ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2002. Серия 1. Том 9, № 3, 29–39

УДК 519.172.2

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА О СТРОЕНИИ МЛАДШИХ ГРАНЕЙ В ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ*)

О. В. Бородин

Доказано, что каждый 3-многогранник содержит грань, в которой набор степеней вершин мажорируется одной из следующих последовательностей:

$$(3,6,\infty),(3,8,22),(3,9,15),(3,10,13),(3,11,12),$$
$$(4,4,\infty),(4,5,17),(4,6,11),(4,7,8),(5,5,8),(5,6,6),$$
$$(3,3,3,\infty),(3,3,4,11),(3,3,5,7),(3,4,4,5),(3,3,3,3,5).$$

Тем самым полученное в 1940 г. А. Лебегом описание строения младших граней 3-связных плоских графов улучшается по девяти параметрам без ухудшения остальных.

Введение

Степень $d(v)$ вершины v (*ранг* $r(f)$ грани f) в плоском графе M есть число инцидентных ей ребер. Под *k-вершиной* (*k-гранью*) понимается вершина (грань) степени (ранга) k. Будем говорить, что грань $f = v_1, \ldots, v_r$ (для краткости полагаем $r = r(f)$) имеет *тип* $R(f) = (d_1, \ldots, d_r)$, где $d_i \leqslant d_{i+1}$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, если i-я по величине степень вершины среди вершин, инцидентных грани f, не превосходит d_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. Как доказано Э. Штейницем [14], 3-связные плоские графы взаимно однозначно отвечают выпуклым 3-мерным многогранникам, называемым далее 3-многогранниками.

В 1940 г. А. Лебег [12] показал, что любой 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов:

$$(3,6,\infty),(3,7,41),(3,8,23),(3,9,17),(3,10,14),(3,11,13),$$
$$(4,4,\infty),(4,5,19),(4,6,11),(4,7,9),(5,5,9),(5,6,7),$$
$$(3,3,3,\infty),(3,3,4,11),(3,3,5,7),(3,4,4,5),(3,3,3,3,5).$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00916) и INTAS (грант 97–1001).

Некоторые параметры этого описания позднее были уточнены для отдельных классов 3-многогранников. Так, А. Коциг [9] доказал, что существует ребро ab с $d(a) + d(b) \leqslant 13$; эта оценка неулучшаема, тогда как результат из [12] влечет лишь неравенство $d(a) + d(b) \leqslant 14$.

Напомним, что *весом* грани в 3-многограннике P называется сумма степеней инцидентных ей вершин. Обозначим через w минимальный вес *младшей* грани в P, т. е. грани ранга не более 5.

Для 3-многогранников с минимальной степенью 5 А. Коциг [10] улучшил оценку Лебега $w \leqslant 19$ до $w \leqslant 18$, а в [2] получена точная оценка $w \leqslant 17$.

При наличии в 3-многограннике 4-вершин вес w может сколь угодно большим. Это следует из двойной n-пирамиды и подтверждает неизбежность члена $(4, 4, \infty)$ в теореме Лебега. Для триангулированных 3-многогранников без 4-вершин А. Коциг [11] доказал оценку $w \leqslant 39$, а автором данной статьи в [3] доказана подтверждающая гипотезу Коцига из [11] неулучшаемая оценка $w \leqslant 29$. В [6] было показано, что каждый триангулированный 3-многогранник без граней типа $(4, 4, \infty)$ имеет $w \leqslant 29$.

Для четыреангулированных 3-многогранников С. В. Августинович и О. В. Бородин [1] уточнили данное в теореме Лебега описание 4-граней следующим образом: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$.

В двойной N-пирамиде все грани имеют тип $(4, 4, N)$. Чтобы убедиться в необходимости члена $(3, 3, 3, \infty)$, из двойной $2N$-пирамиды удалим все четные верхние ребра и нечетные нижние: в полученном графе все грани имеют тип $(3, 3, 3, N)$.

