ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2002. Серия 1. Том 9, № 3, 3–28

УДК 519.718

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ НЕНАДЕЖНОСТИ СХЕМ В НЕКОТОРЫХ БАЗИСАХ ПРИ ОДНОТИПНЫХ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

М. А. Алехина

Получены нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов. Эти оценки асимптотически совпадают с полученными ранее автором верхними оценками ненадежности схем. Показано, что почти любую булеву функцию в этих базисах можно реализовать асимптотически наилучшей по надежности схемой, ненадежность которой будет асимптотически равной $k\gamma^p$ (γ — вероятность неисправности каждого входа элемента) при $\gamma \to 0$. Константы k и p ($k, p \in \{1, 2\}$) зависят от базиса и типа неисправностей.

Введение

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [6]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $\phi(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует функцию $\bar{\phi}(\tilde{x})$. Для построения надежных схем Дж. Нейман предложил итерационный метод, позволяющий при некотором ограничении на ε (вероятность неправильной работы элемента) с каждым шагом итерации уменьшать вероятность ошибки на выходе схемы. Метод дает экспоненциальное увеличение сложности схемы (примерно в 3^k раз, где k — используемое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Затем схемы с такими же неисправностями рассматривались в работах других авторов, например в [7, 8]. Речь идет о реализации булевых

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00053) и программы «Университеты России» (проект 04.01.003).

функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном базисе Φ [5]. Каждому элементу базиса приписывается положительное число — вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что во всех элементах схемы независимым образом с вероятностью ε происходят сбои. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах. Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_{f} \ \min_{S} L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leqslant p$, а максимум — по всем булевым функциям f от n переменных.

С. И. Ортюков [7] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев ε_n с ростом n. Ненадежность p_n схемы при этом такова, что $QL_g\varepsilon_n < p_n < 1/2$, где $Q > 1$, L_g — сложность реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе.

Для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки ε Д. Улиг [8] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к 1, если вероятность сбоя ε ограничена константой. Ненадежность схемы при этом асимптотически не превосходит εL_g. Нижняя оценка ненадежности не приводится.

Упомянутые авторы решали задачу на минимум сложности схем, реализующих булевы функции с заданной вероятностью (надежностью). Задачу на максимум надежности они не рассматривали.

Возможность максимально надежной реализации почти всех булевых функций в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на выходах элементов установлена автором в [1, 4].

В данной статье рассматривается задача построения схем с асимптотически наибольшей надежностью при однотипных константных неисправностях на входах элементов. Задача минимизации сложности схемы при этом не ставится. Получены нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах. Эти оценки оказываются достаточно точными — они асимптотически совпадают с верхними оценками ненадежности схем, построенных автором в [3]. В итоге получается следующий результат: почти все булевы функции можно реализовать в указанных базисах асимптотически наилучшей по надежности схемой, ненадежность которой будет асимптотически равна $k\gamma^p$, где константы k и p $(k, p \in \{1, 2\})$ зависят от базиса и типа допустимых неисправностей.

Будем рассматривать реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в конечном базисе Φ [6]. Схема реализует булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, если при поступлении на ее входы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все входы элементов схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния типа 0 (1). Неисправности типа 0 на входах элементов характеризуются тем, что поступающий на вход нуль остается нулем, а поступающая на вход единица с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$) может превратиться в нуль. Аналогично определяются неисправности типа 1 на входах функциональных элементов.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Следовательно, надежность схемы равна $1 - P(S)$.

При однотипных константных неисправностях на входах (да и на выходах) элементов произвольную булеву функцию нельзя реализовать схемой сколь угодно высокой надежности. Возникает вопрос: какой максимальной надежности можно добиться при использовании ненадежных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на входах? Ответ на него зависит от базиса и типа неисправностей.

Определение 1. Схему, реализующую булеву функцию, отличную от константы, будем называть a-схемой, если для любых наборов $\tilde{a}, \tilde{b}$ из равенства $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$ следует равенство $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a}) = P_{\bar{f}(\tilde{b})}(S, \tilde{b})$.

Из этого определения ясно, что вероятность ошибки на выходе a-схемы одинакова для всех нулевых (единичных) входных наборов схемы.

В [1] доказана

Лемма 1. *Если подсхема A, содержащая выход схемы S, которая реализует функцию, отличную от константы, является a-схемой с вероятностями ошибок p_0 и p_1, $p_0 + p_1 \leqslant 1$, то $P(S) \geqslant P(A)$.*

Пусть в схеме S, реализующей булеву функцию, отличную от константы, выделена подсхема B, содержащая выход схемы и реализующая тождественную функцию. Обозначим через A подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы B. Если выполнено неравенство $P(S) > P(A)$, то будем говорить, что схема A надежнее схемы S и получается из S удалением подсхемы B.

Определение 2. Схема S, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, называется b-схемой, если из нее нельзя получить

более надежную схему удалением подсхемы, реализующей тождественную функцию.

В [1] доказана

Лемма 2. *Пусть схема A, реализующая булеву функцию f, является b-схемой, и пусть при $\gamma < d$ (d — некоторая константа) выполнено условие $P(A) \leqslant c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ — некоторая функция от γ. Если в схеме A можно выделить подсхему B, реализующую тождественную функцию с вероятностями ошибок p_0 и p_1 такими, что $0 < p_0 + p_1 < 1$, то при $\gamma < d$ верно неравенство*

$$\min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1},\ \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \leqslant c(\gamma).$$

Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, S — любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию g с ненадежностью $P(C) \leqslant 1/2$. Обозначим через $p_{11},\dots,p_{1k}$ всевозможные вероятности ошибок на выходе схемы C при таких входных наборах $\tilde b$, что $g(\tilde b) = 0$. Аналогично пусть $p_{01},\dots,p_{0m}$ — всевозможные вероятности ошибок на выходе схемы C при таких входных наборах $\tilde b$, что $g(\tilde b) = 1$. Полагаем $p^1 = \min\{p_{11},\dots,p_{1k}\}$, $p^0 = \min\{p_{01},\dots,p_{0m}\}$.

Лемма 3. *Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам $P_1(S,\tilde a) \geqslant p^1$, если $f(\tilde a) = 0$; $P_0(S,\tilde a) \geqslant p^0$, если $f(\tilde a) = 1$.*

Доказательство. Пусть $\tilde a$ — такой входной набор булевой функции f, что $f(\tilde a) = 0$. Обозначим через p вероятность появления на входах схемы C такого набора $\tilde b$, что $g(\tilde b) = 1$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S равна $P_1(S,\tilde a) = (1-p)p_{1i} + p(1-p_{0j}) = p_{1i} + p(1-p_{1i}-p_{0j}) \geqslant p_{1i} + p(1-2P(C)) \geqslant p^1$, так как $P(C) \leqslant 1/2$.

