ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2002. Серия 1. Том 9, № 2, 48–90

УДК 519.17

ПОКРЫТИЯ КЛИКАМИ, ФАКТОРЫ И ГРАФЫ С ИЗОМОРФНЫМИ ОКРУЖЕНИЯМИ ВЕРШИН*)

Ю. Л. Орлович

Одна из известных проблем теории графов — проблема окружений — заключается в том, чтобы для данного конечного графа H определить, существует ли связный граф G, в котором окружение каждой вершины порождает подграф, изоморфный графу H. Граф G, удовлетворяющий такому условию, принято называть реализацией графа H. В настоящее время проблема окружений решена для ряда конкретных графов H. Однако до сих пор не разработаны общие методы, которые для графов из каких-либо классов позволяли бы распознавать существование соответствующих им реализаций. Это отчасти объясняется тем, что в классе всех конечных графов проблема окружений алгоритмически неразрешима. В данной статье мы определяем достаточно широкие классы графов, для которых можно построить счетные множества как конечных, так и бесконечных реализаций, и предлагаем методы систематического выявления таких классов.

Введение

Проблемы существования и единственности графа G с заданным значением некоторого инварианта $I(G)$ в теории графов занимают видное место [7, 13]. К ним относится, в частности, известная проблема окружений [6, 32]: задан конечный граф H; существует ли связный граф G, в котором окружение каждой вершины порождает подграф, изоморфный графу H, и если существует, то единственен ли такой граф с точностью до изоморфизма?

Проблема окружений служит классическим примером задачи восстановления [7] и решена для ряда графов H. Она рассматривалась в связи с вопросами теории автоматов [6, с. 59], теории групп [20, 21, 30, 31], теории конечных геометрий [9, 10, 19], алгебраической топологии [15, 27–29] и в связи с приложениями в вычислительной технике [8].

Всюду в работе под *графом* $G = (VG, EG)$ понимается локально конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер; VG

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке INTAS и Правительства Республики Беларусь (проект INTAS–BELARUS 97–0093).

и EG — множества вершин и ребер графа G соответственно. *Окружением* вершины v в графе G называется множество $N(v,G)$ всех вершин из VG, смежных с v. Положим для краткости $N(G) = \{G_v \mid v \in VG\}$, где G_v — подграф графа G, порожденный множеством вершин $N(v,G)$.

Для произвольного конечного графа H возникают следующие задачи [6, 32].

1. *Существование. При каком условии $N(G) = \{H\}$ для некоторого графа G? Другими словами, когда существует какой-либо граф G, реализующий H?*

2. *Единственность. Пусть $N(G_1) = N(G_2) = \{H\}$ для некоторых графов G_1 и G_2. При каком условии следует изоморфизм графов G_1 и G_2 ($G_1 \cong G_2$)?*

Проблему существования и единственности графа G с заданным значением инварианта $N(G)$ называют *проблемой окружений*. Граф G, удовлетворяющий требованию $N(G) = \{H\}$, называется *реализацией* графа H или *графом с изоморфными окружениями вершин*, а H — *реализуемым* графом.

В [2] указаны простые примеры графов H, для которых существуют только бесконечные графы с изоморфными окружениями вершин. Поэтому в дальнейшем естественно различать конечные и бесконечные реализации, т. е. изучать класс $\{G \mid N(G) = \{H\}\}$ при соответствующих глобальных ограничениях на граф G. В этом случае содержательны две следующие задачи.

3. *Проблема конечной (бесконечной) реализуемости. По заданному конечному графу H выяснить, существует ли конечный (бесконечный) связный граф G, реализующий H?*

4. *Задача классификации. Классифицировать конечные (бесконечные) связные графы G такие, что $N(G) = \{H\}$.*

Интересно отметить, что, как было показано В. К. Булитко [4], в классе всех конечных графов проблема бесконечной реализуемости алгоритмически неразрешима, т. е. справедлива

Теорема [4]. *Невозможен алгоритм, распознающий по произвольному конечному графу H, существует ли связный бесконечный граф G, реализующий H.*

Отметим, что утверждение теоремы верно также в ряде других случаев, в частности, когда H — произвольный несвязный, связный, плоский или регулярный конечный граф [4].

Вопрос о том, разрешима ли в общем случае проблема конечной реализуемости, остается открытым (см., например, [16, 24]). В то же время в литературе известны нетривиальные примеры подклассов класса всех

конечных графов, где оба варианта проблемы 3 алгоритмически разрешимы. Например, класс деревьев [3, 17] или более широкий класс связных графов, в которых каждый блок является полным графом [3, 18].

Основная цель настоящей статьи — описать новые классы конечных графов, для которых проблема 3 имеет положительное решение, и предложить методы систематического выявления таких классов.

Предварительно отметим, что все предлагаемые в статье методы основаны на знании геометрии клик реберного графа. Последняя, как известно, описывается теоремой Краусса [23], которая дает глобальную характеризацию реберных графов для графов.

Для произвольного графа G *реберный граф* $L(G)$ определяется следующими условиями: $VL(G) = EG$, вершины e_1 и e_2 смежны в $L(G)$, если и только если ребра e_1 и e_2 смежны в G.

Произвольный полный подграф графа называется *кликой*. Множество вершин клики также называется *кликой*; из контекста должно быть ясно, о чем идет речь. Семейство клик графа G называется *покрытием кликами*, если G является объединением этих клик. Сами клики называются *компонентами* покрытия. Характеризационную теорему из [23] можно сформулировать так.

Теорема [23]. *Граф G изоморфен реберному графу $L(F)$ для подходящего графа F тогда и только тогда, когда существует такое покрытие $\boldsymbol{Q}$ графа G кликами, что каждая вершина графа G входит в одну или ровно в две компоненты покрытия $\boldsymbol{Q}$ и любые две компоненты из $\boldsymbol{Q}$ имеют не более одной общей вершины.*

Основываясь на геометрии «крауссовых покрытий» и структурной теории n-факторов, приходим к целому семейству методов, с помощью которых можно получать счетные множества как конечных, так и бесконечных связных реализаций для графов из некоторых специальных классов. К таким графам, в частности, относятся дизъюнктные объединения реализуемых графов; простые цепи и циклы; треугольные кактусы; некоторые графы, гомеоморфные звездам; графы, в которых каждый блок — клика с нечетным числом вершин, и многие другие.

1. Терминология и предварительные факты

В основном используется терминология из [5]. Отметим лишь некоторые нюансы.

Число $|VG|$ вершин конечного графа G называется его *порядком* и обозначается через $|G|$. Если вершины u и v графа G смежны, то пишем $u \sim v$. Кроме того,

$$N(v, G) = \{u \in VG \mid u \sim v\}$$

— окружение вершины $v \in VG$, $\deg_G v = |N(v,G)|$ — степень вершины v. *Степенью* $\deg G$ регулярного графа G называется степень его вершин. В случае, когда G зафиксирован, $N(v,G)$ и $\deg_G v$ обозначим через $N(v)$ и $\deg v$ соответственно. Если $U \subseteq VG$, то $G(U)$ — подграф графа G, порожденный множеством U; $G - U$ — подграф, получаемый из G удалением вершин множества U. Подграф H графа G будем называть *остовным*, если $VH = VG$. Остовный регулярный подграф степени n называется *n-фактором.*

Для некоторых графов мы используем стандартные обозначения: K_n, O_n, C_n, P_n — соответственно полный граф, пустой граф, простой цикл и простая цепь с n вершинами, $K_{m,n}$ — полный двудольный граф с долями мощности m и n. Кроме того, k-я степень графа G и граф, дополнительный к G, обозначаются через G^k и $\overline{G}$ соответственно. Если G — связный граф, то через nG обозначается граф с n компонентами, каждая из которых изоморфна G. Двудольный граф $G = (V_1, V_2, E)$ состоит из множества вершин $V_1 \cup V_2$ и множества ребер $E \subseteq V_1 \times V_2$. Множества V_1 и V_2 называются *долями* графа G.

Объединение $G_1 \cup G_2$ графов G_1 и G_2 определяется следующим образом:

$$V(G_1 \cup G_2) = VG_1 \cup VG_2, \quad E(G_1 \cup G_2) = EG_1 \cup EG_2.$$

Объединение $G_1 \cup G_2$ называется *дизъюнктным*, если $VG_1 \cap VG_2 = \varnothing$. *Соединением* графов G_1 и G_2 (при условии $VG_1 \cap VG_2 = \varnothing$) называется граф $G_1 + G_2 = \overline{\overline{G}_1 \cup \overline{G}_2}$.

Пусть $G_1 = (VG_1, EG_1)$ и $G_2 = (VG_2, EG_2)$ — два графа. *Произведением* $G_1 \times G_2$, *композицией* $G_1[G_2]$ называются графы, множеством вершин которых является декартово произведение $VG_1 \times VG_2$, а смежность вершин (u_1, u_2) и (v_1, v_2) задается следующими условиями:

- для $G_1 \times G_2$: либо $u_1 = v_1$ и $u_2 \sim v_2$, либо $u_2 = v_2$ и $u_1 \sim v_1$;
- для $G_1[G_2]$: либо $u_1 \sim v_1$, либо $u_1 = v_1$ и $u_2 \sim v_2$.

Дополнительная терминология будет приведена далее в тексте, когда это будет нужно.

В разд. 2–4 окажутся полезными следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть p и q — натуральные числа, $p \geqslant 3$, $q \geqslant 2$. Тогда при любом натуральном числе n существует связный конечный двудольный граф $D_n = (X_n, Y_n, E_n)$ порядка $n(p+q)$, в котором степень каждой вершины $x \in X_n$ равна p, а степень каждой вершины $y \in Y_n$ равна q.*

Доказательство. Для доказательства индуктивно построим последовательность

$$S = (D_1, D_2, \dots, D_i, \dots)$$

связных двудольных графов $D_i = (X_i, Y_i, E_i)$, $|D_i| = i(p+q)$ таких, что степень каждой вершины $x \in X_i$ равна p, а степень каждой вершины $y \in Y_i$ равна q. Положим $D_1 = K_{p,q}$,

$$X_1 = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_q^1\}, \quad Y_1 = \{y_1^1, y_2^1, \dots, y_p^1\},$$
$$E_1 = \{x_j^1 y_k^1 \mid 1 \leqslant j \leqslant q,\ 1 \leqslant k \leqslant p\}.$$

Если граф $D_i = (X_i, Y_i, E_i)$ уже построен и $i \geqslant 1$, то граф $D_{i+1} = (X_{i+1}, Y_{i+1}, E_{i+1})$ определим по следующему правилу:

$$X_{i+1} = X_i \cup \{x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_q^{i+1}\}, \quad Y_{i+1} = Y_i \cup \{y_1^{i+1}, y_2^{i+1}, \dots, y_p^{i+1}\};$$

каждую вершину x_j^{i+1}, $1 \leqslant j \leqslant q$, соединим ребрами со всеми вершинами y_k^{i+1}, $1 \leqslant k \leqslant p$; удалим какое-либо ребро $xy \in E_i$ $(x \in X_i,\ y \in Y_i)$ и ребро $x_1^{i+1} y_1^{i+1}$; наконец, добавим ребра xy_1^{i+1} и yx_1^{i+1}. Легко видеть, что полученный таким образом граф D_{i+1} имеет порядок $(i+1)(p+q)$ и обладает нужными свойствами. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть p и q — натуральные числа, $p \geqslant 3$, $q \geqslant 2$. Тогда при любом четном натуральном числе $n > 2$ существует связный бесконечный двудольный граф $D_n^\infty = (X_n^\infty, Y_n^\infty, E_n^\infty)$, в котором степень каждой вершины $x \in X_n^\infty$ равна p, а степень каждой вершины $y \in Y_n^\infty$ равна q. При этом D_n^∞ содержит ровно один простой цикл длины n.*

Доказательство. Пусть $q > 2$. Определим связный бесконечный граф L_r^∞ $(r = 1, 2)$, соблюдая следующие правила:

- вершина x_0^r смежна с конечным множеством вершин $x_{i_1}^r$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant p-2$ при $r = 1$ и $1 \leqslant i_1 \leqslant q-2$ при $r = 2$;
- каждая вершина $x_{i_1}^r$ смежна с конечным множеством вершин x_{i_1,i_2}^r, где $1 \leqslant i_2 \leqslant q-1$ при $r = 1$ и $1 \leqslant i_2 \leqslant p-1$ при $r = 2$; затем каждая x_{i_1,i_2}^r смежна с конечным множеством вершин x_{i_1,i_2,i_3}^r, где $1 \leqslant i_3 \leqslant p-1$ при $r = 1$ и $1 \leqslant i_3 \leqslant q-1$ при $r = 2$, и т. д.;
- в общем случае каждая вершина $x_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}^r$ $(k \geqslant 2)$ смежна с конечным множеством вершин $x_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1},i_k}^r$, $1 \leqslant i_k \leqslant p-1$, если $k+r$ четно, и $1 \leqslant i_k \leqslant q-1$, если $k+r$ нечетно, и т. д. (все указанные вершины различны, других вершин и ребер нет).

Пусть $n = 2k$ — натуральное число, $k \geqslant 2$. Каждому четному числу $2i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ поставим в соответствие копию G_{2i} графа L_1^∞, а каждому нечетному числу $2i-1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — копию F_{2i-1} графа L_2^∞. В случае $q = 2$ считаем, что G_{2i} — копия графа L_1^∞, построенного по указанным выше правилам, а F_{2i-1} — одновершинный граф, т. е. $F_{2i-1} = K_1$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Итак, имеем два списка графов

$$G_2, G_4, \dots, G_n \quad \text{и} \quad F_1, F_3, \dots, F_{n-1},$$

где $G_{2i} \cong L_1^\infty$, $F_{2i-1} \cong L_2^\infty$, если $q > 2$, и $G_{2i} \cong L_1^\infty$, $F_{2i-1} = K_1$, если $q = 2$. В каждом графе G_{2i} (F_{2i-1}) выделим вершину x_{2i} (x_{2i-1}) минимальной степени и при условии, что $F_1, G_2, F_3, G_4, \ldots, F_{n-1}, G_n$ в совокупности не имеют общих вершин, построим граф

$$H = F_1 \cup G_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_{n-1} \cup G_n.$$

Теперь граф D_n^∞ получается из H добавлением ребер $x_i x_{i+1}$ ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) и $x_n x_1$.

Так как D_n^∞ содержит ровно один простой цикл $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$ и длина этого цикла четна, то согласно теореме Кенига (см. [11, с. 134]) D_n^∞ — двудольный граф. Разбиение множества вершин графа D_n^∞ на доли X_n^∞ и Y_n^∞ строится следующим способом. Зафиксируем некоторую вершину степени p из VD_n^∞, например x_2. Тогда X_n^∞ состоит из вершины x_2 и всех вершин с четным расстоянием от x_2, а Y_n^∞ — с нечетным расстоянием. Учитывая способ построения графов L_1^∞ и L_2^∞, легко видеть, что степень каждой вершины $x \in X_n^\infty$ окажется равной p, а степень каждой вершины $y \in Y_n^\infty$ — равной q. Лемма 2 доказана.

2. О реализуемости дизъюнктных объединений графов

Известно [22], что если G_1 и G_2 — реализации графов H_1 и H_2 соответственно, то произведение $G_1 \times G_2$ — реализация дизъюнктного объединения $H_1 \cup H_2$. Основным результатом настоящего раздела является утверждение, что условие конечности реализаций G_1 и G_2 вместе с условием $\max\{|H_1|, |H_2|\} \geqslant 2$ достаточны для существования счетных множеств как конечных, так и бесконечных связных реализаций графа $H_1 \cup H_2$.

Теорема 1. *Пусть H_1 и H_2 — конечные графы,* $\max\{|H_1|, |H_2|\} \geqslant 2$. *Далее пусть для каждого $i = 1, 2$ существует конечная реализация графа H_i. Тогда можно указать счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций дизъюнктного объединения $H_1 \cup H_2$.*

Доказательство. Пусть G_1 (G_2) — конечная связная реализация графа H_1 (H_2), и пусть $D = (X, Y, E)$ — связный (не обязательно конечный) двудольный граф, в котором степень каждой вершины $x \in X$ равна $|G_1| \geqslant 3$, а степень каждой вершины $y \in Y$ равна $|G_2| \geqslant 2$. Существование такого графа гарантируется леммой 1 или леммой 2. Напомним, что семейство

$$\boldsymbol{Q} = \{Q_i \mid i \in I\}$$

клик графа G есть покрытие, если каждая вершина и каждое ребро графа G входят в некоторую Q_i. Клики Q_i — компоненты семейства $\boldsymbol{Q}$.