Рассмотрим член $(3, 6, \infty)$ в теореме Лебега. Для триангулированных 3-многогранников без $(4, 4, \infty)$ он был уточнен в [6] до неулучшаемого $(3, 6, 20)$. Для произвольных 3-многогранников интерес к улучшению этого члена был отчасти вызван приложениями к задаче Пламмера и Тофта о цикловой раскраске [13]. В [4, 5] и [8] он был улучшен до $(3, 6, 23)$, а в [7] — до $(3, 6, 20)$, во всех случаях ценой запрещения большего числа типов 4- и 5-граней, чем в общей теореме Лебега.

Однако оказывается, что член $(3, 6, \infty)$ в теореме Лебега является неулучшаемым (а значит, должен присутствовать и в любых ее усилениях). Возьмем циклы $C_1 = v_1 \ldots v_{2N}$ и $C_2 = w_1 \ldots w_{2N}$ и отождествим вершины v_{2i} и w_{2i}, $1 \leqslant i \leqslant N$. Одну новую вершину соединим со всеми вершинами цикла C_1, а другую — со всеми вершинами из C_2. В полученном графе есть грани только типов $(3, 3, 6, 6)$ и $(3, 6, 2N)$.

Целью статьи является улучшение девяти параметров теоремы Лебега, достигаемое без ухудшения остальных ее параметров.

Теорема 1. *Каждый 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов*:

$$(3,6,\infty^*), (3,8^*,22), (3,9^*,15), (3,10^*,13), (3,11^*,12),$$
$$(4,4,\infty^*), (4,5^*,17), (4,6^*,11), (4,7^*,8), (5,5^*,8), (5,6,6^*),$$
$$(3,3,3,\infty^*), (3,3,4^*,11), (3,3,5^*,7), (3,4,4,5^*), (3,3,3,3,5^*).$$

Здесь вхождения, неулучшаемость которых уже доказана, помечены звездочкой. (Подразумевается, что в каждом типе граней компоненты, предшествующие помеченным, также неулучшаемы.)

Покажем, что 11 в $(3,11,12)$ не может быть усилено, а тем самым весь тип не может быть отброшен. (Это несколько контрастирует с теоремой Коцига $d(a)+d(b) \leqslant 13$ [9], а также с типом $(3,10,12)$, полученным в [7].) В каждую грань икосаэдра поместим по вершине, на каждое ребро поместим две вершины и соединим новые семь вершин в каждой грани так, чтобы получилась триангуляция только с 5- и 6-вершинами, причем минимальное расстояние между 5-вершинами равно 3. (Попутно мы обосновали знак * в $(5,6,6^*)$.) Затем каждую грань с помощью еще одной новой вершины разобьем на три 3-грани и удалим все ребра, соединяющие 10-вершины с 12-вершинами. В полученном графе нет граней типов, перечисленных в теореме Лебега, за исключением $(3,11,11)$-граней. (Мы не приводим известные ранее конструкции, подтверждающие неулучшаемость остальных *предпоследних* вхождений. Например, неулучшаемость 7 в члене $(3,7,23)$ следует из существования триангуляции с вершинами степени только 3 и 7, в которой 3-вершины попарно несмежны.)

Остается привести конструкции, подтверждающие неулучшаемость типов $(3,4,4,5)$ и $(3,3,3,3,5)$. Первая: каждую грань икосаэдра подразобьем на три 3-грани и удалим ребра, соединяющие между собой 10-вершины. В полученной четыреангуляции каждое ребро соединяет 3-вершину с 5-вершиной. Затем каждую грань с помощью новой вершины разобьем на четыре 3-грани и удалим все старые ребра. Вторая конструкция — хорошо известный полуправильный многогранник с гранями типа (3,3,3,3,5).

После получения данного усиления теоремы Лебега о строении младших граней в произвольных 3-многогранниках (до сих пор аналогичных результатов получено не было), представляется естественной следующая постановка.

Задача. Найти уточнение теоремы Лебега, не допускающее дальнейших усилений.

Априори не исключено, что таких неулучшаемых уточнений может оказаться несколько.

Доказательство основного результата

При доказательстве теоремы 1 мы будем часто писать (например) «ввиду $!(3,10,13)$», подразумевая «поскольку в рассматриваемом нами контрпримере нет граней типа $(3,10,13)$».