Аналогично доказывается второе неравенство. Пусть $\tilde a$ — такой входной набор булевой функции f, что $f(\tilde a) = 1$. Обозначим через p вероятность появления на входах схемы C такого нулевого набора $\tilde b$, что $g(\tilde b) = 0$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S равна $P_0(S,\tilde a) = (1-p)p_{0i} + p(1-p_{1j}) = p_{0i} + p(1-p_{0i}-p_{1j}) \geqslant p_{0i} + p(1-2P(C)) \geqslant p^0$, так как $P(C) \leqslant 1/2$. Лемма 3 доказана.

Замечание 1. Из леммы 3 следует, что $P(S) \geqslant p^i$, $i = 0, 1$.

§ 1. Неисправности типа 0 на входах элементов $x \downarrow y$

Пусть базисные элементы $x \downarrow y$ ($x \downarrow y = \bar x \& \bar y$) подвержены неисправностям типа 0 на входах, причем вероятность неисправности каждого входа элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента — приведены в табл. 1.

Таблица 1

x	y	$x \downarrow y$	p_0	p_1
0	0	1	0	1
0	1	0	$1-\gamma$	γ
1	0	0	$1-\gamma$	γ
1	1	0	$1-\gamma^2$	γ^2

В [3] доказана

Теорема 1. *При неисправностях типа* 1 *на входах элементов* $x|y$ $(x|y = \bar{x} \vee \bar{y})$ *и* $\gamma \leqslant 1/70$ *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой схемой* S, *состоящей из этих элементов, что* $P(S) \leqslant 2\gamma^2 + 24\gamma^3 + 74\gamma^4$.

Поскольку согласно [2] ненадежности двойственных схем равны, теорема 1 справедлива в базисе $x \downarrow y$ при неисправностях типа 0 на входах элементов.

Пусть $g(\tilde{x})$ — произвольная булева функция ($\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Обозначим через $K(n)$ множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = x_i \downarrow g(\tilde{x})$ или $f(\tilde{x}) = \overline{x_i \downarrow g(\tilde{x})}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 2. *Пусть входы элементов* $x \downarrow y$ *подвержены неисправностям типа* 0 *с вероятностью* $\gamma \leqslant 1/70$, $f(\tilde{x})$ — *такая булева функция, что* $f \notin K(n)$, *и пусть* S — *любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию* f *с ненадежностью* $P(S) \leqslant 2\gamma^2 + 24\gamma^3 + 74\gamma^4$. *Тогда* $P(S) \geqslant (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4)$.

Доказательство. Пусть функция f и реализующая ее схема S удовлетворяют условиям теоремы. Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. В схеме S выделим элемент E_1, содержащий выход схемы S. Входы элемента E_1 не могут быть соединены с полюсами (это противоречит выбору функции f). Поэтому они соединены с выходами некоторых элементов E_2 и E_3. Если элементы E_2 и E_3 различны, то имеем схему S_1 (рис. 1). Если элементы E_2 и E_3 совпадают, то возможны два случая: входы элемента E_2 склеены (рис. 2) или входы элемента E_2 соединены с выходами различных элементов (но не с полюсами, это противоречит выбору функции f) (рис. 3).

Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S_1 (рис. 1) на единичных входных наборах задаются выражениями:

$p_{01} = 2\gamma(1-\gamma)^2 + \gamma^2(1-\gamma^2) = 2\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3 - \gamma^4$ на наборах (0101), (0110), (1001), (1010);

$p_{02} = \gamma^2(1-\gamma)^2 + (1-\gamma^2)\gamma(1-\gamma) + \gamma^3(1-\gamma^2) = \gamma - 2\gamma^3 + 2\gamma^4 - \gamma^5$ на наборах (1101), (1110), (1011), (0111);

$p_{03} = 2\gamma^2(1-\gamma^2)(1-\gamma) + \gamma^4(1-\gamma^2) = (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4)$ на наборе (1111).

Следовательно, $p^0 = \min\{p_{01}, p_{02}, p_{03}\} = (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4)$.

Так как выделенная подсхема состоит из трех функциональных элементов, а ненадежность каждого из них равна γ, то ненадежность подсхемы не превосходит $3\gamma < 1/2$, поскольку $\gamma \leqslant 1/70$. Поэтому применима лемма 3. Учитывая замечание 1, имеем

$$P(S) \geqslant (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4).$$

Схема S_2 (рис. 2) реализует тождественную функцию. Вероятности ошибок на ее выходе равны $p_1 = \gamma^2$, $p_0 = \gamma^2(1-\gamma^2)$. По лемме 2 имеем

$$\min\left\{\frac{\gamma^2}{2\gamma^2-\gamma^4}, \frac{\gamma^2-\gamma^4}{2\gamma^2-\gamma^4}\right\} \leqslant 2\gamma^2 + 24\gamma^3 + 74\gamma^4,$$

что неверно, так как при $\gamma \leqslant 1/70$

$$\min\left\{\frac{\gamma^2}{2\gamma^2-\gamma^4}, \frac{\gamma^2-\gamma^4}{2\gamma^2-\gamma^4}\right\} = \frac{\gamma^2-\gamma^4}{2\gamma^2-\gamma^4} = \frac{1-\gamma^2}{2-\gamma^2} > \frac{1-\gamma^2}{2} > 2\gamma^2 + 24\gamma^3 + 74\gamma^4.$$

Следовательно, схема S_2 не может быть подсхемой схемы S.

Прежде чем найти вероятности ошибок схемы S_3, рассмотрим схему S_4 (рис. 4). Вероятности ошибок на ее выходе равны $p_0 = r(1-\gamma^2)$ при таких входных наборах $\tilde{a}$, что $f(\tilde{a}) = 1$ (r — вероятность появления 1 на выходе схемы A), и $p_1 = \gamma^2 + t(1-\gamma^2)$ при таких входных наборах $\tilde{a}$, что $f(\tilde{a}) = 0$ (t — вероятность появления 0 на выходе схемы A).

