ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2002. Серия 1. Том 9, № 2, 91–99

УДК 519.17

ПЕРЕДАЧА СООБЩЕНИЙ В ЛОКАЛЬНОЙ СЕТИ С ДВУМЯ ЦЕНТРАЛЬНЫМИ ЭВМ*)

Н. С. Плеханова, А. В. Пяткин

Рассматривается задача оптимизации времени передачи сообщений в локальной сети с двумя центральными ЭВМ, соединенными между собой шиной с единичной пропускной способностью. Эта задача была сведена к обобщению задачи раскраски инциденторов, в которой помимо инциденторов красятся также средние части некоторых дуг. В случае, когда наибольшая нагрузка приходится на шину, соединяющую центральные ЭВМ, предложен алгоритм для нахождения точного решения с временной сложностью $O(n^2\Delta^2)$. В противном случае абсолютная погрешность этого алгоритма не превосходит 1.

1. Содержательная постановка задачи

Задана локальная сеть, состоящая из двух центральных ЭВМ, которые соединены друг с другом шиной, и терминалов, каждый из которых соединен шиной только с одной центральной ЭВМ (рис. 1).

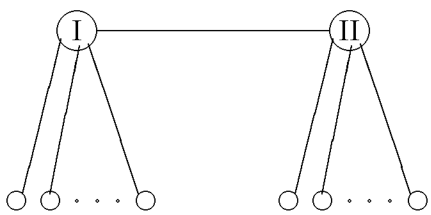

Рис. 1

Шину, соединяющую две центральные ЭВМ, назовем *шиной верхнего уровня*, а остальные шины — *шинами нижнего уровня*. Пропускная способность каждой шины равна единице информации за единицу

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99–01–00581), голландско-российской программы NWO (грант 047–008–006) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

времени. Для любых двух терминалов i, j известна величина d_{ij}, равная количеству единиц информации, которую i-й терминал должен передать j-му терминалу. Передача информации может осуществляться как без запоминания, так и с запоминанием в центральных ЭВМ. Если информация не запоминается в центральных ЭВМ, то на ее передачу из i-го терминала в j-й терминал требуется одна единица времени. Если информация запоминается в одной из центральных ЭВМ, то на ее передачу требуется как минимум две, а если в обеих — то как минимум три единицы времени. Предполагается, что на объем запоминаемой информации и время ее хранения в памяти центральных ЭВМ ограничений нет. Требуется составить такое расписание передачи всей информации в сети, чтобы общее время занятости сети было минимальным.

Аналогичная задача с одной центральной ЭВМ была рассмотрена в работах [5, 6]. В них было доказано, что в этом случае наименьшая длина расписания равна Δ, т. е. максимальной нагрузке на шину. В [5, 7] рассмотрена задача передачи сообщений в сети связи с любым числом центральных ЭВМ, соединенных в произвольную сеть каналами связи большой пропускной способности. Было показано, что длина расписания передачи сообщений в такой сети не превосходит $\Delta + d + 1$, где d — диаметр сети верхнего уровня. Таким образом, специфика рассматриваемой задачи состоит в ограничении на пропускную способность шины, соединяющей две центральные ЭВМ.

Для решения задач из [5–7] использовалась модель инциденторной раскраски мультиграфов. Однако для данной задачи эта модель оказывается недостаточной. В разд. 2 предлагается обобщенная модель инциденторной раскраски, в которой помимо инциденторов красятся также и средние части некоторых дуг, что позволяет учесть ограничение на пропускную способность шины верхнего уровня. Если нагрузку на эту шину обозначить через k, а максимальную нагрузку на шины нижнего уровня — через Δ, то длина T расписания удовлетворяет неравенству $T \geqslant \max\{k, \Delta\}$. В разд. 3 изложен алгоритм временной сложности $O(n^2\Delta^2)$, позволяющий находить расписание длины $T \leqslant \max\{k, \Delta+1\}$. Таким образом, в случае $k > \Delta$ этот алгоритм дает точное решение; в противном случае его абсолютная погрешность не превосходит 1.

2. Математическая модель

Рассматриваемую задачу сведем к следующей задаче инциденторной раскраски ориентированного мультиграфа $G = (V, E)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, дуги из E_i соединяют вершины из V_i $(i = 1, 2)$, а дуги из E_0 соединяют вершины из V_1 с вершинами из V_2. Подграфы G, индуцированные множествами V_1 и V_2, обозначим через G_1

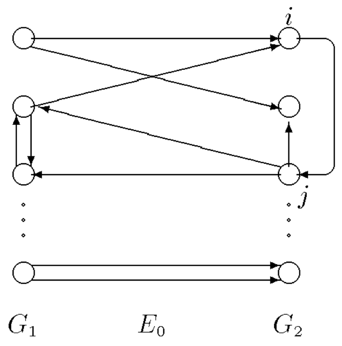

Рис. 2

и G_2 соответственно. Легко видеть, что $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ (рис. 2).