Пусть G' — контрпример к теореме 1, а G содержит наибольшее число ребер, соединяющих между собой вершины степени больше 11, среди всех контрпримеров с $|V(G')|$ вершинами.

Замечание 1. В G нет грани ранга не менее 4 с двумя несоседними вершинами степени не меньше 11.

Доказательство. Действительно, добавление ребра между такими двумя вершинами противоречило бы выбору G, поскольку ни один тип граней, приведенный в теореме 1, не содержит двух компонент не менее 12.

Каждому элементу $x \in V \cup F$ припишем заряд

$$M(x) = \begin{cases} d(x) - 6, & \text{если } x \in V, \\ 2r(x) - 6, & \text{если } x \in F. \end{cases}$$

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде $(2|E| - 6|V|) + (4|E| - 6|F|) = -12$. Отсюда следует, что

$$\sum_{x \in V \cup F} M(x) = \sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Мы хотим перераспределить заряды, не изменяя их суммы, таким образом, чтобы новый заряд каждой вершины и грани оказался положительным. Тогда очевидное противоречие $0 \leqslant -12$ завершит доказательство теоремы. Правила перераспределения таковы. (*Особой* называется 4-грань, инцидентная двум 3-вершинам и еще одной вершине степени 4 или 5.)

R1: Каждая грань f ранга не менее 4 отдает инцидентной вершине v степени не больше 5 заряд

(a) 1, если $d(v) = 3$;

(b) $\frac{1}{2}$, если $d(v) \in \{4, 5\}$, за следующими исключениями:

$\frac{1}{4}$ отдается 5-вершине, лежащей в особой грани типа $(3,3,5,N)$, обеим 5-вершинам в грани типа $(3,4,5,5)$, а также тем двум 5-вершинам в грани типа $(3,5,5,5)$, которые смежны с 3-вершиной, лежащей на границе этой грани.

R2: Вершина v степени $d \geqslant 12$ отдает

(a) заряд $\frac{1}{2}$ каждой инцидентной особой грани и 3-грани, инцидентной двум 5-вершинам;

(b) каждой инцидентной 3-грани, инцидентной вершине степени не более 5, но не двум 5-вершинам, заряд:

$\beta = \frac{d-6-1/2}{d-1}$, если при v существует грань ранга не менее 4, или 3-грань без вершин степени не больше 5, или 3-грань с двумя 5-вершинами;

$\alpha_d = \frac{d-6}{d}$, если каждая грань при v имеет ранг 3 и инцидентна вершине степени не более 5, но не двум 5-вершинам.

Замечание 4. По правилу R2b вершина v может отдавать заряд $\alpha_d < \beta_d$ лишь при четном d.

R3: Вершина v степени d, $8 \leqslant d \leqslant 11$, отдает каждой инцидентной 3-грани f, которая инцидентна вершине w степени не более 5, следующий заряд:

(a) α_d, если f смежна с двумя 3-гранями из окружения вершины v;

(b) $\gamma_d = \alpha_d + \frac{\alpha_d - 1/4}{2}$, если f из окружения вершины v смежна с особой гранью, но не смежна с неособой гранью ранга не менее 4;

(c) $\delta = \frac{3}{2}\alpha_d$, если f в окружении v граничит с неособой гранью ранга не менее 4.

R4: Вершина v степени $d = 7$ отдает каждой инцидентной 3-грани $f = uvw$ заряд:

(a) $\frac{1}{6}$, если f инцидентна 4- или 5-вершине, но не инцидентна вершине степени не менее 12;

(b) $\frac{1}{4}$, если $d(w) = 3$, а ребро vw инцидентно грани ранга не менее 4.

R5: Треугольная грань $f = uvw$ отдает инцидентной вершине v следующий заряд:

(a) $\frac{1}{6}$ при $d(v) = 5$, если либо $d(u) = 4$, либо $d(u) = 5$ и $d(w) \leqslant 17$, либо $d(u) = 6$ и $d(w) \leqslant 8$;

(b) $\frac{1}{3}$ при $d(v) = 5$ в остальных случаях;

(c) $\frac{1}{2}$, если $d(v) = 4$;

(d) весь заряд, полученный гранью f от вершин u, w степени не менее 7, если $d(v) = 3$.