Используя указанные выше вероятности для схемы S_1 (рис. 1), имеем

$$p_1 = \gamma^2 + t(1-\gamma^2) \geqslant \gamma^2 + (1-\gamma^2)^2(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4) \geqslant (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4).$$

Так как выделенная подсхема состоит из четырех функциональных элементов, а ненадежность каждого из них равна γ, то ненадежность подсхемы не превосходит $4\gamma < 1/2$, поскольку $\gamma \leqslant 1/70$. Поэтому применима лемма 3. Учитывая замечание 1, имеем

$$P(S) \geqslant (1-\gamma^2)(2\gamma^2 - 2\gamma^3 + \gamma^4).$$

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что при $\gamma \leqslant 1/70$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ ($f \notin K(n)$), является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Оценим сверху число функций в классе $K(n)$. Поскольку $x_i \downarrow g(\tilde{x}) = \bar{x}_i \& g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, имеем $|K(n)| \leqslant 2n2^{2^{n-1}}$. Число $|K(n)|$ мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n отношение $|K(n)|/2^{2^n}$ очень быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \downarrow y$ почти все булевы функции в базисе из этих элементов можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна $2\gamma^2$ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x|y\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $\{x|y\}$ почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна $2\gamma^2$ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

§ 2. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x\&y, \bar{x}\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x\&y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходах базисных элементов — приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

x	y	$x\&y$	p_0	p_1
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	$2\gamma - \gamma^2$	$(1-\gamma)^2$

Таблица 3

x	$\bar{x}$	p_0	p_1
0	1	0	1
1	0	$1-\gamma$	γ

В [3] доказана

Теорема 3. *При неисправностях типа* 0 *на входах элементов* $x\&y, \bar{x}$ *и при* $\gamma \leqslant 1/320$ *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой схемой* S, *состоящей из этих элементов, что* $P(S) \leqslant 2\gamma + 33\gamma^2$.

Докажем утверждение о нижней оценке ненадежности.

Теорема 4. *Пусть входы элементов $x\&y, \bar{x}$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma \leqslant 1/320$, f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию f с ненадежностью $P(S) \leqslant 2\gamma + 33\gamma^2$. Тогда $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, не равная константе, реализуется схемой S. Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. Выделим в S подсхему C, содержащую выход схемы S. Схема C состоит из одного функционального элемента, если выходной элемент является конъюнктором, и из двух функциональных элементов, если выходной элемент является инвертором.

Пусть схема C есть конъюнктор. Тогда (см. табл. 2) схема C является a-схемой. По лемме 1 получаем $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.

Пусть выходной элемент схемы S есть инвертор. Тогда для схемы C возможны два случая (рис. 5 и 6).

Схема S_5 (рис. 5) реализует тождественную функцию. Вероятности ошибок на ее выходе равны $p_1 = \gamma,\ p_0 = \gamma(1-\gamma)$. По лемме 2 имеем

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} \leqslant 2\gamma + 33\gamma^2,$$

что неверно, так как при $\gamma \leqslant 1/320$

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} = \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2} = \frac{1-\gamma}{2-\gamma} > \frac{1-\gamma}{2} > 2\gamma + 33\gamma^2.$$

Следовательно, схема S_5 не может быть подсхемой схемы S.

Схема S_6 (рис. 6) имеет вероятности ошибок $p_0 = 0$ на наборах (00), $(01), (10)$; $p_1 = \gamma + (2\gamma-\gamma)(1-\gamma) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$ на наборе (11). Следовательно, S_6 является a-схемой. По лемме 1 имеем

$$P(S) \geqslant \gamma + (2\gamma-\gamma)(1-\gamma) \geqslant 2\gamma - \gamma^2.$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x\&y$ и $\bar{x}$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами в базисе из этих элементов, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \vee y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \vee y$ и $\bar{x}$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

§ 3. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \not\to y, \bar{x}\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \not\to y, \bar{x}\}$ ($x \not\to y = x\&\bar{y}$) при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $\not\to$ — приведены в табл. 4, а для инвертора — в табл. 3.

Таблица 4

x	y	$x \not\to y$	p_0	p_1
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	1	γ	$1-\gamma$
1	1	0	$1-\gamma+\gamma^2$	$\gamma-\gamma^2$

В [3] доказана

Теорема 5. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \not\to y, \bar{x}$ и при $\gamma \leqslant 1/160$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant \gamma + 50\gamma^2 - 18\gamma^3$.*

Докажем утверждение о нижней оценке ненадежности.

Теорема 6. *Пусть входы элементов $x \not\to y, \bar{x}$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma < 1/2$, f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию f. Тогда $P(S) \geqslant \gamma$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, не равная константе, реализуется схемой S. Выделим в ней функциональный элемент, содержащий выход схемы S.

Если выделенный элемент — инвертор, то вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ таком, что $f(\tilde{a}) = 0$, равна

$$P_1 = (1-p)\gamma + p = \gamma + p(1-\gamma^2) \geqslant \gamma,$$

где p — вероятность появления значения 1 на входе инвертора. Следовательно, $P(S) \geqslant \gamma$.

Если выделенному элементу приписана функция $\not\to$, то вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ таком, что $f(\tilde{a}) = 1$, равна

$$P_0 = (1-p)\gamma + p(1-\gamma+\gamma^2) = \gamma + p(1-\gamma)^2 \geqslant \gamma,$$

где $1-p$ — вероятность появления набора (10) на входах выделенного элемента. Следовательно, $P(S) \geqslant \gamma$. Теорема 6 доказана.

Из теоремы 6 следует, что при $\gamma \leqslant 1/160$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 5 и реализующая произвольную булеву функцию, кроме, быть может, констант, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \not\to y$ и $\bar{x}$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами в этом базисе, ненадежность которых асимптотически равна γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \to y, \bar{x}\}$ $(x \to y = \bar{x} \vee y)$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \to y$ и $\bar{x}$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

§ 4. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \not\to y, x \to y\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \not\to y, x \to y\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x \to y$ — приведены в табл. 5, а для $\not\to$ — в табл. 4.

В [3] доказана

Теорема 7. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \not\to y$, $x \to y$ и при $\gamma \leqslant 1/320$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant \gamma + 180\gamma^2$.*

Докажем утверждение о нижней оценке ненадежности.

Таблица 5

x	y	$x \to y$	p_0	p_1
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	$1-\gamma$	γ
1	1	1	$\gamma-\gamma^2$	$1-\gamma+\gamma^2$

Теорема 8. *Пусть входы элементов $x \not\to y, x \to y$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma < 1/2$, f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию f. Тогда $P(S) \geqslant \gamma$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, не равная константе, реализуется схемой S. Выделим в S функциональный элемент, содержащий выход схемы.

Если выделенному элементу приписана функция $\not\to$, то утверждение теоремы верно (см. теорему 6).

