ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2002. Серия 1. Том 9, № 3, 48–74

УДК 519.714.23

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИАГНОСТИКА НЕИСПРАВНОСТЕЙ В СЕТЯХ АВТОМАТОВ*)

В. Н. Носков

Рассматривается представление конечного автомата схемой в базисе из сильно связных конечных автоматов. Ранее автором этой статьи был предложен метод преобразования любой части произвольной схемы в подсхему, для которой возможна диагностика с помощью условных тестов с хорошей локализацией возникающих неисправностей из широкого класса. В настоящей статье предлагается усовершенствование этого метода. При ограничении на базис, требующем, чтобы в графе переходов каждого автомата имелась петля, удается добиться, чтобы преобразованные схемы стали более удобными для диагностики, а тестовые процедуры для них — существенно более короткими. Приводится алгоритм получения тестов, даются оценки длин тестов и сложности преобразованных схем.

Введение

В работах [3] и [4] мы предложили новый метод синтеза схем, реализующих автоматные функции. Схемы строятся из базисных элементов, реализующих логические и автоматные функции. Достоинством предложенного метода является то, что он позволяет строить схемы, в которых с помощью тестовых процедур возможна детальная локализация неисправностей, т. е. достаточно точное определение мест в схеме, где имеются неисправные элементы.

Рассматриваемые схемы являются представлениями конечного автомата схемой S в базисе, состоящем из сильно связных автоматов и элементов, реализующих булевы функции. Входным алфавитом базисных автоматов служит множество r-разрядных булевых векторов. Входным алфавитом автомата, представленного схемой S, служит множество n-разрядных булевых векторов. Описаны преобразования произвольной схемы S в схему S'. При этих преобразованиях произвольная заданная часть B схемы S заменяется схемой C, а оставшаяся часть схемы

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00032) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО–110).

© 2002 Носков В. Н.

S не меняется. Схема S' имеет больше входов и выходов, чем схема S (см. рис. 1; здесь и ниже $\widetilde{x}_s = (x_1, \ldots, x_s)$). Если на дополнительные входы исправной схемы S' подаются нули, то на ее выходах $a_1, \ldots, a_q$ реализуются те же функции от значений, поступающих на основные входы, что и на выходах $a_1, \ldots, a_q$ схемы S. Выходы $b_1, \ldots, b_p$ схемы S' используются при тестировании схемы.

Обозначим через k минимальное число такое, что каждый автомат базиса имеет не более k состояний. В [3] найдено такое слово $\vec{V}$, что, подав его на входы схемы S' и получив выходное слово, можно указать небольшие области в C, в которых находятся неисправные элементы. Слово $\vec{V}$ определяется по структуре исправной схемы S и не зависит от имеющихся в контролируемой схеме неисправностей. Такого рода процедуры контроля называются *безусловными тестами.* Слово $\vec{V}$ имеет длину $\lceil 6 \cdot 4^{rk+1}k^2 \ln(2k)\rceil$.

В [4] схема S' строится по тем же правилам, что и в [3], но для контроля используется слово $\vec{W}$, состоящее из нескольких последовательных подслов. В процессе построения слова $\vec{W}$ каждое очередное подслово подбирается с использованием информации о реакции схемы S' на подслова, уже включенные в слово $\vec{W}$. Такие процедуры контроля называются *условными тестами.* Схема S' допускает диагностику с помощью условных тестов с хорошей локализацией неисправностей. Длина используемого слова $\vec{W}$ не превосходит $R_B 4^{r+1} k^4 \ln k$, где R_B — число автоматов в схеме B, каждый из которых имеет более одного внутреннего состояния. Из сравнения длин слов $\vec{V}$ и $\vec{W}$ видно, что условные тесты могут быть значительно более короткими, чем безусловные.

В настоящей статье описывается метод преобразования схем, который является более совершенным по отношению к методу, описанному в [3] и [4]. При дополнительном ограничении на базис, требующем, чтобы в графе переходов каждого автомата имелась петля, удается добиться, чтобы преобразованные схемы оказались более удобными для диагностики, а тестовые процедуры для них стали существенно более короткими. Предлагаемым методом можно получить схему S', для которой возможна диагностика неисправностей с помощью входного слова $\vec{T}$ длины $d(\Phi) \cdot 4^{r+1} k^4 \ln k + kR_B$, где $d(\Phi)$ — число нетривиальных автоматов в базисе Φ.

Формулировки основных утверждений настоящей статьи представлены в виде теоремы 1. Перейдем к точной постановке задачи.