Новый вклад элемента $x \in V \cup F$ обозначим через $M^*(x)$. Тогда $\sum\limits_{x \in V \cup F} M^*(x) = -12$ ввиду (1). Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что $M^*(x) \geqslant 0$ для любого $x \in V \cup F$, так как сумма новых зарядов вершин и граней равна -12. Эту проверку разбиваем на отдельные случаи.

Случай 1. f есть грань ранга $r \geqslant 4$.

Подслучай 1a: $r \geqslant 6$. Тогда $M^*(f) \geqslant 2r - 6 - 1 \times r = r - 6 \geqslant 0$, поскольку f отдает каждой инцидентной вершине не более 1 (см. правило R1).

Подслучай 1b: $r = 5$. Теперь $M(f) = 4$. Если f инцидентна не более чем трем вершинам степени 3, то $M^*(f) \geqslant 4 - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} \geqslant 0$, поскольку вершинам не менее 4 отдается заряд, не больший $\leqslant \frac{1}{2}$ (см. R1). Если f инцидентна четырем вершинам степени 3, то пятая вершина имеет степень не менее 6 по $!(3,3,3,3,5)$. Поэтому $M^*(f) \geqslant 4 - 4 \times 1 = 0$.

Подслучай 1c: $r = 4$. Теперь $M(f) = 2$. По предположению $!(3,3,3,\infty)$ грань f инцидентна не более чем двум 3-вершинам. Сначала предположим, что таких вершин ровно две. Если имеется также инцидентная вершина степени 4 или 5, то грань f — особая, а значит, получает от четвертой инцидентной вершины соответственно не менее $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ согласно R2 ввиду $!(3,3,4,11)$ или не менее $\alpha_8 = \frac{1}{4}$ согласно R2 ввиду $!(3,3,5,11)$, так что $M^*(f) = 0$ (см. R1). Если же третьей инцидентной вершины степени не более 5 у грани f нет, то $M^*(f) = 2 - 2 \times 1 = 0$.

Теперь предположим, что f инцидентна только одной 3-вершине. Если не более двух вершин, инцидентных грани f, имеют степень 4 или 5, то $M^*(f) \geqslant 2 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$. В противном случае, т. е. если f имеет тип $(3,4,5,5)$ или $(3,5,5,5)$ (ввиду $!(3,4,4,5)$), то две 5-вершины получают по $\frac{1}{4}$ согласно R1. Следовательно, откуда $M^*(f) \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Если же на грани f нет 3-вершин, то $M^*(f) \geqslant 2 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Подслучай 1d: $r = 3$. Пусть $f = uvw$, где $d(u) \leqslant d(v) \leqslant d(w)$. Если $d(u) \geqslant 6$, то $M^*(f) = M(f) = 0$.

Предположим, что $d(u) = 5$. Если $d(v) = 5$, то $d(w) \geqslant 9$ ввиду $!(5,5,8)$ и согласно правилам R2, R3 грань f при $d(w) \leqslant 17$ получает от w не менее $\alpha_9 = \frac{1}{3}$ и передает по правилу R5 не более $2 \times \frac{1}{6}$. Поэтому $M^*(f) \geqslant 0$. Если $d(w) \geqslant 18$, то f получает от w не менее $\alpha_{18} = \frac{2}{3}$ и передает по правилу R5 не более $2 \times \frac{1}{3}$. Аналогично при $d(v) = 6$ ввиду $!(5,6,6)$ по R2–R5 имеем $M^*(f) \geqslant \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$ при $7 \leqslant d(w) \leqslant 8$ и $M^*(f) \geqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ при $d(w) \geqslant 9$. Наконец, при $d(v) \geqslant 7$ и $d(w) \geqslant 7$ согласно R2–R5 получаем $M^*(f) \geqslant 2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0$.