Пусть выделенному элементу приписана функция $\to$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$ таком, что $f(\tilde{a}) = 0$, равна

$$P_1 = (1-p)\gamma + p(1-\gamma+\gamma^2) = \gamma + p(1-\gamma)^2 \geqslant \gamma,$$

где $1-p$ — вероятность появления набора (10) на входах выделенного элемента. Следовательно, $P(S) \geqslant \gamma$. Теорема 8 доказана.

Из теоремы 8 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 7 и реализующая произвольную булеву функцию, кроме, быть может, констант, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \not\to y$ и $x \to y$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами в этом базисе, ненадежность которых асимптотически равна γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \to y, x \not\to y\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \to y$ и $x \not\to y$ все булевы функции, исключая, быть может, константы, можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для всех функций, кроме, быть может, констант.

§ 5. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \to y, \bar{x}\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \to y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходах базисных элементов — приведены в табл. 5 и 3 соответственно.

В [3] доказана

Теорема 9. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \to y, \bar{x}$ и при $\gamma \leqslant 1/320$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$.*

Пусть $g(\tilde{x})$ — произвольная булева функция ($\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Обозначим через $D(n)$ множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \vee x_i$ или $f(\tilde{x}) = \overline{g(\tilde{x}) \vee x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 10. *Пусть входы элементов $x \to y, \bar{x}$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma \leqslant 1/320$, $f(\tilde{x})$ — такая булева функция, что $f \notin D(n)$, и S — любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию f с ненадежностью $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$. Тогда $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$ ($\gamma \leqslant 1/320$). Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\to$. Так как функция f отлична от константы, то входы элемента E_1 соединены с выходами разных подсхем. Поскольку $f \neq g(\tilde{x}) \vee x_i$, то второй вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого элемента E_2. Выход подсхемы, состоящей из элементов E_1 и E_2, независимо от того, какая функция приписана элементу E_2, является нулевым только на одном наборе. Этот набор есть (110) или (10), если элементу E_2 приписана функция $\to$ или инверсия соответственно. Вероятность ошибки p_1 на выходе рассматриваемой подсхемы при нулевом входном наборе равна

$$p_1 = (1 - \gamma)\gamma + \gamma(1 - \gamma + \gamma^2) = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3.$$

Так как ненадежность подсхемы не превосходит 1/2, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3 \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$.

2. Пусть элементу E_1 приписана инверсия.

Если вход элемента E_1 соединен с выходом другого инвертора E_2, то подсхема из этих элементов реализует тождественную функцию. Ее

вероятности ошибок указаны в теореме 4; там же доказано, что такая схема не является подсхемой схемы S.

Если вход элемента E_1 соединен с выходом элемента E_2, которому приписана функция $\to$, то, поскольку $f \neq \overline{g(\tilde{x}) \vee x_i}$, второй вход элемента E_2 соединен с выходом некоторого элемента E_3. Какая бы функция ни была приписана элементу E_3, подсхема, состоящая из элементов E_2 и E_3, имеет вероятность ошибки $p_1 = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$ на единственном нулевом входном наборе этой схемы. Тогда вероятность P_0 появления нуля на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2 и E_3, равна $P_0 = p_1(1-\gamma) = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.

Поскольку ненадежность подсхемы, состоящей из трех элементов, не превосходит $1/2$, по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$. Теорема 10 доказана.

Из теоремы 10 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 9 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ $(f \notin D(n))$, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Оценим сверху число функций в классе $D(n)$. Поскольку $g(\tilde{x}) \vee x_i = x_i \vee g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, имеем $|D(n)| = 2n2^{2^{n-1}}$. Число $|D(n)|$ мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n отношение $|D(n)|/2^{2^n}$ очень быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \to y$ и $\bar{x}$ почти все булевы функции можно реализовать схемами в этом базисе, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \not\to y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \not\to y$ и $\bar{x}$ почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

§ 6. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \to y, 0\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \to y, 0\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x \to y$ — приведены в табл. 5. Элемент, реализующий константу 0, работает абсолютно надежно.

В [2] доказана

Теорема 11. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \to y, 0$ и при $\gamma \leqslant 1/320$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$.*

Пусть $g(\tilde{x})$ — произвольная булева функция ($\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$). Обозначим через $A(n)$ множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \vee x_i$, или $f(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \vee \bar{x}_i$, или $f(\tilde{x}) = \overline{g(\tilde{x}) \vee x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 12. *Пусть входы элементов $x \to y, 0$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma \leqslant 1/320$, $f(\tilde{x})$ — такая булева функция, что $f \notin A(n)$, и S — любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию f с ненадежностью $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$. Тогда $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой равна $P(S) \leqslant 2\gamma + 142\gamma^2 - 15\gamma^3$ ($\gamma \leqslant 1/320$). Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

Элементу E_1 приписана функция $\to$, так как функция f отлична от константы 0, причем входы элемента E_1 соединены с выходами разных подсхем. Поскольку $f \neq g(\tilde{x}) \vee x_i$, второй вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого функционального элемента E_2. Если элементу E_2 приписана функция $\to$, то утверждение теоремы верно (см. теорему 10). Если элемент E_2 реализует константу 0, то подсхема, состоящая из элементов E_1 и E_2, реализует инверсию с вероятностями ошибок $p_0 = 0$ и $p_1 = \gamma$. Так как f отлична от константы и не представима в виде $f = g(\tilde{x}) \vee \bar{x}_i$, то первый вход элемента E_1 соединен с выходом элемента E_3, которому приписана функция $\to$.

Поскольку $f \neq \overline{g(\tilde{x}) \vee x_i}$, второй вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента E_4. Если E_4 реализует функцию $\to$, то вероятность ошибки p_1 подсхемы, состоящей из элементов E_3 и E_4, согласно теореме 10 равна $p_1 = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3$. Поскольку схема, состоящая из элементов E_1 и E_2, имеет тот же набор вероятностей ошибок, что и инвертор при неисправностях типа 0 на входе, то вероятность ошибки p_0 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, равна $p_0 = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$. Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $4\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$. Теорема 12 доказана.

Из теоремы 12 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 11 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ $(f \notin A(n))$, является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Число функций в классе $A(n)$ не превосходит $3n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n отношение $|A(n)|/2^{2^n}$ очень быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \to y$ и 0 почти все булевы функции можно реализовать схемами в этом базисе, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \not\to y, 1\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \not\to y$ и 1 почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

§ 7. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \not\to y, 1\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \not\to y, 1\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x \not\to y$ — приведены в табл. 4. Элемент, реализующий константу 1, работает абсолютно надежно.