Базис схем. Пусть $\Phi = \{\varphi^i\}_{i=1,\ldots,l}$ — семейство таких неинициальных приведенных сильно связных автоматов, что входным алфавитом автомата φ^i, $1 \leqslant i \leqslant l$, является множество r-разрядных булевых векторов, а выходным алфавитом — множество $\{0, 1\}$. (Автомат без эквивалентных состояний называется *приведенным.* Автомат называется *сильно связным*, если для любой упорядоченной пары (σ', σ'') его внутренних состояний существует входное слово, которое переводит автомат из состояния σ' в состояние σ''.) У каждого автомата φ из Φ найдется такое внутреннее состояние σ, что если φ находится в состоянии σ и на его вход поступает r-разрядный вектор, все компоненты которого равны 0, то φ остается в состоянии σ.

Для удобства изложения будем считать, что у каждого автомата из Φ именно состояние σ_1 является состоянием с этим свойством. Каждый автомат из Φ имеет не более k внутренних состояний. Множество автоматов из Φ с одним внутренним состоянием назовем *простой частью* базиса Φ. Будем полагать, что набор функций, реализуемых автоматами из простой части базиса Φ, образует полный базис в классе всех булевых функций. Автоматы с одним внутренним состоянием будем называть *тривиальными автоматами.* Остальные автоматы из Φ назовем *нетривиальными.*

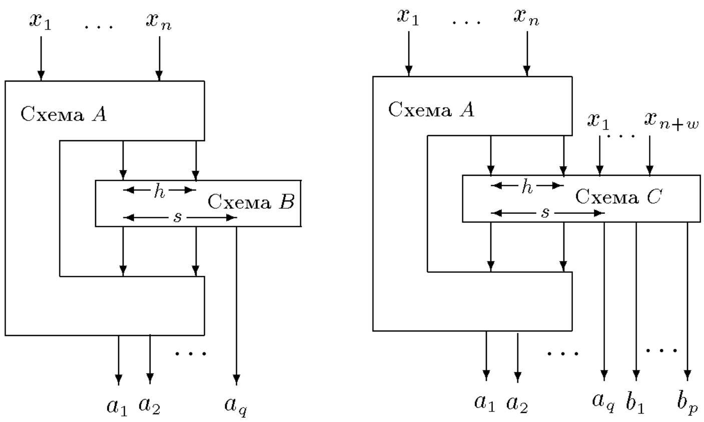


Схема $S = S(A, B, \tilde{x}_n)$ Схема $S' = S(A, C, \tilde{x}_{n+w})$

Рис. 1

Пусть изображенная на рис. 1 схема S есть схема в базисе Φ, а B — произвольно выделенная ее часть (подсхема). Оставшуюся часть схемы S обозначим через A. Полагаем, что если в схеме S имеется t базисных элементов, занумерованных числами $1, \ldots, t$, то в каждый момент времени ее внутреннее состояние можно задать t-разрядным вектором, i-й разряд которого есть внутреннее состояние i-го элемента схемы, $1 \leqslant i \leqslant t$. Таким образом, внутреннее состояние всей схемы S есть макросостояние, образованное внутренними состояниями ее базисных элементов. На рис. 1 справа изображена схема S', в которую преобразуется схема S после замены в ней подсхемы B на C. Схемы S и S' с выделенными в них частями A, B и C будем обозначать через $S(A,B,\widetilde{x}_n)$ и $S(A,C,\widetilde{x}_{n+4})$. (В настоящей работе преобразованная схема S' имеет 4 дополнительных входа $x_{n+1},\ldots,x_{n+4}$; аналогичная схема из [4] имеет 2 дополнительных входа.)

Допустимые неисправности. Обозначим через β произвольный элемент схемы $S(A,C,\widetilde{x}_{n+4})$ или схемы $S(A,B,\widetilde{x}_n)$.

a) Пусть β — тривиальный автомат с r входами, а $v_1,\ldots,v_r$ — его входные полюсы, на которые в схеме могут поступать 0 и 1. Полюсы $v_1,\ldots,v_r$ будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. На выходе элемента β реализуется булева функция $\beta(v_1,\ldots,v_r)$. При появлении неисправностей в схеме элемент β может превратиться в элемент β^*, реализующий произвольную булеву функцию от переменных $v_1,\ldots,v_r$.

b) Пусть β — нетривиальный автомат с r входами и числом внутренних состояний $k(\beta)$. Полагаем, что при появлении в схеме неисправностей автомат β может превратиться в произвольный автомат β^* с тем же входным алфавитом, что и у автомата β, и не более чем с $k(\beta)$ внутренними состояниями.

