметим, что в любом из рассматриваемых подграфов вершины x_3, x_5 являются P_5-терминальными, а вершина x_4 — P_4-терминальной (за исключением подслучаев H_{23}, H_{24} и H_{29}). В силу того, что в G нет циклов длины более 3, вершина b, смежная с двумя вершинами из S, не может быть перемещена в S, так как при этом либо будет нарушено допущение о том, что в G не содержится циклов длины более 3, либо будет нарушено допущение о минимальности номера s подграфа H_s.

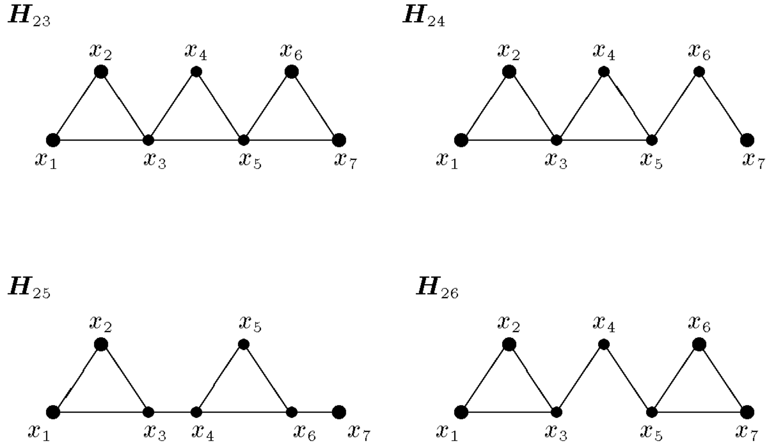

Рис. 10. В G имеется C_3 и нет C_4, C_5, C_6, C_7

В этом случае при выполнении шага 4 алгоритма в S может быть добавлена вершина b_1, смежная с одной из P_5-терминальных вершин. При этом вершина b_1, будучи перемещена в S, станет P_6-терминальной, а при добавлении b_2 при последующем выполнении шага 2 алгоритма вершины b_1 и b_2 станут P_7-терминальными, а путь длины 8 в S не возникнет.

Аналогично при выполнении шага 5 алгоритма в S может быть перемещена вершина b_1, смежная с вершиной x_4 (за исключением упомянутых случаев, когда x_4 является P_5-терминальной), причем b_1 окажется P_5-терминальной. При этом все описанные выше свойства P_5-терминальных вершин будут выполняться и для вершины b_1. Осталось рассмотреть случай, когда после перемещения в S вершины b_1 при выполнении шага 2 алгоритма перемещается вершина b_2, смежная с b_1 и x_4. При перемещении b_2 вершины b_1 и b_2 станут P_6-терминальными, а так как в G нет циклов длины более 3, то при последующем выполнении шага 2 алгоритма не появится вершин, одновременно смежных с b_1 и b_2. Все вершины, смежные с b_1 (а равно и с b_2), которые будут перемещены при выполнении шага 3, в S окажутся P_7-терминальными, и будет выполняться неравенство $\tau(S) \leqslant 7$.

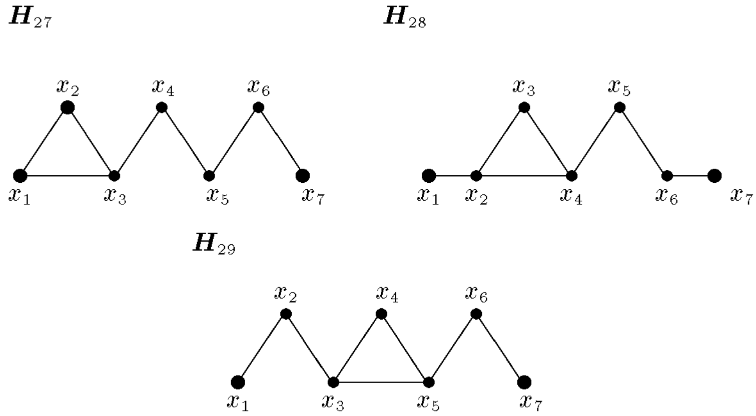

Рис. 11. В G имеется C_3 и нет C_4, C_5, C_6, C_7

Так как подграфы H_s упорядочены и s является минимальным номером, то, предполагая, что b смежна с какими-нибудь двумя вершинами из H_s, $23 \leqslant s \leqslant 29$, во всех остальных случаях получим противоречие либо с допущением о минимальности s, либо с допущением о том, что в H_s нет циклов длины более 3. Приведенное рассуждение исчерпывает все варианты, потенциально «опасные» с точки зрения роста $\tau(S)$.

Таким образом, показано, что в любом рассмотренном подграфе при работе алгоритма не происходит возрастания $\tau(S)$. Результатом работы алгоритма на любом из перечисленных подграфов, как упоминалось выше, является P_8-полуядро, существование которого в графе эквивалентно существованию P_8-ядра. Тем самым теорема доказана.

Из доказанной теоремы получаем следствие о том, что любой граф G является $(7, \tau(G) - 7)$-разбиваемым.

Это следствие позволяет доказать теорему 2 о том, что любой граф G с $\tau(G) \leqslant 15$ является τ-разбиваемым.

Авторы выражают свою искреннюю признательность А. В. Косточке, который привлек внимание к этой теме и дал много полезных советов в процессе работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Borowiecki M., Broere I., Frick M., Mihók P., Semanišin G.** A survey of hereditary properties of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 1. P. 5–50.

2. **Broere I., Dorfling M.** The decomposibility of additive of hereditary properties of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. 2000. V. 20, N 2. P. 281–291.
3. **Broere I., Dorfling M., Dunbar J. E., Frick M.** A path(ological) partition problem // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 1. P. 113–125.
4. **Broere I, Frick M., Semanišin G.** Maximal graphs with respect to hereditary properties // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 1. P. 51–66.
5. **Broere I., Hajnal P., Mihók P.** Partition problems and kernels of graphs // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 51–56.
6. **Chartrand G., Geller D. P., Hedetniemi S. T.** A generalization of the chromatic number // Proc. Camb. Phil. Soc. 1968. V. 64, N 2. P. 265–271.
7. **Dunbar J. E., Frick M.** Path kernels and partitions // J. Combin. Math. Combin. Comput. 1999. V. 31. P. 137–149.
8. **Hajnal P.** Graph partitions (на венгер. яз.) // Ph. D. Thesis. Szeged Attila József Univ., 1984.
9. **Laborde J. M., Payan C., Xuong N. H.** Independent sets and longest directed paths in digraphs // Graphs and other combinatorial topics (Prague, 1982). Leipzig: Teubner, 1983. P. 173–177.
10. **Lovász L.** On decomposition of graphs // Studia Sci. Math. Hungar. 1966. V. 1, N 1–2. P. 237–238.
11. **Mihók P.** Problem 4 // Graphs, hypergraphs and matroids. Zielona Góra: Higher College Engrg., 1985. P. 86.
12. **Stiebitz M.** Decomposing graphs under degree constraints // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 321–324.
13. **Vronka J.** Vertex sets of graphs with prescribed properties (на словацком яз.) // Ph. D. Thesis. Košice, Šafárik Univ., 1986.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
13 ноября 2001 г.,
переработанный вариант —
20 февраля 2002 г.