Пусть теперь $d(u) = 4$. Если $d(v) = 5$, то $d(w) \geqslant 18$ ввиду $!(4,5,17)$, и согласно правилу R2 грань f получает от w не менее $\alpha_{18} = \frac{2}{3}$ и передает по правилу R5 не более $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Поэтому $M^*(f) \geqslant 0$. Далее, если $d(v) = 6$, то $d(w) \geqslant 12$ ввиду $!(4,6,11)$, и согласно правилу R2 грань f получает от w не менее $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ и передает по правилу R5 не более $\frac{1}{2}$. Аналогично если $d(v) = 7$, то $d(w) \geqslant 9$, откуда $M^*(f) \geqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = 0$, а если $d(v) \geqslant 8$, то $d(w) \geqslant 8$, откуда $M^*(f) \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$.

Наконец, при $d(u) = 3$ из R5 ввиду $!(3,5,\infty)$ сразу следует, что $M^*(f) = 0$.

Случай 2: v есть вершина степени d.

Подслучай 2a: $d \geqslant 12$.

Если вершина v инцидентна грани ранга не менее 4- или 3-грани, не инцидентной вершинам степени не более 5, или 3-грани с двумя инцидентными 5-вершинами, то отдает этой грани не более $\frac{1}{2}$ согласно R1, R2, а остальным $d-1$ граням — не более чем по $\beta_d = \frac{d-6-1/2}{d-1} \geqslant \alpha_d \geqslant \alpha_{12} = \frac{1}{2}$ согласно R2. Следовательно, $M^*(v) \geqslant d - 6 - \frac{1}{2} - (d-1) \times \beta_d = 0$.

Если же v инцидентна только 3-граням, инцидентным вершинам степени не более 5, но не инцидентна 3-грани с двумя инцидентными 5-вершинами, то ввиду $!(4,4,\infty)$ в окружении вершины v происходит чередование вершин степени не более 4 с вершинами степени не менее 5, степень d является четной и $M^*(v) \geqslant d - 6 - d \times \alpha_d = 0$.

Подслучай 2b: $8 \leqslant d(v) \leqslant 11$.

Для оценки суммарного расхода заряда вершиной v условно передадим каждой инцидентной ей грани заряд $\alpha_d = \frac{d-6}{d} \geqslant \frac{1}{4}$, в результате чего v остается с нулевым зарядом. Нетрудно видеть, что согласно R1, R3 никакая грань не получает от v более чем α_d, за исключением треугольника $f = uvw$, в котором $d(u) \leqslant 5$ и ребро vu инцидентно грани f' ранга не менее 4 (см. R3). Но такая грань f' в действительности получает от v не более $\frac{1}{4}$ (точнее, получает $\frac{1}{4}$ согласно R1 и ввиду $!(3,3,4,11)$, если f' — особая, и 0 — в противном случае), так что мы можем направить с f' на f дополнительный заряд $\frac{\alpha_d - 1/4}{2}$ или $\frac{1}{2}\alpha_d$ соответственно. В результате f получает от v заряд не менее $\gamma_d = \alpha_d + \frac{\alpha_d - 1/4}{2}$ или $\delta_d = \frac{3}{2}\alpha_d$ соответственно, как и предписывается правилом R3, а особая грань получает от v заряд $\frac{1}{4}$, полагающийся по правилу R1. Таким образом, $M^*(v) \geqslant 0$.

Подслучай 2c: $d(v) = 7$.

Напомним, что грань ранга не менее 4 получает от v нулевой заряд (ввиду $!(3,3,5,7)$, см. R1), а треугольник uvw с 4- или 5-вершиной u получает от v заряд $\frac{1}{6}$ согласно R4, если $d(w) \leqslant 11$. Покажем, что суммарная передача от v не превосходит 1.