Каждому терминалу поставим в соответствие вершину мультиграфа G. При этом вершины из V_1 соответствуют терминалам, соединенным с первой центральной ЭВМ, а вершины из V_2 — со второй. Число дуг, ведущих из вершины i в вершину j, положим равным d_{ij}. Таким образом, каждая дуга соответствует одной единице информации, которую нужно передать из i-го терминала в j-й терминал. Ясно, что дуги из E_0 соответствуют тем единицам информации, для передачи которых используется шина верхнего уровня. Тогда $|E_0| = k$ и степень мультиграфа G равна Δ.

Под *инцидентором дуги* мультиграфа G понимается упорядоченная пара, состоящая из вершины и инцидентной ей дуги; инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Таким образом, произвольная дуга $e = uv$ имеет два инцидентора — *начальный* (u, e) и *конечный* (v, e). Два инцидентора называются *однотипными*, если они оба являются либо начальными, либо конечными. Инциденторы, имеющие общую вершину, будем называть *смежными*. *Раскраска инциденторов* — это произвольное отображение $f : I \to Z^+$ из множества инциденторов в множество целых положительных чисел — *цветов*.

Если дуга принадлежит E_1 или E_2, то красятся только ее инциденторы. При этом если в цвет a_e окрашен начальный инцидентор дуги e, а в цвет b_e — конечный, то необходимо выполнение предиката $p_e(a_e, b_e) = (a_e \leqslant b_e)$.

Если дуга e принадлежит E_0, то помимо инциденторов мы красим также ее среднюю часть. В этом случае необходимо выполнение предиката $p_e(a_e, c_e, b_e) = (a_e \leqslant c_e \leqslant b_e)$, где a_e — цвет начального инцидентора, b_e — цвет конечного инцидентора, c_e — цвет средней части дуги e.

Будем говорить, что *дуга имеет цвет* $\alpha \in Z^+$, если все ее части имеют цвет α.

Цвет инцидентора или части дуги соответствует моменту времени, в который данная единица информации передается по шине, соединяющей центральную ЭВМ с данным терминалом или с другой центральной ЭВМ. Предикаты описывают очередность передачи информации по шинам.

Раскраска инциденторов мультиграфа G называется *правильной* (*полуправильной*), если смежные (смежные однотипные) инциденторы окрашиваются различно. Понятие полуправильной раскраски было впервые введено в [1] и использовано затем в [2].

Раскраска мультиграфа G называется *допустимой* (*полудопустимой*), если

1) инциденторы мультиграфа G окрашены правильно (полуправильно);

2) для дуг мультиграфа G выполняются соответствующие предикаты $q(a, b)$ и $p(a, c, b)$;

3) все цвета средних частей дуг из E_0 различны.

Минимальное число цветов, которое требуется для допустимой раскраски мультиграфа G (обозначим его через $\chi^I(G)$), соответствует искомому минимальному времени передачи всей информации в сети.

Неравенство $\chi^I(G) \geqslant \max\{k, \Delta\}$ вытекает из ограничений 1 и 3. Однако следующие примеры показывают, что она не является точной при $k \leqslant \Delta$.

Пример 1. Пусть подграфы G_1 и G_2 мультиграфа G состоят из двух вершин каждый — источника и стока степени $\Delta \geqslant 2$, $k = 2$. Здесь $\max\{k, \Delta\} = \Delta$.

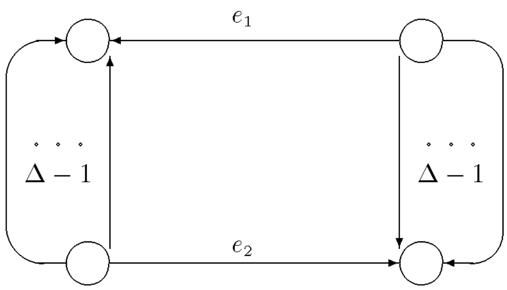

Рис. 3

Предположим, что $\chi^I(G) = \Delta$. Каждый подграф G_1 и G_2 имеет $\Delta - 1$ дуг. Дуги множества E_0 обозначим через e_1 и e_2 (рис. 3). Пусть начальный инцидентор дуги e_2 имеет цвет α. Тогда начальные инциденторы дуг подграфа G_1 окрашены в цвета $1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, \Delta$.