Определим покрытие $\boldsymbol{Q}$ графа $G \cong L(D)$ следующим способом. Пусть $Q(v)$ обозначает множество всех ребер графа D, инцидентных вершине $v \in VD$. Положим

$$\boldsymbol{Q}^1 = \{Q(x) \mid x \in X\}, \quad \boldsymbol{Q}^2 = \{Q(y) \mid y \in Y\}.$$

Тогда, очевидно, разбиение $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^1 \cup \boldsymbol{Q}^2$ является покрытием графа G, обладающим следующими тремя свойствами (см. теорему Краусса во введении):

1) каждая вершина графа G входит ровно в две такие компоненты Q_i, Q_j покрытия $\boldsymbol{Q}$, что $Q_i \in \boldsymbol{Q}^1$, $Q_j \in \boldsymbol{Q}^2$;
2) никакие две компоненты не имеют более одной общей вершины;
3) каждая компонента из $\boldsymbol{Q}^1$ ($\boldsymbol{Q}^2$) содержит $|G_1|$ ($|G_2|$) вершин.

Пусть Q_i — произвольная компонента покрытия $\boldsymbol{Q}$ графа G. Опираясь на свойство 3, в порожденном этой кликой подграфе $G(VQ_i)$ выберем остов F_i такой, что $F_i \cong G_1$, если $Q_i \in \boldsymbol{Q}^1$, и $F_i \cong G_2$, если $Q_i \in \boldsymbol{Q}^2$. Выполним теперь следующее преобразование графа G: удалим из него те и только те ребра подграфа $G(VQ_i)$, которые не вошли в множество EF_i. Легко видеть, что полученный в результате такого преобразования граф будет связным. Применив указанное преобразование к каждой из оставшихся компонент покрытия $\boldsymbol{Q}$, получим связный, регулярный степени $\deg G_1 + \deg G_2$ граф, который обозначим через G^*.

Покажем, что G^* — реализация графа $H_1 \cup H_2$. В силу предыдущего достаточно проверить, что для любой вершины $x \in VG$ между множествами $VQ_i \setminus \{x\}$ и $VQ_j \setminus \{x\}$ нет ребер графа G, где $VQ_i \cap VQ_j = \{x\}$. Пусть, напротив, существует такое ребро $uv \in EG$, что $u \in VQ_i \setminus \{x\}$, $v \in VQ_j \setminus \{x\}$. Согласно свойству 2 каждое ребро графа G содержится ровно в одной компоненте покрытия $\boldsymbol{Q}$. Следовательно, найдется такая компонента Q_k, что

$$VQ_i \cap VQ_k = \{u\}, \quad VQ_j \cap VQ_k = \{v\}.$$

Но тогда либо $Q_i, Q_k \in \boldsymbol{Q}^1$, либо $Q_j, Q_k \in \boldsymbol{Q}^2$. Последнее противоречит свойству 1.

Итак, G^* — связная реализация графа $H_1 \cup H_2$. Применив при $p = |G_1|$ и $q = |G_2|$ указанную процедуру к каждому двудольному графу D_n (D_n^∞) из леммы 1 (леммы 2), получим счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа $H_1 \cup H_2$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть $\{H_i \mid i \in I\}$ — конечное семейство конечных графов, $|I| \geqslant 3$, и пусть графы H_i попарно не имеют общих вершин. Кроме того, пусть для каждого $i \in I$ существует конечная реализация*

графа H_i. Тогда имеется счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа $\bigcup\limits_{i\in I} H_i$.

Следствие 2 указывает на тесную связь между конечной реализуемостью графов H и $H \cup O_n$, $n \geqslant 1$.

Следствие 2. *Для конечного графа H следующие утверждения равносильны*:

(i) *существует конечная реализация графа H*;

(ii) *при любом $n \geqslant 1$ существует конечная реализация графа $H \cup O_n$.*

Доказательство. Будем рассматривать ситуацию, когда H отличен от пустого графа, ибо для $H = O_m$, $m \geqslant 1$, следствие тривиально.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть существует конечная реализация графа H. Тогда, взяв полный двудольный граф $K_{n,n}$ в качестве конечной реализации графа O_n, из теоремы 1 следует, что существует конечная реализация графа $H \cup O_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть G — конечная реализация графа $H \cup O_n$, а H' — подграф графа H, порожденный множеством всех неизолированных вершин. Удалив из G все ребра, не входящие ни в один треугольник, получим конечный (в общем случае несвязный) граф, каждая компонента $F \neq K_1$ которого является реализацией графа H'. Отсюда, учитывая представление $H = H' \cup O_m$, $m = |H| - |H'|$, так же, как и в доказательстве (i)$\Rightarrow$ (ii), убеждаемся, что существует конечная реализация графа H. Следствие 2 доказано.

Из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть для конечного графа H не существует конечных реализаций. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(i) *существует бесконечная связная реализация графа H*;

(ii) *для любого $n \geqslant 1$ существует бесконечная связная реализация графа $H \cup O_n$.*

Замечание 1. В общем случае реализуемость дизъюнктного объединения $H_1 \cup H_2$ не является достаточным условием для существования графов G_1 и G_2 таких, что G_i $(i = 1, 2)$ — реализация графа H_i. Примером такого объединения с наименьшим числом вершин служит граф $P_3 \cup K_2$. Действительно, отсутствие каких-либо реализаций для цепи P_3 — хорошо известный факт [1, 6, 15], а один из возможных способов построения целого семейства конечных (бесконечных) реализаций графа $P_3 \cup K_2$ изображен на рис. 1. Этот способ основан на использовании серединно геометрического графа $M(L)$ любого плоского 4-регулярного 2-связного графа L, не содержащего граней, ограниченных тремя ребрами (определение графа $M(L)$ см. в [25, с. 124]).

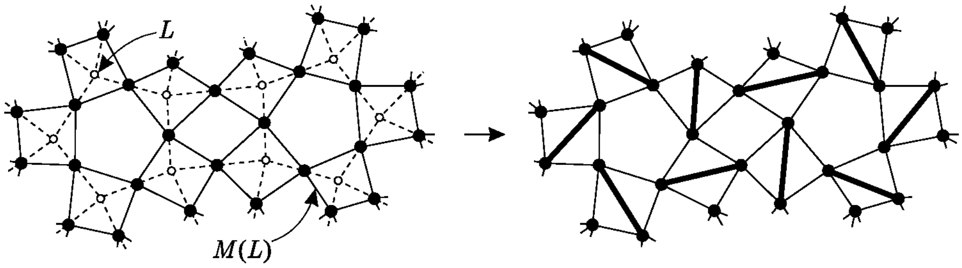

Рис. 1. Фрагмент построения реализации графа $P_3 \cup K_2$

Пусть $\mathscr{H}$ — конечный класс конечных графов. Граф G такой, что $N(G) = \mathscr{H}$, называется *реализацией* класса $\mathscr{H}$. Отметим одну весьма любопытную связь, существующую между конечными реализациями класса $\mathscr{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ и бесконечными реализациями графа $n_1H_1 \cup n_2H_2 \cup \ldots \cup n_kH_k$, где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — произвольные натуральные числа.

Сначала определим операцию *приклеивания* полного графа K_l к фиксированной вершине v графа G следующим образом: результат приклеивания G' получается из G после добавления $l-1$ новых вершин $u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}$ и множества ребер полного графа с множеством вершин $\{v, u_1, u_2, \ldots, u_{l-1}\}$. Тем самым $G' = G \cup K_l$, $VG \cap VK_l = \{v\}$.

Теорема 2. *Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_k$ $(k \geqslant 1)$ — конечные попарно неизоморфные связные графы, $VH_1 \cap VH_2 \cap \ldots \cap VH_k = \varnothing$, и пусть существует такой связный конечный граф G, что $N(G) = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$. Тогда при любых натуральных числах $n_1, n_2, \ldots, n_k$ имеется связная бесконечная реализация графа $n_1H_1 \cup n_2H_2 \cup \ldots \cup n_kH_k$.*

Доказательство. Пусть граф G такой, как указано в формулировке теоремы, и пусть $H \cong n_1H_1 \cup \ldots \cup n_kH_k$, где $n_1, \ldots, n_k$ — произвольные натуральные числа. Для доказательства существования связного бесконечного графа G_0 такого, что $N(G_0) = \{H\}$, сначала индуктивно построим последовательность

$$S = (G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots)$$

связных конечных графов G_i таких, что $N(G_1) = N(G)$ и $N(G_i) = N(G) \cup \{H\}$ для $i \geqslant 2$. Положим $G_1 \cong G$. Пусть граф G_i уже построен, $i \geqslant 1$, и пусть все вершины его занумерованы последовательными натуральными числами, а окружение каждой вершины $u \in VG_i$ порождает подграф, изоморфный либо графу H, либо графу H_j для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$, причем существует такая вершина $v \in VG_i$, что $G_i(N(v))$ не изоморфен H.

В графе G_i выберем такую вершину w с наименьшим номером, что $G_i(N(w))$ не изоморфен графу H. Не исключая общности рассуждений, будем считать, что $G_i(N(w)) \cong H_k$. К вершине w приклеим

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 1$$

клик $Q_1^i, \ldots, Q_n^i$ порядка $|G|$, для каждой из которых w — единственная вершина, общая с графом G_i. Любые две такие клики не должны иметь общих ребер. Рассмотрим теперь граф Q, состоящий из вершин и ребер клик $Q_1^i, \ldots, Q_n^i$, и элементы множества $VQ \setminus \{w\}$ занумеруем последовательными натуральными числами, превосходящими максимальный среди номеров вершин графа G_i.

Пусть Q_m^i $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — произвольная максимальная (по включению) клика из Q. В этой клике выберем остовный подграф F_m^i такой, что $F_m^i \cong G$ и $F_m^i(N(w)) \cong H_j$, где $j = 1$ при $1 \leqslant m \leqslant n_1$, а во всех остальных случаях индекс j удовлетворяет неравенствам

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1} < m \leqslant n_1 + n_2 + \ldots + n_j.$$

Выполним следующее преобразование графа Q: в этом графе удалим те и только те ребра из подграфа $Q(VQ_m^i)$, которые не вошли в множество EF_m^i. Применив последовательно указанное преобразование к каждой из оставшихся максимальных клик графа Q, получим связный конечный граф, который обозначим через G_{i+1}, причем

$$VG_{i+1} = VG_i \cup VQ_1^i \cup \ldots \cup VQ_n^i, \quad EG_{i+1} = EG_i \cup EF_1^i \cup \ldots \cup EF_n^i.$$

Легко видеть, что $G_{i+1}(N(w)) \cong H$. В то же время для каждой вершины $u \in VG_{i+1}$, $u \neq w$, имеем $G_{i+1}(N(u)) \cong G_i(N(u))$, и если $v \in (VQ_1^i \cup \ldots \cup VQ_n^i) \setminus \{w\}$, то $G_{i+1}(N(v)) \cong H_j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Отсюда и из выполненных построений вытекает, что искомым графом G_0 является граф со счетным множеством вершин VG_0 и счетным множеством ребер EG_0:

$$VG_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} VG_i, \quad EG_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} EG_i.$$

Действительно, для каждой вершины $u \in VG_0$ можно указать такое наименьшее число i_0, что $u \in VG_i$ при всех $i \geqslant i_0$. Следовательно, вершина u имеет некоторый номер

$$l \in \{|G| + n(|G| - 1)(i_0 - 1) - \varepsilon \mid \varepsilon = 0, 1, \ldots, n(|G| - 1) - 1\}.$$

Но тогда по построению имеем $G_{l+1}(N(u)) \cong H$, а так как в дальнейшем окружение вершины u сохраняется, то G_0 — искомый граф. Теорема 2 доказана.

Имеются примеры, которые показывают, что в теореме 2 условие бесконечной реализуемости графа $n_1H_1 \cup n_2H_2 \cup \ldots \cup n_kH_k$ нельзя заменить условием конечной реализуемости. Действительно, если рассмотреть граф $K_1 + K_{1,p}$ ($p \geqslant 3$) такой, что $N(K_1 + K_{1,p}) = \{K_2, K_{1,p}\}$, и положить $n_1 = n_2 = 1$, то в силу [2] (см. также разд. 3) оказывается, что не существует конечных реализаций графа $K_{1,p} \cup K_2$. В то же время согласно теореме 2 можно указать бесконечную связную реализацию графа $K_{1,p} \cup K_2$.

Применяя теорему 2, получаем следующее утверждение (см. также [22]).

Следствие 4. *Пусть H — произвольный конечный граф, $N(H) = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$. Тогда существует связная бесконечная реализация графа $H \cup H'$, где $H' \cong H'_1 \cup H'_2 \cup \ldots \cup H'_k$ и $H'_i \cong K_1 + H_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

В частности, из следствия 4 вытекает

Следствие 5. *Каждый связный конечный граф является компонентой некоторого реализуемого графа.*

3. Реализации с отмеченными 1-факторами

Опишем общую рекурсивную процедуру, позволяющую строить счетные множества конечных (бесконечных) связных реализаций для графов из некоторых специальных классов. Эта процедура окажется весьма полезным инструментом при получении основных структурных результатов данного раздела.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее определение из [15].

Определение 1. Пусть G — связная реализация графа H, x — фиксированная вершина из VH. Далее пусть $\boldsymbol{M}$ — паросочетание в графе G (произвольный регулярный подграф степени 1 графа G). Паросочетание $\boldsymbol{M}$ называется *x-отмеченным,* если имеется такое семейство изоморфизмов

$$\boldsymbol{\Theta} = \{\theta_v \mid VG_v \to VH,\ v \in VG\}, \tag{1}$$

что $\theta_v(N(v, \boldsymbol{M})) = x$ для каждой вершины $v \in V\boldsymbol{M}$. Если $V\boldsymbol{M} = VG$, паросочетание $\boldsymbol{M}$ будем называть *x-отмеченным 1-фактором.*

Для конечных реализаций, допускающих отмеченные 1-факторы, справедлива

Теорема 3. *Пусть H_1, H_2 — конечные графы, x_1 и x_2 — фиксированные вершины из VH_1 и VH_2 соответственно, H — такой граф, что $VH = VH_1 \cup VH_2$, $EH = EH_1 \cup EH_2$ и $VH_1 \cap VH_2 = \{x\}$, где*

$x = x_1 = x_2$. Далее пусть при каждом $i = 1, 2$ существует конечная реализация G_i графа H_i, содержащая x_i-отмеченный 1-фактор, при этом

$$\min\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 4, \quad \max\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 6.$$

Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа H, что каждая реализация из этого множества содержит x-отмеченный 1-фактор.

Доказательство. Сохраняя обозначения теоремы 1, продолжим рассмотрение реберного графа $G \cong L(D)$ связного двудольного графа $D = (X, Y, E)$, в котором степени всех вершин доли X равны $|G_1|/2 \geqslant 3$, а степени всех вершин доли Y равны $|G_2|/2 \geqslant 2$. Заменив каждую вершину v в графе G двумя вершинами (v, α), (v, β) и объявив вершины (a, b) и (c, d) смежными тогда и только тогда, когда либо $a \sim c$, либо $a = c$, получим граф $G[K_2]$, который для краткости обозначим через G^*. Таким образом, каждой вершине v графа G соответствует порожденный подграф $K_2 = G^*(\{(v, \alpha), (v, \beta)\})$ графа G^*, и если в G^* стянуть единственное ребро каждого такого подграфа, то получим граф G.

Далее каждому ребру $e_v = (v, \alpha)(v, \beta)$ в G^* соответствует пара полных подграфов Q_i^* и Q_j^* этого графа, которые пересекаются в точности по e_v, т. е.

$$VQ_i^* \cap VQ_j^* = \{(v, \alpha), (v, \beta)\}, \quad EQ_i^* \cap EQ_j^* = \{e_v\}.$$

Эти подграфы назовем *сопряженными*, а ребро e_v — *особым* ребром (соответствующим паре сопряженных подграфов Q_i^* и Q_j^*). Легко видеть, что семейство всех сопряженных подграфов графа G^* образует покрытие $\boldsymbol{Q}^*$ графа G^*. В то же время каждой такой паре сопряженных подграфов Q_i^* и Q_j^*, что

$$VQ_i^* \cap VQ_j^* = \{(v, \alpha), (v, \beta)\}, \tag{2}$$

в графе G соответствует пара компонент Q_i и Q_j покрытия $\boldsymbol{Q}$ таких, что $VQ_i \cap VQ_j = \{v\}$. Верно и обратное, а именно каждой паре таких компонент $Q_i, Q_j \in \boldsymbol{Q}$ графа G, что $VQ_i \cap VQ_j = \{v\}$, в графе G^* соответствует пара сопряженных подграфов $Q_i^*, Q_j^* \in \boldsymbol{Q}^*$ таких, что справедливо равенство (2). Таким образом, покрытие $\boldsymbol{Q} = \{Q_i \mid i \in I\}$ графа G индуцирует покрытие $\boldsymbol{Q}^* = \{Q_i^* \mid i \in I\}$ графа G^* или, что то же самое, изоморфизм $G^* \cong G[K_2]$ задает биекцию

$$\varphi : \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}, \quad Q_i^* \mapsto Q_i.$$

С помощью биекции φ и разбиения $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^1 \cup \boldsymbol{Q}^2$ из теоремы 1 построим разбиение $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}_1^* \cup \boldsymbol{Q}_2^*$ следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_1^* = \{Q_i^* \mid \varphi(Q_i^*) \in \boldsymbol{Q}^1,\ i \in I\}, \quad \boldsymbol{Q}_2^* = \{Q_i^* \mid \varphi(Q_i^*) \in \boldsymbol{Q}^2,\ i \in I\}.$$

Пусть Q_i^* — произвольная компонента покрытия $\boldsymbol{Q}^*$ графа G^*. В порожденном этой кликой подграфе $G^*(VQ_i^*)$ выберем остов F_i такой, что $F_i \cong G_1$, если $Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_1^*$, и $F_i \cong G_2$, если $Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_2^*$, причем в первом случае особые ребра компоненты Q_i^* суть ребра x_1-отмеченного 1-фактора графа $G_1 \cong F_i$, а во втором — x_2-отмеченного 1-фактора графа $G_2 \cong F_i$. Выполним следующее преобразование графа G^*: удалим из него те и только те ребра подграфа $G^*(VQ_i^*)$, которые не вошли в множество EF_i. Легко видеть, что граф, полученный в результате такого преобразования, будет связным. Применив указанное преобразование к каждой оставшейся компоненте покрытия $\boldsymbol{Q}^*$, получим связный, регулярный степени $\deg G_1 + \deg G_2 - 1$ граф, который обозначим через G'. Будем говорить, что граф G' получен из графа G^* с помощью *операции* π.