Пусть каждая грань, получающая $\frac{1}{4}$ от v, т. е. треугольник uvw, в котором $d(u) = 3$ (и $d(w) \geqslant 23$ ввиду $!(3,7,22)$), а ребро uv инцидентно грани f ранга не менее 4, перебросит по $\frac{1}{12}$ на те соседние грани из окружения вершины v, в частности на f, которые до этой переброски получили от v нулевой заряд. (Другой гранью, получающей нулевой заряд, согласно R3 является 3-грань $u'vw$ при условии, что $d(u') \geqslant 4$.) Тогда каждая грань с очевидностью получает от v не более $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$. Поскольку $M(v) = 1$, остается показать, что найдется грань, получающая в итоге 0, либо найдутся две грани, получающие по $\frac{1}{12}$.

Сначала допустим, что ни одна грань не получала $\frac{1}{4}$. Тогда каждая нетреугольная грань в итоге получает 0, а если же все инцидентные грани являются треугольниками, то ввиду $!(5,5,7)$ при v имеется

3-грань, не инцидентная вершинам степени не более 5 и опять-таки получающая 0.

Теперь будем считать, что найдется грань f_4, получающая от v заряд $\frac{1}{4}$. Если f_4 смежна с гранями f_3 и f_5 из окружения вершины v, которые получают от v нулевой заряд, то такую тройку $f_1f_3f_4$ при v будем называть *контекстом* 0X0.

Если же, скажем, f_3 получает от v более 0, то она фактически является 3-гранью, инцидентной 3-вершине (так как будучи инцидентна 4- или 5-вершине, а также вершине степени не менее 23, грань f_3 получала бы 0 согласно R4a), и поэтому получает $\frac{1}{4}$ по R4b. Но тогда следующая грань f_2 из окружения v является нетреугольной и получает 0. Такую четверку граней в окружении вершины v назовем *контекстом* 0XX0.

Если при v имеется контекст 0X0, то его средняя грань после переброски уже остается с зарядом $\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$. Поэтому можно считать, что каждая «нулевая» грань при v должна получать по $\frac{1}{12}$ сразу от двух контекстов, но это с неизбежностью влечет еще один контекст 0X0, экономящий вторую $\frac{1}{12}$.

Остается допустить, что в окружении v нет контекста 0X0, но имеется контекст 0XX0 вида $f_2f_3f_4f_5$. Теперь ввиду сделанного выше замечания хотя бы одна из граней f_2 или f_5, скажем f_2, должна получать $\frac{1}{12}$ от другого контекста. Но если $f_6f_7f_1f_2$ является еще одним контекстом 0XX0, то и f_5 и f_6 получают в итоге от v заряд $\frac{1}{12}$. Таким образом, $M^*(v) \geqslant 0$.

Подслучай 2d: $d = 5$.

По R5 вершина v получает не менее $\frac{1}{6}$ от каждой 3-грани, а согласно R1 получает $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{2}$ от любой грани ранга не менее 4. Ясно, что если v инцидентна грани, дающей ей не менее $\frac{1}{3}$, либо двум граням, дающим по $\frac{1}{4}$, то уже имеем $M^*(v) = -1 + \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0$ или $M^*(v) = -1 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} = 0$.

Сначала предположим, что v не инцидентна особой грани. Ввиду сказанного можно считать, что v инцидентна четырем 3-граням vv_iv_{i+1}, где $1 \leqslant i \leqslant 4$. Если бы при v была грань $f = \ldots v_ivv_{i+1}$ (сложение по mod 5) с $d(v_i) \geqslant 9$ и $d(v_{i+1}) \geqslant 6$, то f давала бы вершине v заряд $\frac{1}{3}$ согласно R5, и мы имели бы $M^*(v) \geqslant -1 + \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0$.

Если бы среди вершин v_i нашлась вершина степени не более 5, то либо $d(v_{i+1}) \geqslant 9$, либо $d(v_{i-1}) \geqslant 9$ ввиду $!(5,5,8)$. Но каждая вершина, входящая в общий треугольник с v и вершиной степени не менее 9, должна иметь степень не более 5, так как иначе v получала бы от этого треугольника $\frac{1}{3}$, и мы уже имели бы $M^*(v) \geqslant 0$. Таким образом, если v смежна хотя бы с одной вершиной степени не более 5, то на упорядоченном множестве $\{v_1, \ldots, v_5\}$ происходит чередование степеней не более 5 и не менее 9.