В [3] доказана

Теорема 13. *При неисправностях типа* 0 *на входах элементов* $x \not\to y, 1$ *и при* $\gamma \leqslant 1/320$ *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой схемой* S, *состоящей из этих элементов, что* $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$.

Пусть $g(\tilde{x})$ — произвольная булева функция $(\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n))$. Обозначим через $KD(n)$ множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = x_i \& g(\tilde{x})$ или $f(\tilde{x}) = \bar{x}_i \vee g(\tilde{x})$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 14. *Пусть входы элементов* $x \not\to y, 1$ *подвержены неисправностям типа* 0 *с вероятностью* $\gamma \leqslant 1/320$, $f(\tilde{x})$ — *такая булева функция, что* $f \notin KD(n)$, *и* S — *любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию* f *с ненадежностью* $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$. *Тогда* $P(S) \geqslant 2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$.

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой равна $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$ ($\gamma \leqslant 1/320$). Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

Элементу E_1 приписана функция $\not\to$, так как функция f отлична от константы 1, причем входы элемента E_1 соединены с выходами разных подсхем. Поскольку $f \neq x_i \& g(\tilde{x})$, первый вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого функционального элемента E_2.

1. Если элементу E_2 приписана функция $\not\to$, то вероятность ошибки схемы, состоящей из элементов E_1 и E_2, на единственном единичном наборе (100) равна $p_0 = \gamma + (1-\gamma)\gamma = 2\gamma - \gamma^2$. Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $2\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.

2. Если элементу E_2 приписана функция 1, то схема, состоящая из элементов E_1 и E_2, реализует инверсию с вероятностями ошибок $p_0 = \gamma$, $p_1 = \gamma(1-\gamma)$. Так как $f \neq \bar{x}_i \vee g(\tilde{x})$, то второй вход элемента E_1 соединен не с полюсом, а с выходом некоторого элемента E_3. Если этому элементу приписана функция $\not\to$, то его первый вход не может быть соединен с полюсом ($f \neq \bar{x_i} \vee g(\tilde{x})$), следовательно, он соединен с выходом некоторого элемента E_4.

Если E_4 реализует функцию $\not\to$, то вероятность ошибки p_0 подсхемы, состоящей из элементов E_3 и E_4, такая же, как для схемы, состоящей из элементов E_1 и E_2, и равна $p_0 = 2\gamma - \gamma^2$. Вероятность ошибки P_1 схемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, равна $P_1 = (1-\gamma)^2(\gamma - \gamma^2) + (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma) = 3\gamma - 6\gamma^2 + 4\gamma^3 - \gamma^4 \geqslant 2\gamma - \gamma^2$. Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $4\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.

Если элементу E_4 приписана 1, то схема, состоящая из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, реализует тождественную функцию с вероятностями ошибок

$$P_1 = \gamma(1-\gamma) + (1-\gamma)^2\gamma = 2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3;$$
$$P_0 = \gamma(1-\gamma)(1-\gamma+\gamma^2) + (1-\gamma+\gamma^2)\gamma = 2\gamma - 3\gamma^2 + 3\gamma^3 - \gamma^4.$$

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $2\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$. Теорема 14 доказана.

Из теоремы 14 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 13 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ ($f \notin KD(n)$), является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Число функций в $KD(n)$ не превосходит $2n2^{2^{n-1}}$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n отношение $|KD(n)|/2^{2^n}$ очень быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \not\to y$ и 1 почти все булевы функции можно реализовать схемами в этом базисе, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \to y, 0\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \to y$ и 0 почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

§ 8. Неисправности типа 0 на входах элементов в базисе $\{x \sim y, x\&y, 0\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \sim y, x\&y, 0\}$ при неисправностях типа 0 на входах, когда вероятность неисправности каждого входа любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x\&y$ — приведены в табл. 2. Элемент, реализующий константу 0, работает абсолютно надежно. Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x \sim y$ — приведены в табл. 6.

Таблица 6

x	y	$x \sim y$	p_0	p_1
0	0	1	0	1
0	1	0	$1-\gamma$	γ
1	0	0	$1-\gamma$	γ
1	1	1	$2\gamma(1-\gamma)$	$1-2\gamma+2\gamma^2$

В [3] доказана

Теорема 15. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \sim y$, $x\&y, 0$ и при $\gamma \leqslant 1/320$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$.*

Прежде чем доказывать утверждение о нижней оценке ненадежности, докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть схема* S_7 (рис. 7) *реализует булеву функцию* f, $P(S_1)$ *и* $P(S_2)$ — *ненадежности схем* S_1 *и* S_2 *соответственно,* $p^1(S_i)$ — *наименьшая вероятность ошибки на таких входных наборах* a *схемы* S_i, *реализующей функцию* f_i, *что* $f_i(\tilde a) = 0$, *и* $p^0(S_i)$ — *наименьшая вероятность ошибки на таких входных наборах* a *схемы* S_i, *реализующей функцию* f_i, *что* $f_i(\tilde a) = 1$, $i = 1, 2$. *Тогда вероятности ошибок на выходе схемы* S_7 *удовлетворяют неравенствам*

$$P_0(S_7, \tilde a) \geqslant (1-\gamma)(p^1(S_1) + p^1(S_2) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)),$$

если набор $\tilde a$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde a) = 0$, $i = 1, 2$;

$$P_0(S_7, \tilde a) \geqslant (1-\gamma)(2\gamma + p^0(S_1)(1-\gamma) + p^0(S_2)(1-\gamma) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)),$$

если набор $\tilde a$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde a) = 1$, $i = 1, 2$;

$$P_1(S_7, \tilde a) \geqslant \gamma + p^1(S_1)(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) + p^0(S_2)(1-\gamma) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)^2,$$

если набор $\tilde a$ *такой, что* $f_1(\tilde a) = 0$ *и* $f_2(\tilde a) = 1$.