Теперь покажем, что G' — реализация графа H. С этой целью рассмотрим произвольную вершину $u \in VG'$. Пусть u — образ вершины $(v, \gamma) \in VG^*$, где $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$, после применения операции π к графу G^*. Тогда согласно предыдущему найдется такая вершина $w \in VG'$, смежная с u, что ее прообразом относительно π является вершина $(v, \alpha) \in VG^*$, если $\gamma = \beta$, и вершина $(v, \beta) \in VG^*$, если $\gamma = \alpha$. В частности, прообразом ребра $e'_v = uw \in EG'$ является особое ребро $e_v = (v, \alpha)(v, \beta)$ графа G^*, соответствующее паре сопряженных подграфов $Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_1^*$ и $Q_j^* \in \boldsymbol{Q}_2^*$ этого графа. Далее компонентам Q_i^* и Q_j^* графа G' соответствуют такие порожденные подграфы $G'(VQ_i^*) = A$ и $G'(VQ_j^*) = B$, что $A \cong G_1$, $B \cong G_2$ и $VA \cap VB = \{u, w\}$, $EA \cap EB = \{uw\}$. Кроме того, понятно, что между множествами $VA \setminus \{u, w\}$ и $VB \setminus \{u, w\}$ нет ребер графа G'.

Имея в виду предыдущие построения, получаем, что ребро $e'_v = uw$ одновременно содержится в x_1-отмеченном 1-факторе графа A и x_2-отмеченном 1-факторе графа B. Следовательно, с вершинами u, w можно связать такие изоморфизмы

$$\theta_u^1 : VA_u \to VH_1,\ \ \theta_w^1 : VA_w \to VH_1,\ \ \theta_u^2 : VB_u \to VH_2,\ \ \theta_w^2 : VB_w \to VH_2,$$

что $\theta_u^1(w) = \theta_w^1(u) = x_1$ и $\theta_u^2(w) = \theta_w^2(u) = x_2$. С помощью биекций θ_u^1, θ_u^2, θ_w^1, θ_w^2 построим отображения $\theta_u : VA_u \cup VB_u \to VH$ и $\theta_w : VA_w \cup VB_w \to VH$, положив

$$\theta_{u|VA_u \setminus \{w\}} = \theta_u^1, \quad \theta_{u|VB_u \setminus \{w\}} = \theta_u^2, \quad \theta_u(w) = x,$$
$$\theta_{w|VA_w \setminus \{u\}} = \theta_w^1, \quad \theta_{w|VB_w \setminus \{u\}} = \theta_w^2, \quad \theta_w(u) = x.$$

Легко проверить, что θ_u (θ_w) — изоморфизм графа G'_u (G'_w) на граф H. Отсюда в силу произвольности выбора вершины u вытекает, что G' — реализация графа H. С другой стороны, так как $\theta_u(w) = \theta_w(u) = x$, то

ребро $e'_v = uw$ в G' образует x-отмеченное паросочетание. Это же верно и для образа каждого особого ребра графа G^*. Взяв объединение $\bigcup_{v \in VG} e'_v$ всех таких образов, получим x-отмеченный 1-фактор графа G'.

Итак, G' — связная реализация графа H, обладающая x-отмеченным 1-фактором. Применив при $p = |G_1|/2$ и $q = |G_2|/2$ указанную процедуру к каждому двудольному графу D_n (D_n^∞) из леммы 1 (леммы 2), построим такое счетное множество конечных (бесконечных) реализаций графа H, что каждая реализация из этого множества содержит x-отмеченный 1-фактор. Теорема 3 доказана.

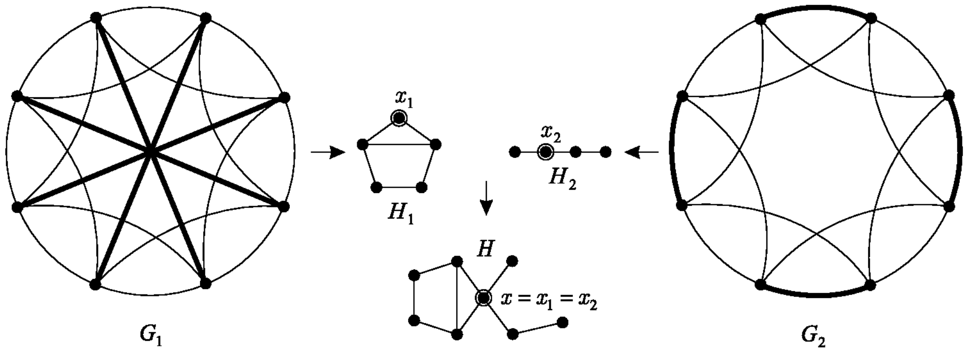

Рис. 2. Построение реализуемого графа H

Пример 1. На рис. 2 теорема 3 проиллюстрирована применительно к реализациям $G_1 \cong \overline{C}_8$ и $G_2 \cong C_8^2$ графов $H_1 \cong \overline{P}_5$ и $H_2 \cong P_4$ соответственно. Ребра $x_1(x_2)$-отмеченного 1-фактора графа G_1 (G_2) указаны жирными линиями, а вершина $x_1(x_2)$ графа H_1 (H_2), отмеченная этим фактором, обведена кружком. Отождествив вершину x_1 графа H_1 с вершиной x_2 графа H_2, получим граф H, для которого в силу теоремы 3 существует счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций, причем каждая реализация из этого множества содержит x-отмеченный 1-фактор, где $x \in VH$ и $x = x_1 = x_2$.

Рассмотрим еще несколько утверждений, связанных с теоремой 3.

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Тогда через $P_{\infty,\infty}$ обозначим двустороннюю бесконечную простую цепь, в которой $VP_{\infty,\infty} = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $EP_{\infty,\infty} = \{x_k x_{k+1} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Легко проверить, что для связного графа G верны следующие предложения:

- G — реализация графа K_{2n-1} тогда и только тогда, когда $G \cong K_{2n}$, $n \geqslant 1$.
- G — конечная (бесконечная) реализация графа $K_1 + 2K_2$ тогда и только тогда, когда $G \cong C_n[K_2]$, $n \geqslant 4$, ($G \cong P_{\infty,\infty}[K_2]$).

Далее пусть $B(H)$ и $C(H)$ — множества блоков и точек сочленения графа H соответственно, и пусть $\mathscr{B}$ — класс всех конечных связных графов, в которых каждый блок — клика с нечетным числом вершин, причем граф K_1+2K_2 и клики $\{K_{2n-1} \mid n \geqslant 1\}$ не принадлежат $\mathscr{B}$. Тогда справедлива

Теорема 4. *Пусть $H \in \mathscr{B}$. Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа H, что для любой вершины $v \in VH$ каждая реализация из этого множества обладает v-отмеченным 1-фактором.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу l ($l \geqslant 2$) блоков в графе H. Пусть $l = 2$. Тогда граф $H \in \mathscr{B}$ можно представить в виде объединения нечетных клик (блоков) B_1 и B_2, в каждой из которых имеется только одна точка сочленения u. Поэтому

$$H = B_1 \cup B_2, \quad VB_1 \cap VB_2 = \{u\}.$$

Ясно, что для графа B_i ($i = 1, 2$) существует конечная реализация — клика порядка $n_i = |B_i| + 1$, содержащая u-отмеченный 1-фактор. Поэтому, принимая во внимание определение класса $\mathscr{B}$, имеем

$$\min\{n_1, n_2\} \geqslant 4, \quad \max\{n_1, n_2\} \geqslant 6.$$

Отсюда на основании теоремы 3 заключаем, что для H можно указать счетное множество как конечных, так и бесконечных связных реализаций. Более того, в силу той же теоремы 3 каждая такая реализация G содержит u-отмеченный 1-фактор. Таким образом, в случае $l = 2$ осталось установить существование x-отмеченного 1-фактора в графе G для любой вершины x, отличной от u.

Итак, пусть G — реализация графа H, построенная из K_{n_1} и K_{n_2} с использованием метода, описанного в доказательстве теоремы 3. Тогда, принимая во внимание обозначения из теоремы 3, заключаем, что $G \cong G^*$, причем особые ребра графа G^* — суть ребра u-отмеченного 1-фактора графа G. Далее из построения графа G, следует, что каждому блоку $B_k \in B(H)$ ($1 \leqslant k \leqslant l$) можно поставить в биективное соответствие семейство

$$\boldsymbol{Q}(B_k) = \{Q_i^k \mid i \in I_k\} \tag{3}$$

клик этого графа, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) множества VQ_i^k, $i \in I_k$, образуют разбиение VG и $|VQ_i^k| = |B_k|+1$;
2) если $1 \leqslant k_1, k_2, k \leqslant l$ и $Q_i^k \in \boldsymbol{Q}(B_{k_1}) \cap \boldsymbol{Q}(B_{k_2})$, то $k_1 = k_2 = k$;
3) $\boldsymbol{Q}(B_1) \cup \ldots \cup \boldsymbol{Q}(B_l)$ — покрытие графа G.

Пусть теперь x — вершина графа H, и пусть для определенности $x \in VB_k \backslash C(H)$ ($1 \leqslant k \leqslant l$). Рассмотрим произвольную клику $Q_i^k \in \boldsymbol{Q}(B_k)$

и в этой клике выберем 1-фактор M_i^k такой, чтобы пересечение EM_i^k с множеством особых ребер компоненты Q_i^k было пустым. Ясно, что, применив эту процедуру к каждой из оставшихся клик семейства $\boldsymbol{Q}(B_k)$, получим x-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_x = \bigcup\limits_{i \in I_k} M_i^k$ в графе G. С другой стороны, известно, что полный граф $G(VQ_i^k) \cong K_{2m}$ $(2m = |B_k| + 1,\ i \in I_k)$ 1-факторизуем, т. е. является объединением $2m-1$ реберно непересекающихся 1-факторов. Отсюда и из предыдущего вытекает следующее:

4) для каждой вершины $x \in VB_k \setminus C(H)$ $(1 \leqslant k \leqslant l)$ существует x-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_x$ графа G такой, что $E\boldsymbol{M}_x \subset \bigcup\limits_{i \in I_k} EQ_i^k$;

5) для каждой вершины $x \in C(H)$ существует x-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_x$ графа G такой, что $E\boldsymbol{M}_x = \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathscr{E}(\boldsymbol{Q}(B_{k_j}))$. (Здесь $B_{k_1}, \dots, B_{k_m}$ $(1 \leqslant k_1, \dots, k_m \leqslant l)$ — полный список блоков графа H, содержащих вершину x, а $\mathscr{E}(\boldsymbol{Q}(B_k)) = \bigcup\limits_{i \in I_k} EQ_i^k$.

Таким образом, для любых двух вершин $x, y \in VH$ $(x \neq y)$ граф G одновременно содержит x-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_x$ и y-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_y$ такие, что $E\boldsymbol{M}_x \cap E\boldsymbol{M}_y = \varnothing$. Следовательно,

$$G = \bigcup_{x \in VH} \boldsymbol{M}_x$$

и в случае $l = 2$ теорема 4 доказана.

Теперь пусть $l > 2$, и пусть заключение теоремы вместе со свойствами 1–5 верны для графов из $\mathscr{B}$ с числом блоков $l-1$. Покажем, что они верны и для графа $H \in \mathscr{B}$, состоящего из l блоков $B_1, B_2, \dots, B_l$. Согласно [5, с. 141] существует хотя бы один концевой блок $B \in B(H)$, имеющий точку сочленения v. Не ограничивая общности, считаем, что $B = B_l$. Поскольку подграф

$$H' = H - (B_l - v) \in \mathscr{B}$$

содержит $l-1$ блоков, то по предположению индукции для H' можно указать счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций, для которых выполнены свойства 1–5. Следовательно, согласно свойствам 4 и 5 существует такая конечная реализация G' графа H', в которой найдется v-отмеченный 1-фактор. Точно так же граф B_l обладает конечной реализацией (клика порядка $n = |B_l| + 1$), содержащей v-отмеченный 1-фактор. Поэтому объединение $(H - (B_l - v)) \cup B_l$, изоморфное графу H, на основании теоремы 3 имеет счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций, причем любая реализация G из этого множества содержит v-отмеченный 1-фактор.

По предположению индукции каждому блоку $B_k \in B(H')$ $(1 \leqslant k \leqslant l-1)$ можно поставить в биективное соответствие семейство (3) клик графа G', удовлетворяющих требованиям 1–3. Это же верно, как легко проследить, для графа G и любого блока $B_k \in B(H)$ $(1 \leqslant k \leqslant l)$, ибо G построен из G' и K_n с помощью метода, описанного в доказательстве теоремы 3. Пусть теперь $x \in VB_l \setminus \{v\}$. Тогда, рассмотрев последовательно все клики Q_i^l $(i \in I_l)$ семейства $\boldsymbol{Q}(B_l)$ и выбрав в них 1-факторы M_i^l так, чтобы особые ребра компонент Q_i^l не вошли в EM_i^l, получим x-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_x = \bigcup\limits_{i \in I_l} M_i^l$ графа G. А так как граф $G(VQ_i^l)$ 1-факторизуем, то свойство 4 выполняется для любой вершины $x \in VB_l \setminus \{v\}$.

Наконец, используя предположение индукции и метод построения графа G, нетрудно убедиться в том, что свойство 4 выполняется для любой вершины $x \in VB_k \setminus C(H)$ $(1 \leqslant k \leqslant l-1)$, а свойство 5 — для любой точки сочленения $x \in C(H)$, включая вершину v (детали доказательства опускаем). Теорема 4 доказана.

Под *кактусом* понимается связный граф, в котором нет ребер, лежащих более чем на одном простом цикле. Кактус, у которого каждое ребро принадлежит треугольнику, называется *треугольным* кактусом.

Применяя теорему 4, получаем

Следствие 6. *Пусть H — треугольный кактус, и пусть $H \in \mathscr{B}$. Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа H, что для любой вершины $v \in VH$ каждая реализация из этого множества содержит v-отмеченный 1-фактор.*

Далее пусть $VP_n = \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $EP_n = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

Замечание 2. В [1, 15] установлено, что реализации цепи P_n существуют тогда и только тогда, когда $n = 2$ или $n \geqslant 4$. Если $n = 2$, то клика K_3 — единственная связная реализация графа P_2. Если же $n = 4$ и G — конечная (бесконечная) связная реализация графа P_4, то $G \cong C_n^2$, $n \geqslant 7$, $(G \cong P_{\infty,\infty}^2)$. Кроме того, при каждом четном $n \geqslant 8$ в графе C_n^2 можно указать v_1-отмеченный 1-фактор. Существование счетного множества конечных (бесконечных) реализаций P_n-цепи, $n \in \{5, 6\}$, содержащих v_1-отмеченные 1-факторы, можно проследить по работам [1, 15].

Обобщая сказанное в замечании 2, получаем

Следствие 7. *Имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций цепи P_n, $n \geqslant 7$, что каждая реализация из этого множества обладает v_1-отмеченным 1-фактором.*

Доказательство. Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 7$. Тогда в силу замечания 2 достаточно указать метод построения счетного

множества конечных (бесконечных) связных реализаций цепи P_n на основе произвольной конечной реализации цепи P_{n-3}. Понятно, что каждая из этих реализаций должна содержать v_1-отмеченный 1-фактор. Ключевую роль в предлагаемом ниже методе будет играть граф C_8^2 — наименьшая реализация цепи P_4, содержащая v_1-отмеченный 1-фактор (см. рис. 2).