При таком условии сначала допустим, что $d(v_1) \leqslant 5$ и $d(v_5) \leqslant 5$. Если $d(v_1) = d(v_5) = 4$ или $d(v_1) = d(v_5) = 5$, то v получает $\frac{1}{2}$ от грани $\dots v_1 v v_5 \dots$ ранга не менее 4 согласно R1. Если, скажем, $d(v_1) = 4$ и $d(v_5) = 5$, то ввиду чередования и условия $4 \leqslant d(v_3) \leqslant 5$ при v найдутся треугольники типов $(4, 5, N)$ и $(5, 5, N)$ с общей вершиной степени $N \geqslant 18$ ввиду $!(4, 5, 17)$. Но такой $(5, 5, N)$-треугольник дает v не меньше $\frac{1}{3}$, откуда снова имеем $M^*(v) \geqslant 0$.

Пусть теперь $d(v_1) \geqslant 9$ и $d(v_5) \geqslant 9$. Тогда грань $\dots v_1 v v_5 \dots$ дает вершине v заряд не менее $\frac{1}{3}$ согласно R1, R5.

Остается допустить, что v смежна с вершинами только степени более 5. Тогда ввиду $!(5, 6, 6)$ либо среди четырех треугольников при v найдется 3-грань, инцидентная двум вершинам степени не менее 7 и дающая вершине v заряд $\frac{1}{3}$, либо пятая грань, инцидентная вершине v, должна быть гранью ранга не менее 4, дающей вершине v заряд $\frac{1}{2}$. В этом случае $M^*(v) \geqslant -1 + \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0$.

Теперь предположим, что v инцидентна особой $(3, 3, 5, N)$-грани f, дающей вершине v заряд $\frac{1}{4}$ по правилу R1. Остается заметить, что грань f', смежная с f по ребру vw, где $d(w) = 3$, не является треугольной ввиду $!(3, 5, \infty)$, поэтому $M^*(v) \geqslant -1 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} = 0$.

Подслучай 2e: $d = 4$. $M^*(v) = -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$ ввиду R1 и R5: каждая инцидентная вершине v грань дает ей ровно $\frac{1}{2}$.

Подслучай 2f: $d = 3$.

Если v инцидентна трем граням ранга не менее 4, то $M^*(v) = -3 + 3 \times 1 = 0$ согласно R1.

Если v инцидентна только одному треугольнику $f = uvw$, где $7 \leqslant d(u) \leqslant d(w)$, то достаточно убедиться, что f передает вершине v не менее 1 по R2–R5. Если $d(u) \geqslant 12$ и $d(w) \geqslant 12$, то u и w передают вершине v через грань f не менее чем по $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$. Пусть $7 \leqslant d(u) \leqslant 11$, тогда $d(w) \geqslant 13$ ввиду $!(3, 11, 12)$, и f передает вершине v заряд $\gamma_{d(u)} + \beta_{d(w)}$ (если положить $\gamma_7 = \frac{1}{4}$) ввиду инцидентности u и w нетреугольным граням. Поскольку функции γ_d и β_d — растущие, остается лишь проверить граничные неравенства при $7 \leqslant d(u) \leqslant 11$. Имеем:

$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ при $7 \leqslant d(u) \leqslant 8$ ввиду $!(3, 8, 22)$;

$\frac{3}{8} + \frac{19}{30} > 1$ при $d(u) = 9$ ввиду $!(3, 9, 15)$;

$\frac{19}{40} + \frac{15}{26} > 1$ при $d(u) = 10$ ввиду $!(3, 10, 13)$;

$\frac{49}{88} + \frac{13}{24} > 1$ при $d(u) = 11$ ввиду $!(3, 11, 12)$.

Поскольку обе грани ранга не менее 4 передают вершине v по 1, то $M^*(v) = -3 + 3 \times 1 = 0$.

Если v инцидентна ровно двум треугольникам xyv и yzv, то покажем, что каждый из них, например xyv, передает вершине v не менее 1.

Отсюда получаем, что $M^*(v) \geqslant -3 + 3 \times 1 = 0$.