Доказательство. Пусть входной набор $\tilde a$ такой, что $f_1(\tilde a) = 0$ и $f_2(\tilde a) = 0$. Обозначим через $P_1(S_1, \tilde a)$ и $P_1(S_2, \tilde a)$ вероятности ошибок на выходах схем S_1 и S_2 соответственно. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S_7 равна

$$P_0(S_7, \tilde a) = (P_1(S_1, \tilde a)(1 - P_1(S_2, \tilde a)) + (1 - P_1(S_1, \tilde a))P_1(S_2, \tilde a))(1-\gamma)$$
$$+ P_1(S_1, \tilde a)P_1(S_2, \tilde a)2\gamma(1-\gamma) = (1-\gamma)(P_1(S_1, \tilde a) + P_1(S_2, \tilde a)$$
$$-2P_1(S_1, \tilde a)P_1(S_2, \tilde a)(1-\gamma)) \geqslant (1-\gamma)(p^1(S_1) + p^1(S_2) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)).$$

Пусть входной набор $\tilde a$ такой, что $f_1(\tilde a) = 1$ и $f_2(\tilde a) = 1$. Обозначим через $P_0(S_1, \tilde a)$ и $P_0(S_2, \tilde a)$ вероятности ошибок на выходах схем S_1 и S_2 соответственно. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S_7 равна

$$P_0(S_7, \tilde a) = (1 - P_0(S_1, \tilde a))(1 - P_0(S_2, \tilde a))2\gamma(1-\gamma) + (P_0(S_1, \tilde a)(1 - P_0(S_2, \tilde a))$$
$$+ (1 - P_0(S_1, \tilde a))P_0(S_2, \tilde a))(1-\gamma) = (1-\gamma)(2\gamma + P_0(S_1, \tilde a)(1-2\gamma)$$
$$+ P_0(S_2, \tilde a)(1-2\gamma) - 2(1-\gamma)P_0(S_1, \tilde a)P_0(S_2, \tilde a))$$
$$\geqslant (1-\gamma)(2\gamma + p^0(S_1)(1-\gamma) + p^0(S_2)(1-\gamma) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)).$$

Пусть входной набор $\tilde a$ такой, что $f_1(\tilde a) = 0$ и $f_2(\tilde a) = 1$. Обозначим через $P_1(S_1, \tilde a)$ и $P_0(S_2, \tilde a)$ вероятности ошибок на выходах схем S_1 и S_2 соответственно. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S_7 равна

$$P_1(S_7, \tilde a) = (1 - P_1(S_1, \tilde a))(1 - P_0(S_2, \tilde a))\gamma + P_1(S_1, \tilde a)(1 - P_0(S_2, \tilde a))$$
$$\times (1 - 2\gamma + 2\gamma^2) + (1 - P_1(S_1, \tilde a))P_0(S_2, \tilde a) + P_1(S_1, \tilde a)P_0(S_2, \tilde a)\gamma$$
$$= \gamma + P_1(S_1, \tilde a)(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) + P_0(S_2, \tilde a)(1-\gamma) - 2(1-\gamma)^2 P_1(S_1, \tilde a)P_0(S_2, \tilde a)$$
$$\geqslant \gamma + p^1(S_1)(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) + p^0(S_2)(1-\gamma) - 2P(S_1)P(S_2)(1-\gamma)^2.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть схема* S_8 (рис. 8) *реализует булеву функцию* f, $P_1(B,\tilde{a})$ — *вероятность ошибки схемы* B *на таких ее входных наборах* $\tilde{a}$, *что на выходе схемы* B *должен быть* 0, *и* $P_0(B,\tilde{a})$ — *вероятность ошибки схемы* B *на таких ее входных наборах* $\tilde{a}$, *что на выходе схемы* B *должна быть* 1. *Тогда вероятности ошибок на выходе схемы* S_8 *равны*

$$P_1(S_8,\tilde{a}) = \gamma + P_0(B,\tilde{a})(1-\gamma),$$

если $f(\tilde{a}) = 0$;

$$P_0(S_8,\tilde{a}) = P_1(B,\tilde{a})(1-\gamma),$$

если $f(\tilde{a}) = 1$.

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок. Действительно, пусть входной набор $\tilde{a}$ такой, что $f(\tilde{a}) = 0$. Тогда вероятность ошибки на выходе схемы S_8 равна

$$P_1(S_7,\tilde{a}) = (1 - P_0(B,\tilde{a}))\gamma + P_0(B,\tilde{a}) = \gamma + P_0(B,\tilde{a})(1-\gamma).$$

Аналогично проверяется второе утверждение леммы.

Пусть $g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ — произвольная булева функция, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим через $B(n)$ множество булевых функций вида $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_i \sim g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ и константы.

Теорема 16. *Пусть входы элементов* $x \sim y, x\&y, 0$ *подвержены неисправностям типа* 0 *с вероятностью* $\gamma \leqslant 1/320$, *а* $f(x_1,\ldots,x_n)$ — *такая булева функция, что* $f \notin B(n)$. *Пусть* S — *любая схема, состоящая из указанных элементов и реализующая функцию* f *с ненадежностью* $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$. *Тогда* $P(S) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$.

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой равна $P(S) \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2$ ($\gamma \leqslant 1/320$). Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S. Поскольку функция f отлична от константы, элементу E_1 не может быть приписана константа 0.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция &. Этот функциональный элемент является a-схемой (см. табл. 2). По лемме 1 имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

2. Пусть элементу E_1 приписана функция $\sim$. Входы элемента E_1 не могут быть соединены с полюсами (это противоречит выбору функции). Следовательно, они соединены с выходами других функциональных элементов E_2 и E_3, причем эти элементы различны, поскольку функция f отлична от константы 1. Рассмотрим всевозможные подсхемы из элементов E_1, E_2 и E_3, учитывая коммутативность функции $\sim$.

2.1. Если элементам E_2 и E_3 приписана константа 0, то на выходе схемы S реализуется константа 1, что противоречит выбору функции.

2.2. Если элементам E_2 и E_3 приписана функция &, то вероятность ошибки на выходе рассматриваемой подсхемы равна

$p_0 = 0$ на наборах (0000), (0001), (0010), (0100), (0101), (0110), (1000), (1001), (1010);

$p_0 = (1-2\gamma+\gamma^2)2\gamma(1-\gamma)+2(2\gamma-\gamma^2)(1-\gamma)^3 = 2\gamma(1-\gamma)^3(3\gamma-3\gamma^2+\gamma^3)$ на наборе (1111);

$p_1 = 2\gamma - \gamma^2 + (1-\gamma)^2\gamma = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$ на наборах (0011), (0111), (1011), (1100), (1101), (1110).

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $6\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant p_1 = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, такая схема не является подсхемой схемы S.