Итак, пусть $G_1 \cong C_8^2$, G_2 — конечная связная реализация цепи P_{n-3}, и пусть G_2 имеет v_1-отмеченный 1-фактор. Тогда, применив к графам G_1 и G_2 теорему 3, получим счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций цепи P_n. Кроме того, как следует из теоремы 3, каждая реализация G из этого множества содержит v_4-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}(G)$. Теперь покажем, как можно использовать $\boldsymbol{M}(G)$ для нахождения v_1-отмеченного 1-фактора в графе G. Для этого рассмотрим произвольный порожденный подграф F_i графа G, изоморфный графу G_1 и такой, что

$$F_i = \pi(Q_i^*), \quad i \in I.$$

Здесь Q_i^* — компонента покрытия $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}_1^* \cup \boldsymbol{Q}_2^*$ графа G^*, которая является прообразом F_i относительно операции π, описанной в доказательстве теоремы 3, а $I = \{i \mid Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_1^*\}$.

Из построения графа G следует, что $EF_i \cap E\boldsymbol{M}(G)$ есть множество ребер v_1-отмеченного 1-фактора графа F_i. Далее, исходя из изоморфизма $F_i \cong C_8^2$ и структурных свойств графа C_8^2, заключаем, что ребра e_1, e_2, e_3, e_4 (рис. 3), входящие в множество $EF_i \cap E\boldsymbol{M}(G)$, можно так разбить на пары $e_1 = a_1b_1$, $e_2 = a_2b_2$ и $e_3 = a_3b_3$, $e_4 = a_4b_4$, что $a_1 \sim b_1 \sim a_2 \sim b_2 \sim a_1$, $a_3 \sim b_3 \sim a_4 \sim b_4 \sim a_3$ и $F_i(\{a_1, b_1, a_2, b_2\}) \cong F_i(\{a_3, b_3, a_4, b_4\}) \cong C_4$.

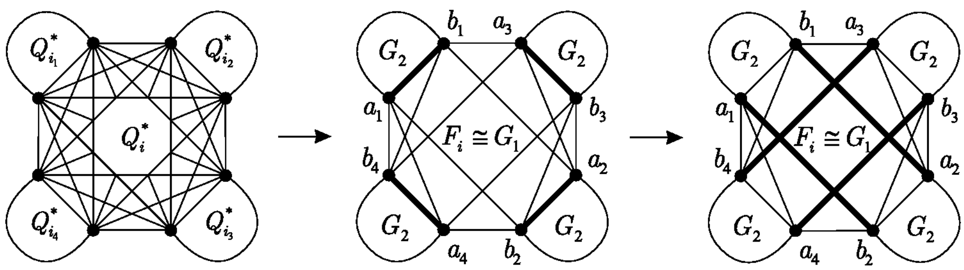

Рис. 3. Построение v_1-отмеченного 1-фактора графа

Пусть $M_i = \{a_1b_2, a_2b_1, a_3b_4, a_4b_3\}$. Тогда, как нетрудно видеть, найдется такое семейство изоморфизмов

$$\{\theta_v \mid VG_v \to VP_n, \ v \in VF_i\},$$

что $\theta_v(N(v, M_i)) = v_1$ для каждой вершины $v \in VF_i$ (см. рис. 3). Другими словами, подмножество $EM_i \subset EF_i$, покрывающее все вершины

графа F_i, в графе G образует v_1-отмеченное паросочетание. Вместе с тем множества VF_i $(i \in I)$ образуют разбиение множества VG. Поэтому, применив последовательно указанную процедуру к каждому из оставшихся графов семейства $\{F_i \mid i \in I\}$, получим v_1-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M} = \bigcup\limits_{i \in I} M_i$ графа G. Следствие 7 доказано.

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — натуральные числа, $m \geqslant 3$. Через $S_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ обозначим граф, который получается из $K_{1,m}$ $(EK_{1,m} = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\})$ $(k_i - 1)$-кратным подразбиением ребра e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Вершина степени m в графе $S_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ называется *центральной*.

Из общей теоремы 3 и следствия 7 вытекают следующие результаты (см. также [15, 22]).

Следствие 8. *Пусть n, p — натуральные числа, $n \geqslant 7$, $p \in \{4, 5, \ldots, \lceil n/2 \rceil\}$. Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций простой цепи P_n, что в каждой реализации из этого множества имеется v_p-отмеченный 1-фактор.*

Следствие 9. *Пусть v — центральная вершина графа $S_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, и пусть*

$$\min\{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \geqslant 3.$$

Тогда для $S_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ можно указать такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций, что в каждой реализации из этого множества имеется v-отмеченный 1-фактор.

Следствие 10. *Для любых натуральных чисел $p \geqslant 2$ и $q \geqslant \lceil p/2 \rceil$ имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа $H_{p,q} \cong K_{1,p} \cup qK_2$, что в каждой реализации из этого множества имеется v-отмеченный 1-фактор, где v — вершина степени p в графе $H_{p,q}$.*

Доказательство. Понятно, что достаточно убедиться в справедливости утверждения лишь для значений $q = \lceil p/2 \rceil$. Пусть сначала $p = 2$ и $q = 1$. Тогда существование счетного множества конечных (бесконечных) реализаций графа $H_{2,1}$ вытекает из рассмотренного в разд. 2 способа построения реализаций графа $K_{1,2} \cup K_2$, основанного на понятии серединно геометрического графа $M(L)$ плоского 4-регулярного 2-связного графа L (см. рис. 1). Одна из конечных реализаций F_1 графа $K_{1,2} \cup K_2$ приведена на рис. 4, причем жирным линиям графа F_1 соответствуют ребра v-отмеченного 1-фактора.

Пусть $p = 3$ и $q = 2$. Рассмотрим приведенную на рис. 4 конечную реализацию F_2 графа $2K_2$, где

$$V(2K_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad E(2K_2) = \{v_1v_2, v_3v_4\}.$$

Как и прежде, считаем, что жирным линиям графа F_2 на рис. 4 соответствуют ребра v_1-отмеченного 1-фактора. Применив к графам F_1 и F_2 теорему 3, получим счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа $H_{3,2}$, причем согласно теореме 3 в каждой реализации из этого множества содержится v-отмеченный 1-фактор.

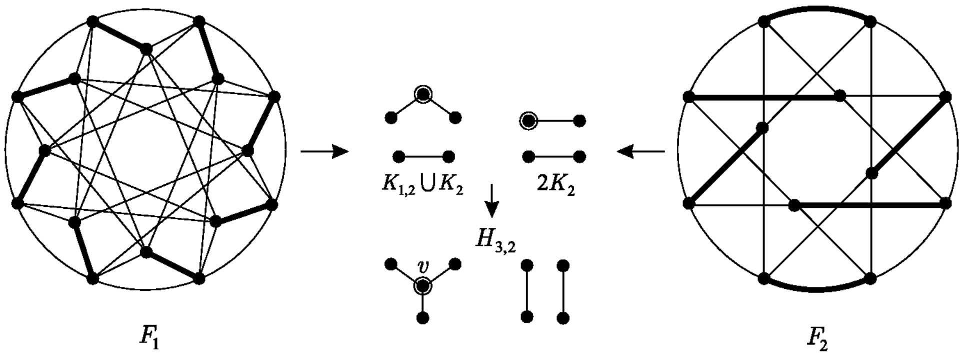

Рис. 4. Графы F_1 и F_2 из доказательства следствия 10

Пусть теперь $p > 3$, $q = \lceil p/2 \rceil$, и пусть для всех чисел, меньших p, следствие верно. Покажем, что оно верно и для числа p. С этой целью рассмотрим некоторую связную конечную реализацию G_{p-2} графа $K_{1,p-2} \cup \lceil (p-2)/2 \rceil K_2$, содержащую v-отмеченный 1-фактор. Согласно индуктивному предположению такая реализация существует. Следовательно, применяя к графам G_{p-2} и F_1 теорему 3 и учитывая тривиальное равенство $\lceil (p-2)/2 \rceil + 1 = \lceil p/2 \rceil$, приходим к счетному множеству конечных (бесконечных) связных реализаций графа $H_{p,q}$, содержащих v-отмеченный 1-фактор. Следствие 10 доказано.

Заметим, что для графа

$$H_{p,q} \cong K_{1,p} \cup qK_2 \quad (p \geqslant 2,\, 1 \leqslant q \leqslant \lceil p/2 \rceil - 1) \tag{4}$$

не существует конечных реализаций. Другими словами, граф $H_{p,q}$ с параметром $q = \lceil p/2 \rceil$ является наименьшим представителем класса $\{K_{1,p} \cup qK_2 \mid p \geqslant 2,\, q \geqslant 1\}$, для которого существуют как конечные, так и бесконечные реализации.

В самом деле, предположим, что для графа (4) существует связная конечная реализация G порядка n. Тогда для любой вершины $v \in VG$ граф G_v содержит $\deg v - q - 1$ ребер. Обозначим через t_v число треугольников в графе G, которым принадлежит вершина v. Ясно, что каждый такой треугольник содержит ровно одно ребро графа G_v и каждое ребро из G_v содержится точно в одном таком треугольнике. В то же время

каждый треугольник имеет три вершины. Следовательно, если символом T обозначить множество всех треугольников графа G, то получим

$$|T| = \frac{1}{3}\sum_{v\in VG} t_v = \frac{1}{3}\sum_{v\in VG}(\deg v - q - 1) = \frac{n(p+q)}{3}.$$

Пусть $U \subset T$ — множество всех тех треугольников графа G, в каждом из которых есть ребро, содержащееся ровно в p треугольниках из T. Легко видеть, что $|U| = np/2$. Отсюда с учетом очевидного неравенства $\lceil p/2\rceil < p/2 + 1$ заключаем, что для конечных множеств U и T, $U \subset T$, справедливо неравенство

$$|U| > \max_q |T| = \frac{n}{3}(p + \lceil p/2\rceil - 1).$$

Противоречие. Следовательно, конечных реализаций графа (4) не существует.

Несложно также показать (см., например, [2]), что граф $H_{p,q}$ при $q > 0$ всегда имеет счетное множество бесконечных связных реализаций.

Снова обратим внимание на тот факт, что некоторые реализации допускают одновременное наличие нескольких отмеченных 1-факторов. Например, графы C_8^2 и $C_4[K_2]$ являются реализациями соответственно графов P_4 и $K_1 + 2K_2$, причем первая содержит одновременно v_1-отмеченный и v_4-отмеченный 1-факторы, а вторая — u-отмеченный и w-отмеченный 1-факторы, где u и w — несмежные вершины степени 2 в графе $K_1 + 2K_2$.

Используя фактически такую же конструкцию, как и в доказательстве следствия 7, получаем

Утверждение 1. *Имеется такое счетное множество конечных* (*бесконечных*) *связных реализаций цепи P_n, $n \geqslant 5$, что каждая реализация из этого множества одновременно обладает как v_1-отмеченным, так и v_n-отмеченным 1-факторами.*

Пусть H — конечный граф, u и v — фиксированные вершины из VH, и пусть G — связная реализация графа H, содержащая одновременно u-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_u$ и v-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}_v$. Простой цикл графа G называется *чередующимся* относительно $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$, если любые два смежных ребра в G принадлежат разным множествам $E\boldsymbol{M}_u$ и $E\boldsymbol{M}_v$.

Рассмотрим операцию, с помощью которой граф F строится из графа H присоединением простой цепи L к вершинам u и v из VH. Концы цепи L являются вершинами u и v в H, но ее ребра и внутренние вершины не входят в H, т. е.

$$F = H \cup L, \quad VH \cap VL = \{u, v\}.$$

В результирующем графе F граф H будет подграфом, а L — цепью, *уклоняющейся* от H. Будем говорить, что граф F построен из графа H *присоединением цепи* L к вершинам u и v.

Перейдем к рассмотрению конструкций, позволяющих строить конечные реализуемые графы из графов, в реализациях которых возможно наличие нескольких отмеченных 1-факторов.

Теорема 5. *Пусть H — конечный граф, u и v — фиксированные вершины из VH. Далее, пусть существует конечная (бесконечная) реализация графа H, содержащая u-отмеченный и v-отмеченный 1-факторы. Тогда существует конечная (бесконечная) реализация графа, который получается из H присоединением цепи P_4 к вершинам u и v, причем такая реализация одновременно содержит u-отмеченный и v-отмеченный 1-факторы.*

Доказательство. Пусть G — реализация H, $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$ — u-отмеченный и v-отмеченный 1-факторы графа G соответственно. Тогда $G(E\boldsymbol{M}_u \cup E\boldsymbol{M}_v)$ является дизъюнктным объединением

$$\Big(\bigcup_{i\in I} C^i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j\in J} P^j\Big) \quad (I \cap J = \varnothing)$$

циклов C^i $(i \in I)$ четной длины и (возможно) бесконечных двусторонних цепей P^j $(j \in J)$, которые покрывают в совокупности все вершины графа G и чередуются относительно $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$. Графу G поставим в соответствие его копию — граф G', определив изоморфизм $VG \to VG'$: $v \mapsto v'$, $v \in VG$. Без потери общности рассуждений будем считать, что $u(v)$-отмеченному 1-фактору $\boldsymbol{M}_u$ $(\boldsymbol{M}_v)$ из G в графе G' соответствует $u(v)$-отмеченный 1-фактор $\boldsymbol{M}'_u$ $(\boldsymbol{M}'_v)$.

Пусть C^i $(VC^i = \{v^i_1, v^i_2, \ldots, v^i_{n_i}\})$ — такой цикл в графе $G(E\boldsymbol{M}_u \cup E\boldsymbol{M}_v)$, чередующийся относительно $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$, что $v^i_1 \sim v^i_2 \sim \ldots \sim v^i_{n_i} \sim v^i_1$. Тогда циклу C^i в графе $G'(E\boldsymbol{M}'_u \cup E\boldsymbol{M}'_v)$ соответствует цикл $(C^i)'$ $(V((C^i)') = \{(v^i_1)', (v^i_2)', \ldots, (v^i_{n_i})'\})$, чередующийся относительно $\boldsymbol{M}'_u$ и $\boldsymbol{M}'_v$, причем $(v^i_1)' \sim (v^i_2)' \sim \ldots \sim (v^i_{n_i})' \sim (v^i_1)'$. Если P^j $(VP^j = \{v^j_k \mid k \in \mathbb{Z}\})$ — такая бесконечная двусторонняя цепь в графе $G(E\boldsymbol{M}_u \cup E\boldsymbol{M}_v)$, чередующаяся относительно $\boldsymbol{M}_u$ и $\boldsymbol{M}_v$, что $v^j_k \sim v^j_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$, то в графе $G'(E\boldsymbol{M}'_u \cup E\boldsymbol{M}'_v)$ ей будет соответствовать бесконечная двусторонняя цепь $(P^j)'$ $(V((P^j)') = \{(v^j_k)' \mid k \in \mathbb{Z}\})$, чередующаяся относительно $\boldsymbol{M}'_u$ и $\boldsymbol{M}'_v$, в которой $(v^j_k)' \sim (v^j_{k+1})'$, $k \in \mathbb{Z}$. Теперь построим новый граф G_1, который получается из G и G' добавлением следующих двух множеств ребер (рис. 5):

$$\{v^i_k(v^i_{k-1})', v^i_k(v^i_k)' \mid i \in I,\ 1 \leqslant k \leqslant n_i\}, \quad \{v^j_k(v^j_{k-1})', v^j_k(v^j_k)' \mid j \in J, k \in \mathbb{Z}\},$$

где $v^i_0 = v^i_{n_i}$, $v^i_{n_i+1} = v^i_1$ и $(v^i_0)' = (v^i_{n_i})'$, $(v^i_{n_i+1})' = (v^i_1)'$ для каждого $i \in I$.