Во-первых, $d(y) \geqslant 12$, так как иначе $d(x) \geqslant 12$ и $d(z) \geqslant 12$ ввиду $!(3, 11, 11)$, что противоречит замечанию 1. Далее, $d(x) \geqslant 7$ и $d(z) \geqslant 7$ ввиду $!(3, 6, \infty)$, так что грань $\ldots zvx \ldots$ не является особой. Поэтому x передает вершине v не менее $\delta_{d(x)} = \frac{3}{2}\alpha_{d(x)} \geqslant \gamma_{d(x)}$ (мы доопределяем $\delta_7 = \frac{1}{4}$). Вершина y передает вершине v не менее $\alpha_{d(y)}$, а при нечетном d, ввиду замечания 2, даже не менее $\beta_{d(y)}$.

Поскольку функции δ_d, α_d и β_d возрастают, остается лишь проверить граничные неравенства при $d(x) \geqslant 7$. Имеем $\delta_7 + \beta_{23} = \delta_7 + \alpha_{24} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ при $7 \leqslant d(x) \leqslant 8$ ввиду $!(3, 8, 22)$; при $d(x) \geqslant 9$ достаточно заметить, что $\delta_{d(x)} \geqslant \frac{1}{2}$ (так как $\alpha_{d(y)} \geqslant \frac{1}{2}$).

Итак, ввиду симметрии вершина v получает заряд не менее 1 через каждую инцидентную ей грань.

Наконец, пусть v окружена тремя 3-гранями. Если v смежна с вершиной x степени $d(x) \leqslant 11$, то две другие смежные с ней вершины y, z имеют степени не менее 13. Поэтому согласно R2, R3 и R5 вершина v получает не менее $2\alpha_{d(x)} + 2\alpha_{d(y)} + 2\alpha_{d(z)} \geqslant 3$, а при нечетных $d(y)$ и $d(z)$ заряд вершин y, z, передаваемый вершине v, повышается даже до $2\beta_{d(y)}$, $2\beta_{d(z)}$.

Действительно:

$4 \times \beta_{23} = 4 \times \alpha_{24} = 3$ при $7 \leqslant d(u) \leqslant 8$ ввиду $!(3, 8, 22)$,

$2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \alpha_{16} > 3$ при $d(u) = 9$ ввиду $!(3, 9, 15)$,

$2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \alpha_{14} > 3$ при $d(u) = 10$ ввиду $!(3, 10, 13)$ и

$2 \times \frac{5}{11} + 4 \times \alpha_{13} > 3$ при $d(u) = 11$ ввиду $!(3, 11, 12)$.

Таким образом, во всех случаях $M^*(v) \geqslant 0$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Августинович С. В., Бородин О. В.** Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.

2. **Бородин О. В.** Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. Т. 46, вып. 5. С. 9–12.

3. **Бородин О. В.** Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, вып. 1. С. 16–19.

4. **Бородин О. В.** Строение и раскраска плоских графов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1994.

5. **Borodin O. V.** Cyclic degree and cyclic coloring of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 225–231.

6. **Borodin O. V.** Triangulated 3-polytopes without faces of low weight // Discrete Math. 1998. V. 186, N 1–3. P. 281–286.

7. **Borodin O. V., Woodall D. R.** Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs and Combinatorics. 1999. V. 15, N 3. P. 267–277.
8. **Horňák M., Jendrol' S.** Unavoidable sets of face types for planar maps // Discus. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.
9. **Kotzig A.** Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. 1955. V. 5. P. 101–103.
10. **Kotzig A.** From the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. 1963. V. 13. P. 20–34.
11. **Kotzig A.** Extremal polyhedral graphs // Proc. Second Intern. Conf. on Combin. Math. (New York, 1978). New York: New York Akad. of Sci., 1979. P. 569–570.
12. **Lebesgue H.** Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 9. P. 27-43.
13. **Plummer M. D., Toft B.** Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11, N 4. P. 507–515.
14. **Steinitz E.** Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. 1922. V. 3AB (Geometrie), N 12. P. 1–139.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru

Статья поступила
3 сентября 2001 г.