Следовательно, при раскраске конечных инциденторов этих дуг используются цвета $\alpha+1,\ldots,\Delta$ и $\alpha-1$ цветов из множества $\{1,2,\ldots,\alpha\}$. Таким образом, остается неиспользованным один цвет β такой, что $\beta\leqslant\alpha$.

Значит, этим цветом красится конечный инцидентор дуги e_1. Тогда ее начальный инцидентор не может быть окрашен в больший цвет. Поэтому он красится в цвет γ, где $\gamma\leqslant\alpha$. Следовательно, начальные инциденторы дуг подграфа G_2 окрашены в цвета $1,2,\ldots,\gamma-1$, $\gamma+1,\ldots,\Delta$, тогда в раскраске их конечных инциденторов участвуют цвета $\gamma+1,\ldots,\Delta$. Значит, цвет, в который окрашен конечный инцидентор дуги e_2, не может быть больше γ. Пусть таким цветом является цвет δ; он обладает свойством $\delta\leqslant\gamma\leqslant\alpha$. Но начальный инцидентор дуги e_2 имеет цвет α. Следовательно, цвет конечного инцидентора $\delta\geqslant\alpha$ (рис. 4).

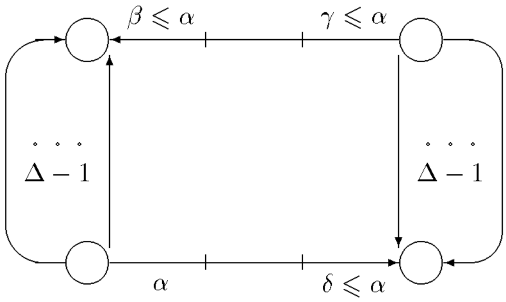

Рис. 4

Тогда $\delta=\alpha$ и вся дуга e_2 окрашена в цвет α. Поэтому конечные инциденторы дуг подграфа G_2 имеют цвета $1,2,\ldots,\alpha-1,\alpha+1,\ldots,\Delta$, а их начальные инциденторы — цвета $1,2,\ldots,\alpha-1$ и $\Delta-\alpha-1$ цветов из множества цветов $\{\alpha,\ldots,\Delta\}$, за исключением некоторого цвета γ, где $\gamma\geqslant\alpha$. Следовательно, $\gamma=\alpha$. Так как начальный инцидентор дуги e_1 окрашен в цвет α, то ее конечный инцидентор должен иметь не меньший цвет β. Значит, $\beta=\alpha$ и вся дуга e_1 окрашена в цвет α. Получаем, что средние части обеих дуг e_1 и e_2 имеют цвет α, но тогда раскраска графа неправильная. Значит, предположение о том, что мультиграф G можно раскрасить в Δ цветов, неверно.

Можно построить класс мультиграфов со свойством $\chi^I(G)>\max\{k,\Delta\}$.

Через E_0^+, E_0^- обозначим дуги из множества E_0, ведущие из V_1 в V_2 и из V_2 в V_1 соответственно, через M_i — множества источников степени Δ, через N_i — множества соседей вершин из M_i в G_i. Пусть $|E_0^+|=t_1$, $|E_0^-|=t_2$, $|M_i|=m_i$ и $|N_i|=n_i$. Обозначим через γ^{M_i} и γ^{N_i} число дуг, инцидентных всем вершинам множеств M_i и N_i соответственно в подграфе G_i $(i=1,2)$.

Пример 2. Пусть мультиграф G состоит только из источников и стоков степени Δ, $k = \Delta$ и $t_1 = t_2 = k/2$. Тогда $\max\{k, \Delta\} = \Delta$.

Так как N_i — множество стоков степени Δ в G_i, то $\gamma^{M_i} = m_i\Delta - k/2$, $\gamma^{N_i} = n_i\Delta - k/2$. Очевидно, что $\gamma_i = \delta_i$, следовательно, $m_i = n_i$ $(i = 1, 2)$.

Предположим, что $\chi^I(G) = \Delta$. Тогда при каждой вершине имеется инцидентор каждого цвета. Если конечный инцидентор дуги окрашен в цвет 1, то и начальный инцидентор этой дуги окрашен в цвет 1, т. е. вся дуга имеет цвет 1. Так как число источников в G равно числу стоков, то эти дуги образуют совершенное паросочетание в мультиграфе G. Аналогичное утверждение верно и для любого другого цвета.