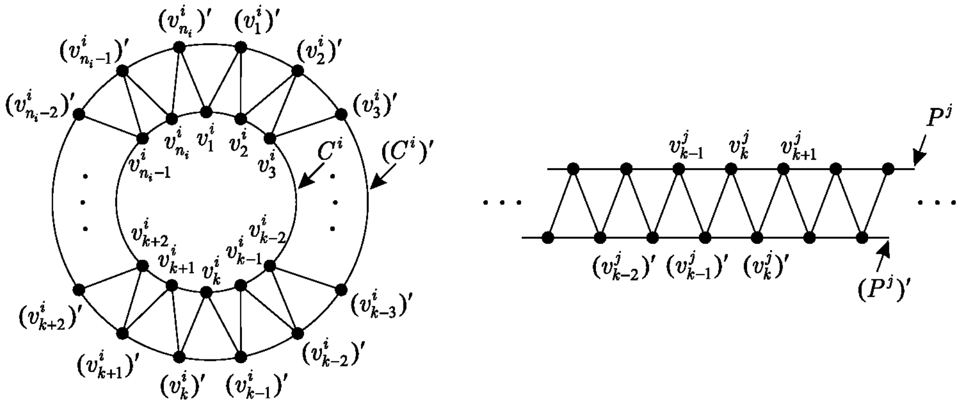

Рис. 5. Фрагмент построения графа G_1

Покажем, что так построенный граф G_1 является реализацией графа H_1, который получается присоединением к вершинам u и v в графе H цепи P_4; $VP_4 = \{u, v, x, y\}$, $u \sim x \sim y \sim v$. Для этого рассмотрим вершины v^i_k и $(v^i_k)'$ ($i \in I$, $1 \leqslant k \leqslant n_i$) и введем отображения

$$\psi^i_k : V(G_1)_{v^i_k} \cup \{(v^i_{k-1})', (v^i_k)'\} \to VH_1,$$
$$(\psi^i_k)' : V(G_1)_{(v^i_k)'} \cup \{v^i_k, v^i_{k+1}\} \to VH_1,$$

положив для вершин множества $U_1 = \{v^i_{k-1}, v^i_{k+1}, (v^i_{k-1})', (v^i_k)'\}$:

$$\psi^i_k(v^i_{k-1}) = u, \quad \psi^i_k(v^i_{k+1}) = v, \quad \psi^i_k((v^i_{k-1})') = x, \quad \psi^i_k((v^i_k)') = y,$$

если $v^i_{k-1}v^i_k \in E\boldsymbol{M}_u$ и $v^i_k v^i_{k+1} \in E\boldsymbol{M}_v$,

$$\psi^i_k(v^i_{k-1}) = v, \quad \psi^i_k(v^i_{k+1}) = u, \quad \psi^i_k((v^i_{k-1})') = y, \quad \psi^i_k((v^i_k)') = x,$$

если $v^i_{k-1}v^i_k \in E\boldsymbol{M}_v$ и $v^i_k v^i_{k+1} \in E\boldsymbol{M}_u$;

для вершин множества $U_2 = \{(v^i_{k-1})', (v^i_{k+1})', v^i_k, v^i_{k+1}\}$:

$$(\psi^i_k)'((v^i_{k-1})') = u, \quad (\psi^i_k)'((v^i_{k+1})') = v, \quad (\psi^i_k)'(v^i_k) = x, \quad (\psi^i_k)'(v^i_{k+1}) = y,$$

если $(v^i_{k-1})'(v^i_k)' \in E\boldsymbol{M}'_u$ и $(v^i_k)'(v^i_{k+1})' \in E\boldsymbol{M}'_v$,

$$(\psi^i_k)'((v^i_{k-1})') = v, \quad (\psi^i_k)'((v^i_{k+1})') = u, \quad (\psi^i_k)'(v^i_k) = y, \quad (\psi^i_k)'(v^i_{k+1}) = x,$$

если $(v^i_{k-1})'(v^i_k)' \in E\boldsymbol{M}'_v$ и $(v^i_k)'(v^i_{k+1})' \in E\boldsymbol{M}'_u$;

для вершин $w \in N(v^i_k, G_1) \setminus U_1$ и $z \in N((v^i_k)', G_1) \setminus U_2$:

$$\psi^i_k(w) = \theta^i_k(w) \quad \text{и} \quad (\psi^i_k)'(z) = (\theta^i_k)'(z).$$

(Здесь θ^i_k и $(\theta^i_k)'$ — изоморфизмы графов $G_{v^i_k}$ и $G'_{(v^i_k)'}$ на граф H.)

Аналогично для вершин v_k^j и $(v_k^j)'$ $(j \in J, k \in \mathbb{Z})$ вводятся отображения

$$\psi_k^j : V(G_1)_{v_k^j} \cup \{(v_{k-1}^j)', (v_k^j)'\} \to VH_1, \ \ (\psi_k^j)' : V(G_1)_{(v_k^j)'} \cup \{v_k^j, v_{k+1}^j\} \to VH_1.$$

Из построения графа G_1 следует, что при любом индексе $t \in I \cup J$ между множествами $N(v_k^t, G) \setminus \{v_{k-1}^t, v_{k+1}^t\}$ и $\{(v_{k-1}^t)', (v_k^t)'\}$, а также между $N((v_k^t)', G') \setminus \{(v_{k-1}^t)', (v_{k+1}^t)'\}$ и $\{v_k^t, v_{k+1}^t\}$ нет ребер графа G_1. С другой стороны,

$$N(v_k^t, G_1) \cap N((v_k^t)', G_1) = \{v_{k+1}^t, (v_{k-1}^t)'\},$$

т. е. уклоняющиеся от $(G_1)_{v_k^t}$ и $(G_1)_{(v_k^t)'}$ цепи P_4 пересекаются по вершинам v_{k+1}^t и $(v_{k-1}^t)'$, которые, как легко видеть, не смежны в G_1. Отсюда и из предыдущего вытекает, что биекции ψ_k^t и $(\psi_k^t)'$ суть изоморфизмы графов $(G_1)_{v_k^t}$ и $(G_1)_{(v_k^t)'}$ на граф H_1, а $\boldsymbol{M}_u \cup \boldsymbol{M}_u'$ $(\boldsymbol{M}_v \cup \boldsymbol{M}_v')$ является $u(v)$-отмеченным 1-фактором графа G_1. Таким образом, G_1 — реализация графа H_1, одновременно содержащая u-отмеченный и v-отмеченный 1-факторы. Теорема 5 доказана.

Замечание 3. На самом деле мы доказали немного больше, чем утверждается в теореме 5. А именно если $w \in VH \setminus \{u, v\}$ и существует конечная (бесконечная) реализация графа H, содержащая w-отмеченный 1-фактор, то существует и конечная (бесконечная) реализация графа, который получается из H присоединением цепи P_4 к вершинам u и v, причем такая реализация помимо u-отмеченного и v-отмеченного 1-факторов содержит также w-отмеченный 1-фактор.

Известно [1, 15], что существуют реализации цикла C_n при любом $n \geqslant 3$. В частности, K_4, C_6^2 и граф икосаэдра (см. [5, с. 12]) — единственные связные реализации циклов C_3, C_4 и C_5 соответственно. В [29] приведен фрагмент триангуляции плоскости, используя который можно построить счетное множество конечных (бесконечных) реализаций цикла C_6.

Пусть $VC_n = \{v_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $v_1 \sim v_2 \sim \ldots \sim v_n \sim v_1$. Тогда следующий результат вытекает из теоремы 5 и утверждения 1.

Следствие 11. *Существует счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций цикла C_n, $n \geqslant 7$, одновременно содержащих v_1-отмеченный и v_4-отмеченный 1-факторы.*

Известно [11, с. 151], что регулярный двудольный (не обязательно конечный) граф G ненулевой степени n является реберно непересекающимся объединением n регулярных подграфов степени 1, т. е. 1-факторов. С другой стороны, G — реализация графа O_n. Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает

Лемма 3. *При любом натуральном числе n, $n \geqslant 3$, можно построить такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа O_n, что для любой вершины $v \in VO_n$ в каждой реализации из этого множества содержится v-отмеченный 1-фактор.*

Замечание 4. Опираясь на лемму 3 и методы, предложенные в [4], теорему 5 можно существенно уточнить. А именно в условии теоремы цепь P_4 длины 3 можно заменить цепью P_5 (P_6) длины 4 (5) и, следовательно, произвольной цепью P_n длины $m = n - 1 \geqslant 3$, ибо всегда можно указать такие целые неотрицательные числа a, b и c, что $m = 3a+4b+5c$.

Далее под *псевдографом* будем понимать пару (V, E), где V — непустое множество (*вершин*), а E — некоторое семейство неупорядоченных пар вершин (*ребер*), не обязательно различных. Таким образом, в псевдографе допускаются как кратные ребра, так и петли. В частности, *граф-петля* N_1 состоит из единственной петли и ее одного конца (вершины), а *граф-восьмерка* N_2 — из единственной вершины и двух инцидентных ей петель.

Заслуживает внимание следующее утверждение, легко выводимое из теорем 1, 5 и леммы 3 (см. также [3, 22]).

Следствие 12. *Пусть H — произвольный конечный псевдограф, отличный от O_1, O_2, K_2, N_1 и N_2, и пусть H^* — конечный граф, который получается из H двукратным подразбиением всех его ребер и петлей. Тогда для H^* имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций, что для каждой вершины $v \in VH \cap VH^*$ все реализации из этого множества содержат v-отмеченные 1-факторы.*

В заключение данного раздела приведем классификацию несвязных реализуемых графов до седьмого порядка включительно. Диаграммы графов, имеющих не более семи вершин, представлены в [26].

Теорема 6. *В классе несвязных графов не более чем с семью вершинами содержится ровно 93 реализуемых графа. Все они перечислены по возрастанию числа вершин в пунктах 1–6* (рис. 6):

1) O_2;
2) O_3, $O_1 \cup K_2$;
3) O_4, $O_2 \cup K_2$, $O_1 \cup K_3$, $2K_2$;
4) O_5, $O_3 \cup K_2$, $O_2 \cup K_3$, $O_1 \cup 2K_2$, $O_1 \cup P_4$, $O_1 \cup C_4$, $O_1 \cup K_4$, $P_3 \cup K_2$, $K_3 \cup K_2$;
5) O_6, $O_4 \cup K_2$, $O_3 \cup K_3$, $O_2 \cup 2K_2$, $O_2 \cup P_4$, $O_2 \cup C_4$, $O_2 \cup K_4$, $O_1 \cup P_3 \cup K_2$, $O_1 \cup K_3 \cup K_2$, $O_1 \cup P_5$, $O_1 \cup C_5$, $O_1 \cup \overline{P}_5$, $O_1 \cup (K_1 + 2K_2)$, $O_1 \cup K_5$, $3K_2$, $P_4 \cup K_2$, $C_4 \cup K_2$, $(K_{1,3} + e) \cup K_2$, $2K_3$, $K_4 \cup K_2$, $K_{1,3} \cup K_2$;
6) O_7, $O_5 \cup K_2$, $O_4 \cup K_3$, $O_3 \cup 2K_2$, $O_3 \cup P_4$, $O_3 \cup C_4$, $O_3 \cup K_4$, $O_2 \cup P_3 \cup K_2$, $O_2 \cup K_3 \cup K_2$, $O_2 \cup P_5$, $O_2 \cup C_5$, $O_2 \cup \overline{P}_5$, $O_2 \cup (K_1 + 2K_2)$, $O_2 \cup K_5$,

$O_1 \cup 3K_2$, $O_1 \cup P_4 \cup K_2$, $O_1 \cup C_4 \cup K_2$, $O_1 \cup (K_{1,3}+e) \cup K_2$, $O_1 \cup 2K_3$, $O_1 \cup K_4 \cup K_2$, $O_1 \cup K_{1,3} \cup K_2$, $O_1 \cup P_6$, $O_1 \cup C_6$, $O_1 \cup A_1$, $O_1 \cup A_2$, $O_1 \cup A_3$, $O_1 \cup A_4$, $O_1 \cup (P_3 \times K_2)$, $O_1 \cup A_5$, $O_1 \cup A_6$, $O_1 \cup A_7$, $O_1 \cup A_8$, $O_1 \cup A_9$, $O_1 \cup A_{10}$, $O_1 \cup \overline{C}_6$, $O_1 \cup K_{3,3}$, $O_1 \cup A_{11}$, $O_1 \cup C_6^2$, $O_1 \cup K_6$, $P_3 \cup 2K_2$, $K_3 \cup 2K_2$, $K_{1,4} \cup K_2$, $P_5 \cup K_2$, $C_5 \cup K_2$, $B_1 \cup K_2$, $B_2 \cup K_2$, $B_3 \cup K_2$, $B_4 \cup K_2$, $(K_1 + 2K_2) \cup K_2$, $\overline{P}_5 \cup K_2$, $K_5 \cup K_2$, $P_4 \cup K_3$, $C_4 \cup K_3$, $(K_4 - e) \cup K_3$, $K_3 \cup K_4$, $P_3 \cup C_4$.

Для каждого такого графа (за исключением O_2, $K_{1,3} \cup K_2$, $O_1 \cup K_{1,3} \cup K_2$, $K_{1,4} \cup K_2$) имеется счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций. Графы $K_{1,3} \cup K_2$, $O_1 \cup K_{1,3} \cup K_2$ и $K_{1,4} \cup K_2$ не имеют конечных реализаций, однако для каждого из них существует счетное множество бесконечных связных реализаций. Кроме того, если G — конечная (бесконечная) связная реализация графа O_2, то $G \cong C_n$, $n \geqslant 4$, ($G \cong P_{\infty,\infty}$).

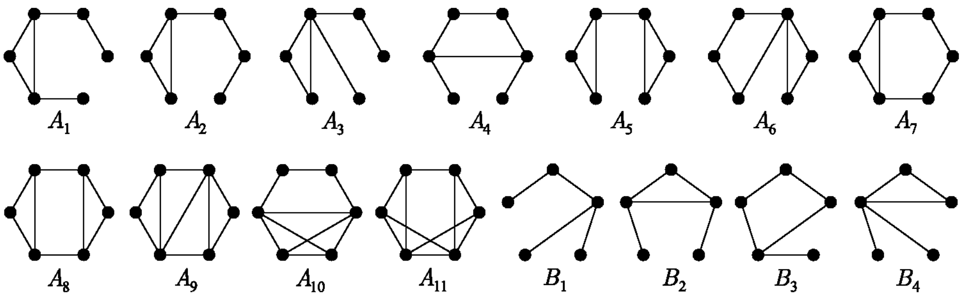

Рис. 6. Графы A_1 — A_{11} и B_1 — B_4 из формулировки теоремы 6

Доказательство теоремы 6 вытекает из результатов работы [12], а также теорем 1, 3 и следствий 2, 3, 10 настоящего раздела.

Пусть $U(x)$ — перечисляющий ряд для непомеченных несвязных реализуемых графов. Тогда, как следует из теоремы 6, $U(x)$ начинается так:

$$U(x) = x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 21x^6 + 56x^7 + \ldots$$

4. Реализации с отмеченными 2-факторами

Перенесем результаты разд. 3 на случай реализаций, допускающих отмеченные факторы более специального вида.

Дадим некоторые дополнительные определения.

Пусть G — конечный связный граф и n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Будем говорить, что G содержит *правильный n-фактор*, если выполняются следующие условия:

1) $|G| = q(n+1)$ для некоторого натурального числа q, $q \geqslant 2$;

2) множество вершин графа G можно разбить на q непересекающихся подмножеств $V_1, V_2, \ldots, V_q$ таких, что каждое из них содержит $n+1$ вершин и для каждого $V_k = \{u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{n+1}^k\}$, $1 \leqslant k \leqslant q$, ребра $u_i^k u_j^k$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $i+1 \leqslant j \leqslant n+1$, принадлежат множеству EG.

Другими словами, правильный n-фактор графа (не обязательно конечного) — это несвязный n-регулярный остовный подграф, все компоненты которого суть клики порядка $n+1$.

Произвольное семейство клик графа назовем *правильным n-сочетанием,* если каждая клика из этого семейства имеет порядок $n+1$ и любые две такие клики не содержат общих вершин.

В дальнейшем, говоря о n-факторах и n-сочетаниях, содержащихся в рассматриваемом графе, всегда будем, не оговаривая этого, подразумевать, что они правильные.

Перейдем к рассмотрению связных реализаций, допускающих n-факторы одного специального вида. Детально остановимся на случае $n = 2$.

Определение 2. Пусть G — связная реализация графа H и $e = xy$ — фиксированное ребро из EH. Далее пусть $\boldsymbol{T}$ — 2-сочетание графа G. Назовем $\boldsymbol{T}$ *e-отмеченным,* если найдется такое семейство изоморфизмов (1), что

$$\theta_v(N(v, \boldsymbol{T})) = \{x, y\} \tag{5}$$

для каждой вершины $v \in V\boldsymbol{T}$. Если $V\boldsymbol{T} = VG$, то 2-сочетание $\boldsymbol{T}$ будем называть *e-отмеченным 2-фактором.*

Основное используемое в дальнейшем свойство e-отмеченного 2-сочетания (2-фактора) дано в следующем определении.

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{T}$ — e-отмеченное 2-сочетание (e-отмеченный 2-фактор) графа G, а $\boldsymbol{\Theta}$ — соответствующее ему семейство изоморфизмов вида (1). Пару $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Theta})$ назовем *хорошей,* если для любого треугольника $T \in \boldsymbol{T}$, $VT = \{u, v, w\}$, выполняются соотношения

$$\theta_v(u) \neq \theta_w(u), \quad \theta_u(v) \neq \theta_w(v), \quad \theta_u(w) \neq \theta_v(w). \tag{6}$$

Пусть G — связная реализация графа H и $e = xy$ — фиксированное ребро из EH. Приведем необходимое условие существования в графе G хорошего e-отмеченного 2-фактора.