2.3. Если элементам E_2 и E_3 приписана функция $\sim$, то вероятность ошибки на выходе рассматриваемой подсхемы равна

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)$ на наборе (0000);

$p_0 = 2(1-2\gamma+2\gamma^2)(1-\gamma)(3\gamma-4\gamma^2+2\gamma^3)$ на наборе (1111);

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)(2-3\gamma+2\gamma^2)$ на наборах (0011), (1100);

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)(1-\gamma+\gamma^2)$ на наборах (0101), (1001), (0110), (1010);

$p_1 = 2\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3$ на наборах (0100), (1000), (0001), (0010);

$p_1 = 4\gamma - 11\gamma^2 + 16\gamma^3 - 12\gamma^4 + 4\gamma^5$ на наборах (0111), (1011), (1101), (1110).

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $6\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant p^1 = 2\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.4. Если элементам E_2 и E_3 приписаны функции & и 0, то вероятность ошибки на выходе рассматриваемой подсхемы равна

$p_0 = 0$ на наборах (00), (01), (10);

$p_1 = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$ на наборе (11).

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $3\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant p_1 = 3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, такая схема не является подсхемой схемы S.

2.5. Если элементам E_2 и E_3 приписаны функции & и $\sim$, то вероятность ошибки на выходе рассматриваемой подсхемы равна

$p_1 = \gamma$ на наборах (0000), (0100), (1000);

$p_0 = \gamma(1-\gamma)$ на наборах (0001), (0010), (0101), (0110), (1001), (1010);

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)^3$ на наборе (1100);

$p_0 = (1-\gamma)(6\gamma - 19\gamma^2 + 26\gamma^3 - 16\gamma^4 + 4\gamma^5)$ на наборе (1111);

$p_1 = 3\gamma - 4\gamma^2 + 2\gamma^3$ на наборах (0011), (0111), (1011);

$p_1 = \gamma + \gamma(1-3\gamma+2\gamma^2) + (2\gamma-\gamma^2)(1-\gamma) - 2\gamma(2\gamma-\gamma^2)(1-\gamma)^2 = 4\gamma - 10\gamma^2 + 13\gamma^3 - 8\gamma^4 + 2\gamma^5$ на наборах (1101), (1110).

2.5.1. Если входы элемента E_3, которому приписана $\sim$, склеены, то подсхема, состоящая из элементов E_1 и E_3, реализует тождественную функцию с вероятностями ошибок

$p_1 = \gamma$ на наборе (00);

$p_1 = 3\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3$ на наборе (01);

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)$ на наборе (10);

$p_0 = 2\gamma(1-\gamma)(2-3\gamma+2\gamma^2)$ на наборе (11).

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $4\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant p^0 = 2\gamma(1-\gamma)$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.5.2. Пусть входы E_3 соединены с выходами разных элементов E_4 и E_5 (они не могут быть соединены с полюсами в силу выбора функции f).

2.5.2.1. Если элементам E_4 и E_5 приписана константа 0, то схема, состоящая из элементов E_3, E_4 и E_5, реализует константу 1 абсолютно надежно, а схема, состоящая из элементов E_1, E_3, E_4 и E_5, реализует тождественную функцию с вероятностями ошибок $p_0 = 2\gamma(1-\gamma)$, $p_1 = \gamma$. По лемме 2 имеем

$$\min\left\{\frac{2\gamma(1-\gamma)}{3\gamma-2\gamma^2},\ \frac{\gamma}{3\gamma-2\gamma^2}\right\} \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2,$$

что неверно, так как при $\gamma \leqslant 1/320$

$$\min\left\{\frac{2\gamma(1-\gamma)}{3\gamma-2\gamma^2},\ \frac{\gamma}{3\gamma-2\gamma^2}\right\} = \frac{1}{3-2\gamma} > 1/3 > 2\gamma + 161\gamma^2.$$

Следовательно, рассматриваемая подсхема не является подсхемой схемы S.

2.5.2.2. Если элементам E_4 и E_5 приписаны функции & и 0, то вероятности ошибок на выходе схемы, состоящей из элементов E_3, E_4 и E_5, приведены в п 2.4. Вычислим вероятность ошибки P_0 на выходе схемы C, образованной элементами E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, при таких входных наборах, что на выходе схемы C должна появиться 1.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы E_1 поступают нули. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 = (1-\gamma)(3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3)$.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы E_1 поступают единицы. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 = (1-\gamma)(4\gamma - 5\gamma^2 + \gamma^3)$.

Учитывая замечание 1 к лемме 3, имеем $P(S) \geqslant (1-\gamma)(3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, такая схема не является подсхемой схемы S.

2.5.2.3. Если элементам E_4 и E_5 приписаны функции $\sim$ и 0, то вероятности ошибок на выходе схемы, состоящей из элементов E_3, E_4 и E_5, равны

$p_1 = \gamma$ на наборе (00);

$p_1 = 3\gamma - 4\gamma^2 + 2\gamma^3$ на наборе (11);

$p_0 = \gamma(1-\gamma)$ на наборах (01), (10).

Вычислим вероятность ошибки P_1 на выходе схемы C, образованной элементами E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, при таких входных наборах, что на выходе схемы C должен появиться 0. Возможны два случая.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступает набор (01). Тогда по лемме 4 имеем $P_1 \geqslant \gamma + \gamma(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) + (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma) - 2(2\gamma - \gamma^2)(3\gamma - 4\gamma^2 + 2\gamma^3) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступает набор (10). Тогда по лемме 4 имеем $P_1 \geqslant \gamma + \gamma(1-\gamma)(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) = 2\gamma - 4\gamma^2 + 5\gamma^3 - 2\gamma^4 \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$.

Учитывая замечание 1 к лемме 3, имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.5.2.4. Если элементам E_4 и E_5 приписана функция &, то вероятности ошибок на выходе схемы, состоящей из элементов E_3, E_4 и E_5, указаны в п. 2.2. Вычислим вероятность ошибки P_0 на выходе схемы C, образованной элементами E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, при таких входных наборах, что на выходе схемы C должна появиться 1.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступают нули. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 = (1-\gamma)(3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3) > 2\gamma + 161\gamma^2$.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступают единицы. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 = (1-\gamma)(6\gamma - 10\gamma^2 + 2\gamma^3 - 2(2\gamma - \gamma^2)^2(1-\gamma)) > 2\gamma + 161\gamma^2$. Следовательно, рассматриваемая подсхема не является подсхемой схемы S.