Рассмотрим произвольное совершенное паросочетание P в мультиграфе G. Пусть $P \cap E_0 = P_0$ и $P \cap E_1 = P_1$, где $|P_1| = p_1$. Так как $n_1 = m_1$, то P_1 не покрывает ровно $m_1 - p_1$ источников и столько же стоков в G_1. Значит, они покрыты паросочетанием P_0, т. е. в P_0 содержится $2(m_1 - p_1)$ дуг. В случае $p_1 = m_1$ в паросочетании P нет дуг из E_0. Таким образом, в любом совершенном паросочетании либо не содержится ни одной дуги из E_0, либо содержатся хотя бы две дуги из E_0, что нарушает правильность раскраски. Следовательно, $\chi^I(G) > \Delta$.

Из примеров видно, что если $\max\{k, \Delta\} = \Delta$, то для раскраски мультиграфа G может быть недостаточно Δ цветов. Укажем класс мультиграфов G таких, что $\chi^I(G) = \max\{k, \Delta\} = \Delta$. Для этого нам потребуются следующие утверждения.

Теорема Кёнига (см. [3]). *Для любого двудольного мультиграфа H верно соотношение $\chi_e(H) = \Delta(H)$, где $\chi_e(H)$ — реберное хроматическое число мультиграфа H.*

Лемма 1. *Пусть $G = (M \cup N, E)$ — двудольный мультиграф степени Δ, и пусть $m = |M| \leqslant |N|$. Тогда если $|E| > (m-1)\Delta$, то в G имеется паросочетание, покрывающее множество M.*

Доказательство. По теореме Кёнига существует правильная реберная раскраска мультиграфа G в Δ цветов. Так как $|E| > (m-1)\Delta$, то имеется некоторый цвет α, которым окрашено более $m - 1$ дуг. Поскольку $m = |M|$, цветом α окрашено ровно m дуг, образующих искомое паросочетание в G. Лемма 1 доказана.

Утверждение 1. *Пусть G состоит только из источников и стоков степени Δ, $k = \Delta$ и $E_0 = E_0^+$, т. е. $t_1 = k$, $t_2 = 0$. Тогда $\chi^I(G) = \Delta$.*

Доказательство. Ясно, что $\gamma^{M_1} = m_1\Delta - k = m_1\Delta - \Delta = (m_1 - 1)\Delta$ и $\gamma^{N_1} = n_1\Delta$. Так как $\gamma^{M_1} = \gamma^{N_1}$, то $m_1 - 1 = n_1$. Аналогично для G_2 получаем $m_2 = n_2 - 1$.

Рассмотрим произвольную дугу $uv \in E$. Так как $t_2 = 0$, то $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Достаточно показать, что в двудольных мультиграфах $G_1 \backslash \{u\}$

и $G_2\backslash\{v\}$ имеются совершенные паросочетания. Действительно, $G_1\backslash\{u\}$ содержит $n_1+m_1-1=2n_1$ вершин, а число дуг в нем равно $|E(G_1\backslash\{u\})|=n_1\Delta-(\Delta-\delta_u)$, где δ_u — число дуг из E_0, инцидентных источнику u. Так как $\delta_u\geqslant 1$, то $|E(G_1\backslash\{u\})|\geqslant n_1\Delta-(\Delta-1)=(n_1-1)\Delta+1$. Поскольку $m_1-1=n_1$, по лемме 1 в мультиграфе $G_1\backslash\{u\}$ имеется совершенное паросочетание.

В графе $G_2\backslash\{v\}$ совершенное паросочетание находится аналогичным образом.

Для раскраски полученных паросочетаний и выбранной дуги $e\in E$ используем цвет Δ.

Поскольку k и Δ уменьшились на 1, то, повторив описанную выше процедуру Δ раз, получим раскраску G в Δ цветов. Утверждение 1 доказано.

В следующем разделе будет получена верхняя оценка $\chi^I(G)\leqslant\max\{k,\Delta+1\}$. Из нее следует, в частности, что $\chi^I(G)=k$ при $k>\Delta$.

3. Нахождение раскраски

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Для любого мультиграфа G степени Δ с $|E_0|=k$ справедлива оценка $\chi^I(G)\leqslant\max\{k,\Delta+1\}$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $k\geqslant\Delta+1$ (так как если $k<\Delta+1$, то, добавив $\Delta+1-k$ изолированных дуг в E_0, получим мультиграф G' со свойством $k'=\Delta+1$).