Утверждение 2. *Если G содержит хороший e-отмеченный 2-фактор, то $H_x \cong H_y$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{T}$ — хороший e-отмеченный 2-фактор графа G, $T \in \boldsymbol{T}$, и пусть $VT = \{u, v, w\}$. Тогда с вершинами u, v, w можно связать изоморфизмы $\theta_u, \theta_v, \theta_w \in \boldsymbol{\Theta}$:

$$\theta_u : VG_u \to VH, \quad \theta_v : VG_v \to VH, \quad \theta_w : VG_w \to VH,$$

для которых выполнены соотношения (6). Понятно, что сужения

$$\theta_u^{-1}{}_{|VH_{\theta_u(v)}} : VH_{\theta_u(v)} \to V(G_u)_v, \quad \theta_v^{-1}{}_{|VH_{\theta_v(u)}} : VH_{\theta_v(u)} \to V(G_v)_u$$

также являются изоморфизмами $H_{\theta_u(v)}$ на $(G_u)_v$ и $H_{\theta_v(u)}$ на $(G_v)_u$ соответственно. С другой стороны, так как uv — ребро графа G, то $(G_u)_v \cong (G_v)_u$. Следовательно, мы получили изоморфизм

$$\theta_{v,u} : VH_{\theta_u(v)} \to VH_{\theta_v(u)}, \quad \theta_{v,u} = \theta_v \theta_u^{-1}{}_{|VH_{\theta_u(v)}},$$

графа $H_{\theta_u(v)}$ на граф $H_{\theta_v(u)}$. Ясно, что $\theta_u(v), \theta_v(u) \in \{x, y\}$, а так как пара $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\Theta})$ — хорошая, то $\theta_u(v) \neq \theta_v(u)$, т. е. либо $\theta_u(v) = x$, $\theta_v(u) = y$, либо $\theta_u(v) = y$, $\theta_v(u) = x$. Действительно, если, например, $\theta_u(v) = \theta_v(u) = x$, то $\theta_u(w) = y$ и, следовательно, $\theta_v(w) = x$. Но тогда

$$\theta_v(N(v, \boldsymbol{T})) = \theta_v(\{u, w\}) = x,$$

что противоречит (5). Случай, когда $\theta_u(v) = \theta_v(u) = y$, аналогично приводит к противоречию. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что утверждение, обратное утверждению 2, неверно. В самом деле, если $H \cong P_4$, $VH = \{u, v, x, y\}$ и $u \sim x \sim y \sim v$, то $H_x \cong H_y \cong O_2$. С другой стороны, не существует реализации цепи P_4, содержащей хороший xy-отмеченный 2-фактор. Действительно, если G — конечная (бесконечная) реализация цепи P_4, то $G \cong C_n^2$, $n \geqslant 7$, ($G \cong P^2_{\infty,\infty}$). Но в графах C_n^2 ($n \geqslant 7$) и $P^2_{\infty,\infty}$ нет хороших xy-отмеченных 2-факторов, в чем легко убедиться простой проверкой.

Определение 4. Пусть $G_i = (VG_i, EG_i)$ ($i = 1, 2$) — два графа, VG_1 и VG_2 — непустые непересекающиеся множества. Далее пусть G_i° — подграф графа G_i (не обязательно порожденный), и пусть $\psi : VG_1^\circ \to VG_2^\circ$ — изоморфизм. Операцию *склейки* графов G_1 и G_2 по подграфам G_1° и G_2° *вдоль изоморфизма* ψ, обозначаемую через $G_1 \bigcup\limits_\psi G_2$, определим следующим образом:

$$V\Big(G_1 \bigcup_\psi G_2\Big) = VG_1 \cup (VG_2 \setminus VG_2^\circ)$$

и две вершины $u, v \in V\Big(G_1 \bigcup\limits_\psi G_2\Big)$ смежны в графе $G_1 \bigcup\limits_\psi G_2$, если

либо $u, v \in VG_1$ и вершины u, v смежны в графе G_1;

либо $u, v \in VG_2 \setminus VG_2^\circ$ и вершины u, v смежны в графе G_2;

либо $u \in VG_1^\circ$, $v \in VG_2 \setminus VG_2^\circ$ и вершины $\psi(u), v$ смежны в графе G_2;

либо $u, v \in VG_1^\circ$, $uv \notin EG_1^\circ$ и вершины $\psi(u), \psi(v)$ смежны в графе G_2.

Прежде всего, обратим внимание на то, что в случае, когда G_1° и G_2° — клики одного порядка $p \geqslant 2$, можно считать (и это удобно), что

$$VG_1 \cap VG_2 = VG_1^\circ = VG_2^\circ = \{1, 2, \ldots, p\},$$

и вместо изоморфизма G_1° на G_2° рассматривать подходящий автоморфизм $\psi : VG_1^\circ \to VG_1^\circ$, т. е. подстановку

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь p и q — натуральные числа $(p, q \geqslant 2)$ и $G_1^\circ \cong G_2^\circ \cong qK_p$. В этом случае можно считать, что

$$VG_1 \cap VG_2 = VG_1^\circ = VG_2^\circ \\ = \{1, 2, \dots, p, \dots, pq - p + 1, pq - p + 2, \dots, pq\},$$

$$G_1(\{pk - p + 1, pk - p + 2, \dots, pk\}) \\ \cong G_2(\{pk - p + 1, pk - p + 2, \dots, pk\}) \cong K_p \quad (1 \leqslant k \leqslant q),$$

и так же, как выше, вместо изоморфизма ψ подграфа G_1° на подграф G_2° рассматривать подходящий изоморфизм G_1° на себя, т. е. подстановку

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & \dots & pq-p+1 & pq-p+2 & \dots & pq \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p & \dots & i_{pq-p+1} & i_{pq-p+2} & \dots & i_{pq} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

такую, что

$$\psi(\{pj-p+1, pj-p+2, \dots, pj\}) = \{pk-p+1, pk-p+2, \dots, pk\} \ (1 \leqslant k \leqslant q) \qquad (8)$$

для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant q$. Действительно, так как автоморфизм графа qK_p можно получить, сначала выполняя произвольный автоморфизм на каждой из q клик K_p, а затем совершая любую перестановку этих клик между собой, то множество всех подстановок (7), удовлетворяющих требованию (8), образует группу автоморфизмов графа qK_p.

Отметим, что введенная операция склейки графов G_1 и G_2 по подграфам G_1° и G_2° вдоль изоморфизма $\psi : VG_1^\circ \to VG_2^\circ$ коммутативна в том смысле, что

$$G_1 \bigcup_{\psi} G_2 \cong G_2 \bigcup_{\psi^{-1}} G_1,$$

где ψ^{-1} — изоморфизм подграфа G_2° на подграф G_1°, обратный изоморфизму ψ.

Пусть G_i $(i = 1, 2)$ — связная реализация графа H_i, $VH_1 \cap VH_2 = \{x, y\}$ и $e_i = xy$ — фиксированное ребро из EH_i. Введем в рассмотрение два графа H^1 и H^2:

$$H^1 \cong H_1 \bigcup_{\psi_1} H_2, \quad H^2 \cong H_1 \bigcup_{\psi_2} H_2,$$

где
$$\psi_1 = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.$$
Пусть $\boldsymbol{T}_i$ $(i = 1,2)$ — хороший e_i-отмеченный 2-фактор графа G_i, $T_i \in \boldsymbol{T}_i$ и $VT_i = \{1,2,3\}$. Тогда при сделанных выше предположениях верна следующая

Лемма 4. *Пусть ψ — подстановка множества $\{1,2,3\}$, т. е.*
$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}, \tag{9}$$
G — граф, полученный склейкой G_1 и G_2 по треугольникам $T_1 \in \boldsymbol{T}_1$ и $T_2 \in \boldsymbol{T}_2$ вдоль ψ, т. е.
$$G \cong G_1 \bigcup_{\psi} G_2,$$
и пусть треугольник T из G есть образ треугольников T_1 и T_2 после применения операции $G_1 \bigcup\limits_{\psi} G_2$, $VT = \{(1,i_1),(2,i_2),(3,i_3)\} \subset VG$. Тогда для каждого графа $H \in \{H^1, H^2\}$ можно указать такую подстановку $\psi \in \boldsymbol{S}_3$, что
$$G_{(1,i_1)} \cong G_{(2,i_2)} \cong G_{(3,i_3)} \cong H.$$
При этом треугольник T в графе G образует хорошее xy-отмеченное 2-сочетание.

Доказательство. Так как $\boldsymbol{T}_i$ $(i = 1,2)$ — хороший e_i-отмеченный 2-фактор графа G_i, то с вершинами $1,2,3 \in VT_1$ (VT_2) можно связать изоморфизмы $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \boldsymbol{\Theta}_1$ $(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3 \in \boldsymbol{\Theta}_2)$
$$\theta_k : VG_1(N(k)) \to VH_1, \quad \theta'_k : VG_2(N(k)) \to VH_2, \quad k = 1,2,3,$$
для которых выполнены соотношения (6). Для определенности будем считать, что
$$\theta_1(2) = \theta_2(3) = \theta_3(1) = x, \quad \theta_1(3) = \theta_2(1) = \theta_3(2) = y;$$
случай, когда
$$\theta_1(2) = \theta_2(3) = \theta_3(1) = y, \quad \theta_1(3) = \theta_2(1) = \theta_3(2) = x,$$
исследуется аналогично.

Итак, пусть ψ — подстановка (9), G — граф, полученный склейкой G_1 и G_2 по треугольникам T_1 и T_2 вдоль ψ, T — образ T_1 и T_2 относительно $G_1 \bigcup\limits_{\psi} G_2$, $VT = \{(1,i_1),(2,i_2),(3,i_3)\} \subset VG$. Тогда $G_{(1,i_1)}$

изоморфен графу, который получается из H_1 и H_2 с помощью операции $H_1 \bigcup\limits_{\alpha} H_2$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} \theta_1(2) & \theta_1(3) \\ \theta'_{i_1}(i_2) & \theta'_{i_1}(i_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ \theta'_{i_1}(i_2) & \theta'_{i_1}(i_3) \end{pmatrix}.$$

Аналогично $G_{(2,i_2)}$ и $G_{(3,i_3)}$ изоморфны графам $H_1 \bigcup\limits_{\beta} H_2$ и $H_1 \bigcup\limits_{\gamma} H_2$ соответственно. Здесь

$$\beta = \begin{pmatrix} \theta_2(3) & \theta_2(1) \\ \theta'_{i_2}(i_3) & \theta'_{i_2}(i_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ \theta'_{i_2}(i_3) & \theta'_{i_2}(i_1) \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} \theta_3(1) & \theta_3(2) \\ \theta'_{i_3}(i_1) & \theta'_{i_3}(i_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ \theta'_{i_3}(i_1) & \theta'_{i_3}(i_2) \end{pmatrix}.$$

Далее, как отмечено в условии леммы, пара $(\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{\Theta}_2)$ — хорошая. Следовательно, для изоморфизмов $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3 \in \boldsymbol{\Theta}_2$ имеются два случая:

$$\theta'_1(2) = \theta'_2(3) = \theta'_3(1) = x, \quad \theta'_1(3) = \theta'_2(1) = \theta'_3(2) = y;$$
$$\theta'_1(2) = \theta'_2(3) = \theta'_3(1) = y, \quad \theta'_1(3) = \theta'_2(1) = \theta'_3(2) = x.$$

В первом случае

$$\theta'_{i_1}(i_2) = \theta'_{i_2}(i_3) = \theta'_{i_3}(i_1) = x,$$
$$\theta'_{i_1}(i_3) = \theta'_{i_2}(i_1) = \theta'_{i_3}(i_2) = y, \text{ если } \psi \text{ — четная},$$

$$\theta'_{i_1}(i_2) = \theta'_{i_2}(i_3) = \theta'_{i_3}(i_1) = y,$$
$$\theta'_{i_1}(i_3) = \theta'_{i_2}(i_1) = \theta'_{i_3}(i_2) = x, \text{ если } \psi \text{ — нечетная}.$$

Во втором случае

$$\theta'_{i_1}(i_2) = \theta'_{i_2}(i_3) = \theta'_{i_3}(i_1) = y,$$
$$\theta'_{i_1}(i_3) = \theta'_{i_2}(i_1) = \theta'_{i_3}(i_2) = x, \text{ если } \psi \text{ — четная},$$

$$\theta'_{i_1}(i_2) = \theta'_{i_2}(i_3) = \theta'_{i_3}(i_1) = x,$$
$$\theta'_{i_1}(i_3) = \theta'_{i_2}(i_1) = \theta'_{i_3}(i_2) = y, \text{ если } \psi \text{ — нечетная}.$$

Следовательно, в зависимости от знака подстановки ψ либо

$$\alpha = \beta = \gamma = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}, \quad G_{(1,i_1)} \cong G_{(2,i_2)} \cong G_{(3,i_3)} \cong H^1,$$

либо

$$\alpha = \beta = \gamma = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad G_{(1,i_1)} \cong G_{(2,i_2)} \cong G_{(3,i_3)} \cong H^2.$$

Таким образом, как видно из предыдущих рассуждений, для каждого графа $H \in \{H^1, H^2\}$ можно указать такую подстановку $\psi \in \boldsymbol{S}_3$, что $G_{(1,i_1)} \cong G_{(2,i_2)} \cong G_{(3,i_3)} \cong H$.

Покажем, что треугольник T образует в графе G хорошее xy-отмеченное 2-сочетание. С этой целью рассмотрим множества

$$S_k = VG_1(N(k)) \setminus VT_1, \quad S'_k = VG_2(N(i_k)) \setminus VT_2, \quad k = 1,2,3. \tag{10}$$

С помощью (10) построим отображения $\theta_{(k,i_k)} : VG_{(k,i_k)} \to VH$ ($k = 1,2,3$), положив

$$\theta_{(k,i_k)|S_k} = \theta_{k|S_k}, \quad \theta_{(k,i_k)|S'_k} = \theta'_{i_k|S'_k}$$

для вершин множества $VG_{(k,i_k)} \setminus VT$ и определив действие $\theta_{(k,i_k)}$ на вершинах из $VT \setminus \{(k,i_k)\}$ следующим образом: $(2,i_2) \mapsto \theta_1(2)$ и $(3,i_3) \mapsto \theta_1(3)$, если $k = 1$; $(1,i_1) \mapsto \theta_2(1)$ и $(3,i_3) \mapsto \theta_2(3)$, если $k = 2$; $(1,i_1) \mapsto \theta_3(1)$ и $(2,i_2) \mapsto \theta_3(2)$, если $k = 3$.

Легко проверить, что $\theta_{(k,i_k)}$ — изоморфизм графа $G_{(k,i_k)}$ на граф H, причем согласно определению $\theta_{(k,i_k)}$ для каждой вершины $v \in VG_1 \cap VT$ можно написать $\theta_v(N(v,T)) = \{x,y\}$. Отсюда, в частности, заключаем, что T — xy-отмеченное 2-сочетание. Так как по построению действие $\theta_{(k,i_k)}$ на вершинах множества $VT \setminus \{(k,i_k)\}$ эквивалентно действию θ_k на вершинах множества $VT_1 \setminus \{k\}$, то T — хорошее 2-сочетание. Лемма 4 доказана.

Пусть, как и выше, G_i ($i = 1,2$) — связная реализация графа H_i, $|G_2| = 3q$ для некоторого натурального числа q, $VH_1 \cap VH_2 = \{x,y\}$, $e_i = xy$ — фиксированное ребро из EH_i, и пусть $\boldsymbol{T}_1 = \{T^1_s \mid 1 \leqslant s \leqslant q\}$ — хорошее e_1-отмеченное 2-сочетание в графе G_1, причем $G_1(V\boldsymbol{T}_1) \cong qK_3$, $\boldsymbol{T}_2 = \{T^2_s \mid 1 \leqslant s \leqslant q\}$ — хороший e_2-отмеченный 2-фактор в графе G_2,

$$VG_1 \cap VG_2 = V\boldsymbol{T}_1 = V\boldsymbol{T}_2, \quad VT^1_s = VT^2_s = \{3s-2, 3s-1, 3s\}, \quad 1 \leqslant s \leqslant q.$$

Следующая лемма является аналогом леммы 4, и ее доказательство можно провести, привлекая те же самые рассуждения.