2.5.2.5. Если элементам E_4 и E_5 приписаны функции & и $\sim$, то вероятности ошибок на выходе схемы, состоящей из элементов E_3, E_4 и E_5, указаны в п. 2.5. Вычислим вероятность ошибки P_1 на выходе схемы C, образованной элементами E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, при таких входных наборах, что на выходе схемы C должен появиться 0. Возможны два случая.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступает набор (01). Тогда по лемме 4 имеем $P_1 \geqslant \gamma + \gamma(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) + (2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma) - 8\gamma(2\gamma - \gamma^2)(1-\gamma)^2 \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступает набор (10). Тогда по лемме 4 имеем $P_1 \geqslant \gamma + \gamma(1-\gamma)(1 - 3\gamma + 2\gamma^2) = 2\gamma - 4\gamma^2 + 5\gamma^3 - 2\gamma^4 \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$.

Учитывая замечание 1 к лемме 3, имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.5.2.6. Если элементам E_4 и E_5 приписаны функции $\sim$, то вероятности ошибок на выходе схемы, состоящей из элементов E_3, E_4 и E_5, указаны в п. 2.3. Вычислим вероятность ошибки P_0 на выходе схемы C, образованной элементами E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, при таких входных наборах, что на выходе схемы C должна появиться 1. Возможны два случая.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступают нули. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 = (1-\gamma)(2\gamma - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 2\gamma - 5\gamma^2 + 5\gamma^3 - 2\gamma^4$.

Пусть входной набор схемы C таков, что на входы элемента E_1 поступают единицы. Тогда по лемме 4 имеем $P_0 \geqslant 2\gamma(1-\gamma)$.

Учитывая замечание 1 к лемме 3, получаем $P(S) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.6. Если элементам E_2 и E_3 приписаны функции $\sim$ и 0 соответственно, то входы элемента E_2 не могут быть соединены с полюсами (это противоречит выбору функции), а также с выходом одного элемента (тогда $f \equiv 0$). Следовательно, входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_4 и E_5. Рассмотрим возможные случаи.

2.6.1. Если элементам E_4 и E_5 приписана константа 0, то на выходе схемы S реализуется константа 0, что противоречит выбору функции f.

2.6.2. Если элементу E_4 приписана константа 0, а элементу E_5 — либо $\sim$, либо &, то подсхема, состоящая из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, реализует тождественную функцию с вероятностями ошибок $p_1 = \gamma$ и $p_0 = \gamma(1-\gamma)$. По лемме 2 имеем

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} \leqslant 2\gamma + 161\gamma^2,$$

что неверно, так как при $\gamma \leqslant 1/320$

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} = \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2} = \frac{1-\gamma}{2-\gamma} > \frac{1-\gamma}{2} > 2\gamma + 161\gamma^2.$$

Следовательно, рассматриваемая схема не может быть подсхемой схемы S.

2.6.3. Пусть элементам E_4 и E_5 приписана &. Тогда согласно лемме 5 с учетом результатов п. 2.2 вероятность ошибки на выходе схемы C, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, когда на ее входы поступают такие наборы, что на выходе схемы C должна появиться 1, равна

$$P_0 = p_1(1-\gamma) = (3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma).$$

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $7\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant P_0 = (3\gamma - 3\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, такая схема не является подсхемой схемы S.

2.6.4. Пусть элементам E_4 и E_5 приписаны & и $\sim$ соответственно. Тогда согласно лемме 5 с учетом результатов п. 2.5 вероятность ошибки на выходе схемы C, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, когда на ее входы поступают такие наборы, что на выходе схемы C должен появиться 0, равна

$$P_1 = \gamma + p_0(1-\gamma) \geqslant \gamma + (1-\gamma)^2\gamma = 2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3 \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2.$$

Учитывая замечание 1 к лемме 3, имеем $P(S) \geqslant 2\gamma - 5\gamma^2$, т. е. утверждение теоремы верно.

2.6.5. Пусть элементам E_4 и E_5 приписана $\sim$. Тогда согласно лемме 5 с учетом результатов п. 2.3 вероятность ошибки на выходе схемы C, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3, E_4 и E_5, когда на ее входы поступают такие наборы, что на выходе схемы C должен появиться 0, равна

$$P_1 = \gamma + p_0(1-\gamma) \geqslant \gamma + 2\gamma(1-\gamma)^2(1-\gamma+\gamma^2) = 3\gamma - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 6\gamma^4 + 2\gamma^5.$$

Так как ненадежность рассматриваемой подсхемы не превосходит $7\gamma < 1/2$, то по замечанию 1 к лемме 3 имеем $P(S) \geqslant 3\gamma - 6\gamma^2 + 8\gamma^3 - 6\gamma^4 + 2\gamma^5$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, такая схема не является подсхемой схемы S. Теорема 16 доказана.

Из теоремы 16 следует, что при $\gamma \leqslant 1/320$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 15 и реализующая булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ ($f \notin B(n)$), является асимптотически наилучшей с точки зрения надежности.

Число функций в $B(n)$ не превосходит $n2^{2^{n-1}} + 2$, что мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n отношение $|B(n)|/2^{2^n}$ очень быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на входах элементов $x \sim y$, $x \& y$ и 0 показано, что в базисе из этих элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \oplus y, x \vee y, 1\}$ при неисправностях типа 1 на входах элементов. Следовательно, при неисправностях типа 1 на входах элементов $x \oplus y$, $x \vee y$ и 1 почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

В заключение автор благодарит Н. П. Редькина за внимание к работе.

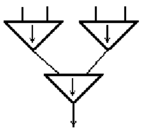

Рис. 1

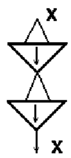

Рис. 2

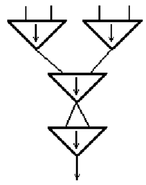

Рис. 3

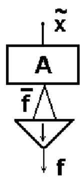

Рис. 4

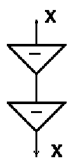

Рис. 5

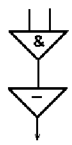

Рис. 6

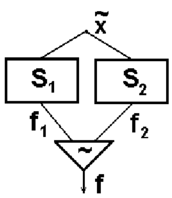

Рис. 7

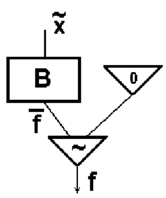

Рис. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 2. С. 59–74.

2. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгос. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 6–8.

3. **Алехина М. А.** Верхние оценки ненадежности схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Материалы VII Междунар. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 29 января — 2 февраля 2001 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 49–52.

4. **Алехина М. А.** О надежности схем в базисах $\{\not\to, \sim\}$, $\{\not\to, ^{-}\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Материалы XII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 15–21 октября 2001 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 9–13.
5. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.
7. **Ортюков С. И.** Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Проблемы передачи информации. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 84–97.
8. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский
государственный университет,
ул. Красная, 40,
440026 Пенза, Россия.
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
30 апреля 2002 г.