Мультиграф G преобразуем следующим образом. Каждой вершине $v\in V$ поставим в соответствие две вершины v^+ и v^-, а каждой дуге $uv\in E$ — дугу u^+v^-. Получим двудольный мультиграф $\widetilde{G}$. Легко видеть, что степень мультиграфа $\widetilde{G}$ не превосходит Δ. Следовательно, по теореме Кёнига мультиграф $\widetilde{G}$ можно правильно раскрасить не более чем в Δ цветов. Стянув каждую пару вершин v^+ и v^- в первоначальную вершину v, получим полуправильную раскраску исходного мультиграфа G цветами $1,\ldots,k-1=\Delta$.

Пусть дуги множества E_0 окрашены цветами $1,\ldots,s$. Ясно, что $s\leqslant k-1$. Тогда множество E_0 разбивается на подмножества $E_{01},\ldots,E_{0s}$, где дуги множества E_{0j} окрашены цветом j.

Пусть $|E_{0j}|=l_j$ $(j=1,\ldots,s)$. Так как $s\leqslant k-1$, а $\sum\limits_{j=1}^{s}l_j=k$, то хотя бы одно из чисел $l_1,\ldots,l_s$ не меньше 2. Пусть $l_s\geqslant 2$. Рассмотрим цвета $c_1=1$, $c_{j+1}=c_j+l_j(j=1,\ldots,s-1)$. Тогда $c_s=1+\sum\limits_{j=1}^{s}l_j-l_s=k-l_s+1\leqslant k-1$. Перенумеруем цвета так, чтобы дуги множества E_{0j} стали окрашены цветом c_j $(j=1,\ldots,s)$.

Положим $c_{s+1} = k$ и перекрасим все конечные инциденторы цвета c_j в мультиграфе G в цвет c_{j+1} для всех $j \in \{1, \dots, s\}$. Легко видеть, что такая перекраска не нарушает полуправильности раскраски мультиграфа G. В результате разность между цветами начального и конечного инциденторов для каждой дуги из множества E_{0j} будет не меньше l_j при $j < s$ и будет равна $l_s - 1$ при $j = s$. Поэтому средние части дуг из E_{0j} можно окрасить различными цветами из множества $\{c_j, \dots, c_j + l_j - 1\}$ $(j = 1, \dots, s)$. Получится полудопустимая раскраска мультиграфа G в k цветов.

Перейдем теперь к допустимой раскраске с помощью тех же цветов. Рассмотрим произвольную вершину v. Пусть начальные инциденторы при этой вершине окрашены цветами $a_1 < \dots < a_{d^+(v)}$, а конечные — цветами $b_1 <, \dots, b_{d^-(v)}$. Начальный инцидентор цвета a_i перекрасим в цвет i $(i = 1, \dots, d^+(v))$, а конечный инцидентор цвета b_j — в цвет $k - d^-(v) + j$ $(j = 1, \dots, d^-(v))$. Осуществив такую перекраску для каждой вершины мультиграфа, получим допустимую раскраску инциденторов в k цветов, так как в результате перекраски цвета начальных инциденторов не увеличатся, а цвета конечных инциденторов не уменьшатся. Теорема 1 доказана.

Таким образом, $\chi^I(G) \leqslant \max\{k, \Delta + 1\}$. Следовательно, длина расписания передачи сообщений в локальной сети с двумя центральными ЭВМ удовлетворяет неравенствам $\max\{k, \Delta\} \leqslant T \leqslant \max\{k, \Delta + 1\}$.

Из доказательств теоремы 1 можно извлечь алгоритм с временной сложностью $O(n^2\Delta^2)$, находящий расписание длины $T = \max\{k, \Delta + 1\}$. Этот алгоритм позволяет находить точное решение при $k > \Delta$ и имеет абсолютную единичную погрешность в противном случае.

Авторы выражают благодарность рецензенту В. Г. Визингу за существенное упрощение доказательства теоремы 1. Второй автор благодарит Фонд содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
2. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1981.
4. **Ловас Л., Пламмер М.** Прикладные задачи теории паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998.

5. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

6. **Пяткин А. В.** Задачи раскраски инциденторов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

7. **Pyatkin A. V.** The incidentor coloring of multigraphs and its applications // Discrete Applied Math. 2002. V. 120, N 1–3. P. 207–215.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
26 декабря 2001 г.,
переработанный вариант —
15 марта 2002 г.