Лемма 5. *Пусть ψ — подстановка множества $\{1,2,\ldots,3q\}$, т. е.*

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 3q-2 & 3q-1 & 3q \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_{3q-2} & i_{3q-1} & i_{3q} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

причем

$$\psi(\{3j-2, 3j-1, 3j\}) = \{3k-2, 3k-1, 3k\} \quad (1 \leqslant k \leqslant q) \tag{12}$$

для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant q$, G — граф, полученный склейкой G_1 и G_2 по подграфам $\boldsymbol{T}_1$ и $\boldsymbol{T}_2$ вдоль ψ, т. е.

$$G \cong G_1 \bigcup_{\psi} G_2,$$

и пусть 2-сочетание $\boldsymbol{T} = \{T_s \mid 1 \leqslant s \leqslant q\}$ *из* G *есть образ* $\boldsymbol{T}_1$ *и* $\boldsymbol{T}_2$ *после применения операции* $G_1 \bigcup\limits_{\psi} G_2$, $VT_s = \{(3s-2, i_{3s-2}), (3s-1, i_{3s-1}), (3s, i_{3s})\}$. *Тогда для каждого графа* $H \in \{H^1, H^2\}$ *существует такая подстановка* (11), *удовлетворяющая* (12), *что*

$$G_{(3s-2, i_{3s-2})} \cong G_{(3s-1, i_{3s-1})} \cong G_{(3s, i_{3s})} \cong H, \quad 1 \leqslant s \leqslant q. \qquad (13)$$

При этом $\boldsymbol{T}$ *в графе* G *является хорошим* xy*-отмеченным* 2*-сочетанием.*

Замечание 5. Утверждение леммы 5 справедливо также в других случаях, например когда G_1 — *частичная реализация* графа H_1, т. е. изоморфизм $G_1(N(v)) \cong H_1$ имеет место только для вершин v некоторого подмножества из VG_1, целиком содержащего $V\boldsymbol{T}_1$.

Обобщая конструкции, использованные при доказательстве теорем 1 и 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* H_1, H_2 *— конечные графы,* $VH_1 \cap VH_2 = \{x, y\}$, $e_1 = xy$ *и* $e_2 = xy$ *— фиксированные ребра из* EH_1 *и* EH_2 *соответственно,*

$$H^1 \cong H_1 \bigcup_{\psi_1} H_2, \quad H^2 \cong H_1 \bigcup_{\psi_2} H_2.$$

Далее пусть для каждого $i = 1, 2$ *существует такая конечная реализация* G_i *графа* H_i*, содержащая хороший* e_i*-отмеченный* 2*-фактор, что* $\min\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 6$, $\max\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 9$. *Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа* H^i $(i = 1, 2)$*, что в каждой реализации из этого множества имеется хороший* xy*-отмеченный* 2*-фактор.*

Доказательство. Снова обратимся к реберному графу $G \cong L(D)$ связного двудольного графа $D = (X, Y, E)$, в котором степени всех вершин доли X равны $n = |G_1|/3 \geqslant 3$, а степени всех вершин доли Y равны $m = |G_2|/3 \geqslant 2$. Заменив каждую вершину u в графе G тремя вершинами (u, α), (u, β), (u, γ) и положив $(a, b) \sim (c, d)$ тогда и только тогда, когда либо $a \sim c$, либо $a = c$, получим граф $G[K_3]$, который будем обозначать через G^*. Таким образом, каждой вершине u графа G соответствует треугольник $T_u = G^*(\{(u, \alpha), (u, \beta), (u, \gamma)\})$ графа G^*, и если в G^* стянуть все ребра каждого такого треугольника, то получится граф G.

Далее каждому треугольнику T_u в G^* соответствует пара полных подграфов Q_i^* и Q_j^* этого графа, множества вершин которых пересекаются в точности по VT_u. Как и в доказательстве теоремы 3, клики Q_i^* и Q_j^* назовем *сопряженными*, а треугольник T_u ($VQ_i^* \cap VQ_j^* = VT_u$) — *особым* треугольником (соответствующим паре сопряженных подграфов Q_i^* и Q_j^*). Легко видеть, что семейство всех сопряженных подграфов

графа G^* образует покрытие $\boldsymbol{Q}^*$ этого графа. В то же время каждой паре сопряженных подграфов Q_i^* и Q_j^* таких, что

$$VQ_i^* \cap VQ_j^* = \{(u,\alpha),(u,\beta),(u,\gamma)\}, \tag{14}$$

в графе G соответствует пара таких компонент Q_i и Q_j покрытия $\boldsymbol{Q}$, что $VQ_i \cap VQ_j = \{u\}$ (структура покрытия $\boldsymbol{Q}$ детально описана в доказательстве теоремы 3). Верно и обратное, а именно каждой паре компонент $Q_i, Q_j \in \boldsymbol{Q}$ графа G таких, что $VQ_i \cap VQ_j = \{u\}$, в графе G^* соответствует пара сопряженных подграфов $Q_i^*, Q_j^* \in \boldsymbol{Q}^*$ таких, что справедливо равенство (14).

Таким образом, покрытие $\boldsymbol{Q} = \{Q_i \mid i \in I\}$ графа G индуцирует покрытие $\boldsymbol{Q}^* = \{Q_i^* \mid i \in I\}$ графа G^* или, другими словами, изоморфизм $G^* \cong G[K_3]$ задает такую биекцию $\varphi : \boldsymbol{Q}^* \to \boldsymbol{Q}$, что $Q_i^* \mapsto Q_i$.

С помощью биекции φ и разбиения $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^1 \cup \boldsymbol{Q}^2$, введенного в теореме 3, построим разбиения $\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q}_1^* \cup \boldsymbol{Q}_2^*$ и $I = I_1 \cup I_2$ следующим образом:

$$\boldsymbol{Q}_1^* = \{Q_i^* \mid \varphi(Q_i^*) \in \boldsymbol{Q}^1,\, i \in I\}, \quad \boldsymbol{Q}_2^* = \{Q_i^* \mid \varphi(Q_i^*) \in \boldsymbol{Q}^2,\, i \in I\},$$
$$I_1 = \{i \mid Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_1^*\}, \quad I_2 = \{i \mid Q_i^* \in \boldsymbol{Q}_2^*\}.$$

Пусть Q_i^* — произвольная компонента семейства $\boldsymbol{Q}_1^*$; $Q_{i_1}^*, Q_{i_2}^*, \ldots, Q_{i_n}^*$ — список компонент, сопряженных с Q_i^* в графе G^*, и пусть $T_{i_s}^i$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ — особый треугольник, соответствующий паре сопряженных подграфов Q_i^* и $Q_{i_s}^*$,

$$\boldsymbol{T}^i = \{T_{i_s}^i \mid 1 \leqslant s \leqslant n\}, \quad VT_{i_s}^i = \{3s-2, 3s-1, 3s\}.$$

Удалим из G^* все ребра клики Q_i^*, входящие в множество $EQ_i^* \setminus E\boldsymbol{T}^i$. В полученном графе треугольники $T_{i_s}^i$ образуют независимое 2-сочетание, т. е. такое 2-сочетание, что подграф, порожденный множеством $V\boldsymbol{T}^i$, изоморфен графу nK_3. Возьмем теперь один экземпляр графа G_1 с хорошим e_1-отмеченным 2-фактором $\boldsymbol{T}_1$:

$$\boldsymbol{T}_1 = \{T_s^1 \mid 1 \leqslant s \leqslant n\}, \quad VT_s^1 = \{3s-2, 3s-1, 3s\},$$

и, зафиксировав подстановку (7) с параметрами $p = 3$, $q = n$, удовлетворяющую условию (8), выполним склейку графов $G^* - (EQ_i^* \setminus E\boldsymbol{T}^i)$ и G_1 по подграфам $\boldsymbol{T}^i$ и $\boldsymbol{T}_1$ вдоль (7). Легко видеть, что полученный в результате такого преобразования граф будет связным. Применив указанную процедуру к каждой из оставшихся компонент семейства $\boldsymbol{Q}_1^*$, получим связный граф, который будем обозначать через G_1^*.

Ясно, что G_1^* — остовный подграф графа G^*, причем в G_1^* на месте компонент Q_i^* $(i \in I_1)$ расположены графы G_1, чьи хорошие e_1-отмеченные 2-факторы суть особые треугольники клик Q_i^*, а на месте

компонент семейства $\boldsymbol{Q}_2^*$ — по-прежнему клики порядка $|G_2| = 3m$. Таким образом, $G_1^*(VQ_i^*) \cong G_1$, если $i \in I_1$, и $G_1^*(VQ_i^*) \cong G^*(VQ_i^*) \cong K_{3m}$, если $i \in I_2$; при этом

$$\{G_1^*(VQ_i^* \cap VQ_{i_s}^*) \mid 1 \leqslant s \leqslant n\}$$

— хороший e_1-отмеченный 2-фактор графа $G_1^*(VQ_i^*) \cong G_1$.

Наконец покажем, как с помощью графа G_1^* и реализации G_2 получить связную реализацию графа $H \in \{H^1, H^2\}$. С этой целью рассмотрим произвольную клику Q_j графа G_1^*, прообразом которой относительно преобразования $G^* \to G_1^*$ служит компонента $Q_j^* \in \boldsymbol{Q}_2^*$ графа G^*. Ясно, что семейство

$$\{Q_j \mid j \in I_2\} \tag{15}$$

всех таких клик в графе G_1^* образует правильный $(3m-1)$-фактор. Пусть $Q_{j_1}^*, Q_{j_2}^*, \ldots, Q_{j_m}^*$ — список компонент, сопряженных с Q_j^* в графе G^*, и пусть $R_{j_s}^j$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$ — треугольник, соответствующий паре подграфов Q_j и $G_1^*(VQ_{j_s}^*)$,

$$\boldsymbol{R}^j = \{R_{j_s}^j \mid 1 \leqslant s \leqslant m\}, \quad VR_{j_s}^j = \{3s-2, 3s-1, 3s\}.$$

Удалим из G_1^* все ребра клики Q_j, входящие в множество $EQ_j \setminus E\boldsymbol{R}^j$. В полученном графе треугольники $R_{j_s}^j$ образуют 2-сочетание, при котором подграф, порожденный множеством $V\boldsymbol{R}^j$, изоморфен графу mK_3, а подграф, порожденный окружением каждой вершины $v \in V\boldsymbol{R}^j$, изоморфен графу H_1. Возьмем один экземпляр графа G_2 с хорошим e_2-отмеченным 2-фактором $\boldsymbol{T}_2$:

$$\boldsymbol{T}_2 = \{T_s^2 \mid 1 \leqslant s \leqslant m\}, \quad VT_s^2 = \{3s-2, 3s-1, 3s\}.$$

Легко видеть, что графы $G_1^* - (EQ_j \setminus E\boldsymbol{R}^j)$ и G_2 удовлетворяют всем условиям леммы 5 (см. замечание 5). Следовательно, в силу этой леммы существует такая подстановка (11) с параметром $q = m$, удовлетворяющая условию (12), что граф G^j, полученный склейкой $G_1^* - (EQ_j \setminus E\boldsymbol{R}^j)$ и G_2 по подграфам $\boldsymbol{R}^j$ и $\boldsymbol{T}_2$ вдоль (11), удовлетворяет условию (13), а именно

$$G^j_{(3s-2, i_{3s-2})} \cong G^j_{(3s-1, i_{3s-1})} \cong G^j_{(3s, i_{3s})} \cong H, \quad 1 \leqslant s \leqslant m.$$

Здесь, как и в лемме 5, 2-сочетание $\boldsymbol{T}_2^j = \{T_s^j \mid 1 \leqslant s \leqslant m\}$ графа G^j есть образ $\boldsymbol{R}^j$ и $\boldsymbol{T}_2$ после применения указанной операции склейки, $VT_s^j = \{(3s-2, i_{3s-2}), (3s-1, i_{3s-1}), (3s, i_{3s})\}$. Кроме того, на основании леммы 5 граф G^j связен и $\boldsymbol{T}_2^j$ является в G^j хорошим xy-отмеченным 2-сочетанием.

Применив указанную процедуру к каждой из оставшихся компонент семейства (15), получим связный, регулярный степени $\deg G_1 + \deg G_2 - 2$

граф, который обозначим через G_2^*. Точно так же, как и в теореме 3, убеждаемся, что G_2^* — реализация графа H, имеющая хороший xy-отмеченный 2-фактор $\boldsymbol{T} = \bigcup\limits_{j \in I_2} \boldsymbol{T}_2^j$.

Наконец, применив при $p = n$, $q = m$ все отмеченное выше к каждому двудольному графу из леммы 1 (леммы 2), получим такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа H, что в каждой реализации из этого множества имеется хороший xy-отмеченный 2-фактор. Теорема 7 доказана.

Пример 2. Теорема 7 проиллюстрирована на рис. 7 применительно к реализациям G_1 и G_2 ($G_1 \cong G_2$) простой цепи $P_5 \cong H_1 \cong H_2$. Ребра треугольников хорошего $e_1(e_2)$-отмеченного 2-фактора графа G_1 (G_2) указаны жирными линиями.

Пусть, как и выше, H_1 и H_2 — конечные графы, $VH_1 \cap VH_2 = \{x, y\}$, $e_1 = xy$ и $e_2 = xy$ — фиксированные ребра из EH_1 и EH_2 соответственно, и пусть по крайней мере для одного из графов H_1, H_2, например H_1, существует такой автоморфизм η, что $\eta(x) = y$ и $\eta(y) = x$. Тогда, очевидно, графы $H^1 \cong H_1 \bigcup\limits_{\psi_1} H_2$ и $H^2 \cong H_1 \bigcup\limits_{\psi_2} H_2$ изоморфны. Действительно, отображение ζ, действующее на объединении $VH_1 \cup (VH_2 \setminus \{x, y\})$ по правилу

$$\zeta(z) = \begin{cases} \eta(z), & \text{если } z \in VH_1, \\ z, & \text{если } z \in VH_2 \setminus \{x, y\}, \end{cases}$$

есть изоморфизм графа H^1 на граф H^2.

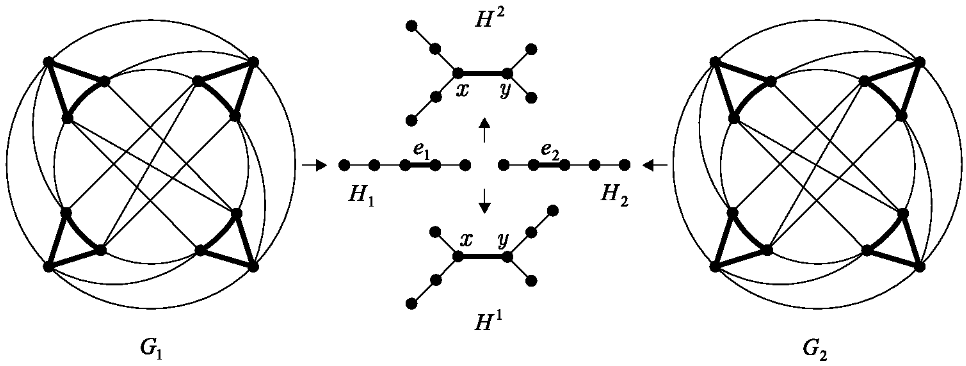

Рис. 7. Построение реализуемых графов H^1 и H^2

Пусть G_1 — связная реализация графа H_1, содержащая e_1-отмеченный 2-фактор $\boldsymbol{T}_1$, а $\boldsymbol{\Theta}_1$ — соответствующее $\boldsymbol{T}_1$ семейство изоморфизмов вида (1). Тогда элементы из $\boldsymbol{\Theta}_1$ можно выбрать так, чтобы пара $(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{\Theta}_1)$ была хорошей. В самом деле, пусть для некоторого треугольника $T \in \boldsymbol{T}_1$,

$VT = \{u, v, w\} \subset VG_1$, соотношения (6) нарушены, скажем,

$$\theta_u(v) = \theta_v(u) = \theta_w(u) = x, \quad \theta_u(w) = \theta_v(w) = \theta_w(v) = y.$$

Тогда легко видеть, что изоморфизм $\xi = \theta_v^{-1}\eta\theta_v$ есть такой элемент группы $\mathrm{Aut}(G_v)$, что $\xi(u) = w$ и $\xi(w) = u$. (Здесь $\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов графа G.) Следовательно, для изоморфизма $\theta'_v = \theta_v\xi$ графа G_v на граф H_1 имеем

$$\theta_u(v) = \theta'_v(w) = \theta_w(u) = x, \quad \theta_u(w) = \theta'_v(u) = \theta_w(v) = y.$$

Таким образом, заменив в $\mathbf{\Theta}_1$ изоморфизм θ_v на изоморфизм θ'_v, получаем, что треугольник T образует в графе G_1 хорошее e_1-отмеченное 2-сочетание. Применив (если это необходимо) указанную процедуру к каждому из оставшихся треугольников семейства $\boldsymbol{T}_1$, получим хорошую пару $(\boldsymbol{T}_1, \mathbf{\Theta}_1)$. Следовательно, справедлива

Теорема 8. *Пусть H_1, H_2 — конечные графы, $VH_1 \cap VH_2 = \{x, y\}$, $e_1 = xy$ и $e_2 = xy$ — фиксированные ребра из EH_1 и EH_2 соответственно, и пусть существует такой автоморфизм η графа H_1, что $\eta(x) = y$ и $\eta(y) = x$. Кроме того, пусть существует конечная реализация G_1 графа H_1, содержащая e_1-отмеченный 2-фактор и такая конечная реализация G_2 графа H_2, содержащая хороший e_2-отмеченный 2-фактор, что $\min\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 6$ и $\max\{|G_1|, |G_2|\} \geqslant 9$. Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа*

$$H \cong H_1 \bigcup_{\psi_1} H_2 \cong H_1 \bigcup_{\psi_2} H_2,$$

что каждая реализация из этого множества содержит хороший xy-отмеченный 2-фактор.

5. О реализациях, допускающих правильные n-факторы ($n \geqslant 3$)

Естественным обобщением понятий x-отмеченного 1-фактора и e-отмеченного 2-фактора, возможности которых были достаточно разносторонне представлены в разд. 3 и 4, является понятие C-отмеченного n-фактора, где C — фиксированная клика с $n \geqslant 3$ вершинами.

Определение 5. Пусть G — связная реализация графа H и C — фиксированная клика из H, $VC = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 3$. Далее пусть $\boldsymbol{Q}$ — правильный n-фактор графа G. Граф $\boldsymbol{Q}$ назовем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-*отмеченным* или просто C-*отмеченным*, если существует такое семейство изоморфизмов (1), что $\theta_v(N(v, \boldsymbol{Q})) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ для каждой вершины $v \in VG$.

Пусть G_1 и G_2 — реализации графов H_1 и H_2 соответственно,

$$C = VH_1 \cap VH_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

$H_1(C)$, $H_2(C)$ — фиксированные клики порядка $n \geqslant 3$ из H_1, H_2, и пусть $\boldsymbol{Q}_1 = \{Q_1^i \mid i \in I\}$ и $\boldsymbol{Q}_2 = \{Q_2^j \mid j \in J)(I \cap J = \varnothing\}$ — C-отмеченные n-факторы графов G_1 и G_2 соответственно. Всюду в этом разделе подразумевается, что семейства $\boldsymbol{\Theta}_1$ и $\boldsymbol{\Theta}_2$ вида (1), соответствующие $\boldsymbol{Q}_1$ и $\boldsymbol{Q}_2$, зафиксированы. Пусть G_1^i (G_2^j) — такая копия графа G_1 (G_2), что

$$VG_1^i \cap VG_2^j = VQ_1^i = VQ_2^j = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}.$$

Далее пусть ψ — произвольная подстановка множества $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$, т. е.

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & n+1 \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n & k_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Построим семейство графов

$$\{G^{\psi,i,j} \mid \psi \in \boldsymbol{S}_{n+1},\ i \in I,\ j \in J\},$$

которые получаются склейками G_1^i и G_2^j по подграфам Q_1^i и Q_2^j $(i \in I,$ $j \in J)$ вдоль ψ, когда ψ пробегает всю симметрическую группу $\boldsymbol{S}_{n+1}$. Пусть, как и раньше, клика $Q^{\psi,i,j}$ из $G^{\psi,i,j}$ есть образ Q_1^i и Q_2^j после применения операции $G_1^i \bigcup\limits_{\psi} G_2^j$,

$$VQ^{\psi,i,j} = \{(1, k_1), (2, k_2), \ldots, (n, k_n), (n+1, k_{n+1})\} \subset VG^{\psi,i,j}.$$

Положим

$$\mathscr{X} = \left\{ H \cong H_1 \bigcup_{\xi} H_2 \mid \xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_{p_1} & x_{p_2} & \ldots & x_{p_n} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{S}_n \right\}.$$

Ясно, что при любом выборе $\psi \in \boldsymbol{S}_{n+1}$, $i \in I$ и $j \in J$ имеет место включение

$$\{G^{\psi,i,j}(N(v)) \mid v \in VQ^{\psi,i,j}\} \subseteq \mathscr{X}.$$

В связи с отмеченными построениями возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Все ли графы, входящие в множество $\mathscr{X}$, являются реализуемыми?

Вопрос 2. Пусть H — реализуемый граф из $\mathscr{X}$; верно ли, что для любых $i \in I$, $j \in J$ существует такая подстановка (16) (вообще говоря, зависящая от i и j), что

$$G^{\psi,i,j}_{(1,k_1)} \cong G^{\psi,i,j}_{(2,k_2)} \cong \ldots \cong G^{\psi,i,j}_{(n,k_n)} \cong G^{\psi,i,j}_{(n+1,k_{n+1})} \cong H? \tag{17}$$

Вопрос 3. Можно ли построить реализацию графа $H \in \mathscr{X}$, если известно, что для любых $i \in I$, $j \in J$ существует подстановка (16), удовлетворяющая условию (17), и как это сделать?

Положительные ответы на эти вопросы получены в разд. 4 для случая $n = 2$, когда $\boldsymbol{Q}_1$ ($\boldsymbol{Q}_2$) — хороший $e_1(e_2)$-отмеченный 2-фактор графа G_1 (G_2). Покажем на примере, что в общем случае, т. е. при $n \geqslant 3$ без дополнительных условий, ответы на первый и второй вопросы отрицательные.

С этой целью рассмотрим рис. 8, где слева изображен фрагмент бесконечного графа G_1, который, как легко видеть, приводит к счетному множеству конечных (бесконечных) связных реализаций графа H_1 (справа), причем каждая реализация из этого множества содержит (x_1, x_2, x_3)-отмеченный 3-фактор. Ребра, входящие в (x_1, x_2, x_3)-отмеченный 3-фактор $\boldsymbol{Q}_1$ графа G_1, обведены жирными линиями. Можно показать, что граф G_1 обладает довольно сильным типом симметрии, а именно любой изоморфизм клик из $\boldsymbol{Q}_1$ продолжается до автоморфизма всего графа. В то же время граф H_1 имеет ровно один автоморфизм — тождественное преобразование. Таким образом, семейство изоморфизмов (1), соответствующее $\boldsymbol{Q}_1$, определено в данном случае однозначно.

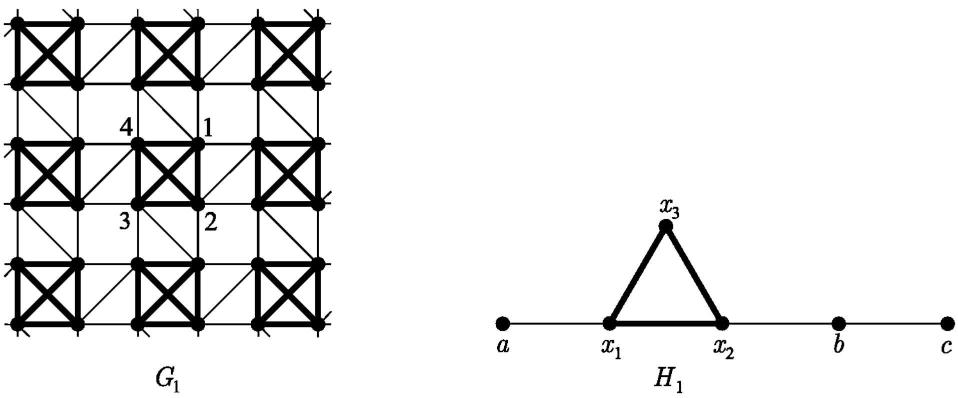

Рис. 8. Фрагмент бесконечной реализации G_1 графа H_1, содержащей (x_1, x_2, x_3)-отмеченный 3-фактор

Пусть G_2 — такая копия графа G_1 с (x_1, x_2, x_3)-отмеченным 3-фактором $\boldsymbol{Q}_2$, что

$$VG_1 \cap VG_2 = VQ_1 = VQ_2 = \{1, 2, 3, 4\},$$

где $Q_1 \in \boldsymbol{Q}_1$, $Q_2 \in \boldsymbol{Q}_2$. Построим также копию H_2 графа H_1, соблюдая следующие условия: $VH_1 \cap VH_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $H_1(\{x_1, x_2, x_3\}) \cong$

$H_2(\{x_1, x_2, x_3\}) \cong K_3$. Как и выше, пусть

$$\mathscr{X} = \left\{ L \cong H_1 \bigcup_{\xi} H_2 \mid \xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_{p_1} & x_{p_2} & x_{p_3} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{S}_3 \right\}.$$

С точностью до изоморфизма множество $\mathscr{X}$ состоит из пяти графов L_1–L_5, изображенных на рис. 9.

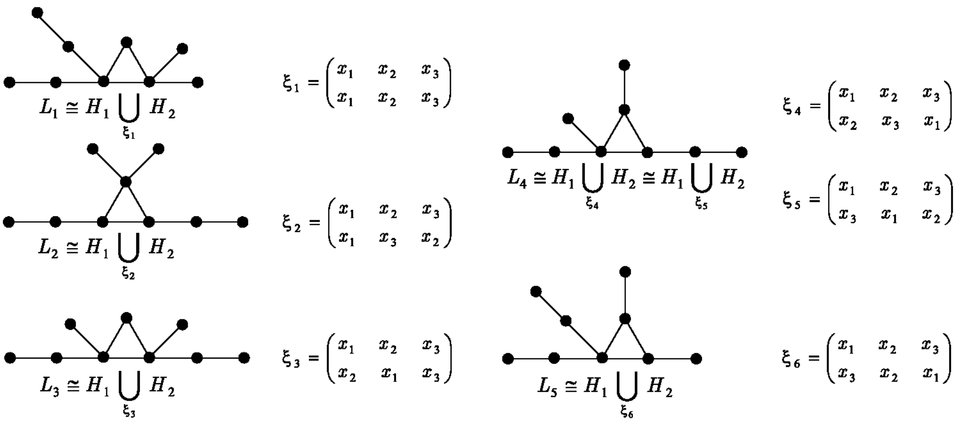

Рис. 9. Графы L_1–L_5

Среди этих графов реализуемыми являются только L_1, L_3 и L_4. Действительно, реализуемость графа L_4 легко устанавливается с помощью теоремы 3, ибо существуют конечные реализации графа H_1 (см. рис. 8) и цепи P_4 ($VP_4 = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $z_1 \sim z_2 \sim z_3 \sim z_4$), содержащие соответственно x_3-отмеченный и z_3-отмеченный 1-факторы. Существование реализаций для графов L_1 и L_3 вытекает из теоремы 9, хотя реализуемость графа L_3 можно установить, дважды применяя теорему 3. Наконец, вывод об отсутствии реализаций для графов L_2 и L_5 можно получить, используя комбинаторный прием, впервые предложенный в [14].

Обратимся теперь к графу $G^{\psi} \cong G_1 \bigcup\limits_{\psi} G_2$, где ψ — подстановка, действующая на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Оказывается, что только для графа $L \in \{L_1, L_3\}$ существует подстановка $\psi \in \boldsymbol{S}_4$, удовлетворяющая условию (17), т. е. такая, что

$$G^{\psi}_{(1,k_1)} \cong G^{\psi}_{(1,k_2)} \cong G^{\psi}_{(3,k_3)} \cong G^{\psi}_{(4,k_4)} \cong L.$$

Для графа L_1 такими подстановками являются

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

а для графа L_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для реализуемого графа $L_4 \in \mathscr{X}$ не существует подстановки ψ, удовлетворяющей условию (17). Следовательно, ответ на второй вопрос в общем случае также отрицательный.

Пусть G_1 и G_2 — такие конечные реализации соответственно графов H_1 и H_2, что

$$|G_1| = p(n+1), \quad |G_2| = q(n+1) \quad (p \geqslant 3,\, q \geqslant 2,\, n \geqslant 3).$$

Тогда при введенных ранее обозначениях справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть при любых $i \in I$, $j \in J$ существует подстановка* (16), *удовлетворяющая условию* (17), *т. е. такая подстановка, что для некоторого фиксированного графа $H \in \mathscr{X}$*

$$G^{\psi,i,j}_{(1,k_1)} \cong G^{\psi,i,j}_{(2,k_2)} \cong \ldots \cong G^{\psi,i,j}_{(n,k_n)} \cong G^{\psi,i,j}_{(n+1,k_{n+1})} \cong H.$$

Тогда имеется такое счетное множество конечных (бесконечных) связных реализаций графа H, что каждая реализация из этого множества имеет C-отмеченный n-фактор.

Доказательство этой теоремы повторяет в основном доказательства теорем 1, 3 и 7, и поэтому не приводится.

Из теоремы 9 и выполненных ранее построений вытекает, что графы L_1 и L_3, изображенные на рис. 9, реализуемы. Чтобы проиллюстрировать независимость теоремы 9, заметим также, что реализуемость графа L_1 нельзя доказать с использованием только теорем 3 и 7.

Автор благодарен А. Д. Коршунову за замечания, способствующие улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агакишиева С. Я.** Графы, окружением вершин которых служат простые цепи или простые циклы // Докл. АН АзССР. 1970. Т. 26, № 12. С. 7–10.
2. **Булитко В. К.** К вопросу о конечности однородных структур, заданных локально // Вопросы экономики моря и морского транспорта. Одесса: Ин-т экономики АН УССР, 1972. С. 159–165.
3. **Булитко В. К.** О графах с заданными окружениями вершин // VI Всесоюз. тополог. конф. (Тбилиси, 2–7 окт. 1972 г.).: Тез. докл. Тбилиси, 1972. С. 23–24.

4. **Булитко В. К.** О графах с заданными окружениями вершин // Математическая логика, теория алгоритмов и теория множеств. М.: Наука, 1973. С. 78–94. (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 133).
5. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
6. **Зыков А. А.** Теория конечных графов.I. Новосибирск: Наука, 1969.
7. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
8. **Кохов В. А.** Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. Новосибирск: Наука, 1986. С. 97–125.
9. **Махнев А. А.** Локально $CQ(3,5)$-графы и геометрии с короткими прямыми // Дискрет. математика. 1998. Т. 10, вып. 2. С. 72–86.
10. **Махнев А. А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, вып. 5. С. 25–76.
11. **Оре О.** Теория графов. М.: Наука, 1980.
12. **Орлович Ю. Л.** О конструктивном перечислении одного класса дискретных систем // Автоматизация проектирования дискретных систем (CAD DD'99): Материалы III Междунар. конф. (Минск, 10–12 нояб. 1999 г.). Минск: ИТК НАНБ, 1999. Т. 2. С. 136–143.
13. **Aigner M., Triesch E.** Realizability and uniqueness in graphs // Discrete Math. 1994. V. 136, N 1–3. P. 3–20.
14. **Blass A., Harary F., Miller Z.** Which trees are link graphs? // J. Combin. Theory. Ser. B. 1980. V. 29, N 3. P. 277–292.
15. **Brown M., Connelly R.** On graphs with a constant link. I // New directions in the theory of graphs. New York: Acad. Press, 1973. P. 19–51.
16. **Bugata P.** Note on algorithmic solvability of Trahtenbrot — Zykov problem // Ann. Discrete Math. V. 51. Amsterdam: Horth-Holland, 1992. P. 45–49.
17. **Bugata P., Nagy A., Vávra R.** A polynomial time algorithm recognizing link trees // J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 3. P. 417–433.
18. **Bulitko V. K.** On a recursive property of block-complete graphs // Proc. Czechoslovak Conf. on Graphs. Zemplinska Širava, 1978. P. 20–30 (in Russian).
19. **Hall J. I.** Classifying copolar spaces and graphs // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1982. V. 33, N 132. P. 421–449.
20. **Hall J. I.** A local characterization of the Johnson scheme // Combinatorica. 1987. V. 7, N 1. P. 77–85.
21. **Hall J. I.** Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic F_2-transvection groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1989. V. 58, N 1. P. 89–111.
22. **Hell P.** Graphs with given neighborhoods. I // Problèmes combinatories et théorie des graphes: Proc. Coll. Intern. C.N.R.S. Orsay, 1976. P. 219–223.

23. **Krausz J.** Démonstration nouvelle d'un théoreme de Whitney sur les re'seaux // Mat. Fiz. Lapok. 1943. V. 50. P. 75–85.
24. **Nedela R.** Covering spaces of locally homogeneous graphs // Discrete Math. 1993. V. 121, N 1–3. P. 177–188.
25. **Ore O.** The four-color problem. New York: Acad. Press, 1967.
26. **Read R. C., Wilson R. J.** An atlas of graphs. Oxford: Clarendon Press, 1998.
27. **Ronan M. A.** On the second homotopy group of certain simplicial complexes and some combinatorial applications // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1981. V. 32, N 126. P. 225–233.
28. **Surowski D. B.** Vertex-transitive triangulations of compact orientable 2-manifolds // J. Combin. Theory. Ser. B. 1985. V. 39, N 3. P. 371–375.
29. **Vince A.** Locally homogeneous graphs from groups // J. Graph Theory. 1981. V. 5, N 4. P. 417–422.
30. **Vogler W.** Graphs with given group and given constant link // J. Graph Theory. 1984. V. 8, N 1. P. 111–115.
31. **Vogler W.** Representing groups by graphs with constant link and hypergraphs // J. Graph Theory. 1986. V. 10, N 4. P. 461–475.
32. **Zykov A. A.** Problem 30 // Theory of graphs and its applications: Proc. Symp. in Smolenice, 1963. Prague: Publ. Czechoslovak. Acad. Sci., 1964. P. 164–165.

Адрес автора:

Институт математики
НАН Беларуси,
ул. Сурганова, 11,
220072 Минск,
Республика Беларусь.
E-mail: orlovich@im.bas-net.by

Статья поступила
10 января 2002 г.