Условимся, что *число неисправных элементов в схеме C не превосходит произвольно заданного числа m.*

Введем обозначения:

- ◇ A^* и C^* — схемы, в которые преобразуются схемы A и C при появлении в них допустимых неисправностей; $S(A^*,C^*,\widetilde{x}_{n+4})$ — схема, в которую переходит схема $S(A,C,\widetilde{x}_{n+4})$, когда ее подсхемы A и C преобразуются в подсхемы A^* и C^*.
- ◇ $L(F)$ — сложность (т. е. число элементов) произвольной схемы F.
- ◇ R_B — число нетривиальных базисных автоматов, содержащихся в схеме B.
- ◇ $d(\Phi)$ — число нетривиальных автоматов, содержащихся в базисе Φ.
- ◇ Пусть $\vec{P}$ — последовательность n-разрядных булевых векторов. Обозначим через $\vec{P}_{(0000)}$ последовательность, полученную из $\vec{P}$ заменой каждого n-разрядного вектора на $(n+4)$-разрядный: значения первых n разрядов в каждом новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние четыре разряда равны 0.
- ◇ $S_a(A,B,\sigma(A),\sigma(B),\vec{P})$ — последовательность, реализуемая на выходах $a_1,\ldots,a_q$ схемы $S(A,B,\widetilde{x}_n)$, если на ее входы подается последовательность $\vec{P}$ и в начальный момент подсхемы A и B находились в состояниях $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$.

Аналогично определяются последовательности $S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(0000)})$, $S_b(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(0000)})$, $S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(0000)})$, $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(0000)})$. Здесь $S_b(\ldots)$ обозначает последовательность векторов, появляющихся в соответствующей схеме на выходах $b_1, \ldots, b_p$ (p — число дополнительных выходов в $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$).

Теорема 1. *Пусть $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ — схема в автоматном базисе Φ, входными наборами которой являются n-разрядные булевы векторы, и пусть $r + 1 + \lceil \log_2(R_B) \rceil < n$. Тогда найдется такая схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ над базисом Φ с выделенными в C частями $D_1, D_2, \ldots, D_l$, $l < L(C)$, что*

(a) *для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(0000)});$$

(b) $L(D_i) < c \log_2(R_B)$, $1 \leqslant i \leqslant t$; $L(C) < c(mL(B) + R_B \log_2(R_B))$, *где c — константа, зависящая от простой части базиса Φ;*

(c) *при любых $A^*, C^*, \sigma(A^*)$ и $\sigma(C^*)$ найдется такое слово $\vec{T}$, состоящее не более чем из $d(\Phi) \cdot 4^{r+1} k^4 \ln k + kR_B$ булевых $(n+4)$-разрядных векторов, что по последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{T})$ множество частей $\{D_i\}_{1 \leqslant i \leqslant l}$ в схеме C^* можно разбить на два таких класса $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$, что*

— *если множество $D(1, C^*)$ непусто, то любая часть D_i из $D(1, C^*)$ содержит неисправный элемент из C^*;*

— *если множество $D(1, C^*)$ пусто, то для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^*, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(0000)}).$$

Предложение (a) утверждает, что при $x_{n+1} = \ldots = x_{n+4} = 0$ схема C моделирует схему B, т. е. $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ превращается в схему, функционально эквивалентную схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$.

Неравенства из (b) ограничивают сложность схемы C и размеры частей D_i. Эти размеры характеризуют степень точности, с которой указываются места неисправных элементов в схеме.

Утверждение (c) дает представление о полноте диагностики: указываются места расположения неисправных элементов (с точностью до нескольких элементов, расположенных вместе с неисправным элементом в одной из частей D_i). Если во всех частях из $D(1, C^*)$ провести замену всех неисправных элементов на исправные, то схема C^* превратится в такую схему C^{**}, что класс $D(1, C^{**})$ окажется пустым. Согласно второму утверждению из (с) схема C^{**} может моделировать работу схемы B из $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$, если установить C^{**} в подходящее состояние.

Доказательство теоремы конструктивно:

— указана последовательность преобразований, которые позволяют превратить схему $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ в схему $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$, обладающую свойствами (a), (b) и (c) из утверждения теоремы;

— указан способ построения последовательности $\vec{T}$;

— приведен алгоритм, позволяющий с использованием лишь последовательности $S_b(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{T})$ разбить множество частей схемы C^* на классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$.

В основе преобразований схемы B в схему C лежит установка в B на линиях между внутренними полюсами специальных подсхем, которые играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. Переключение режимов работы коммутаторов осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на их входы. При работе в первом режиме коммутаторы передают без изменения сигналы от некоторых своих входов к выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$, когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передать значения с входных полюсов схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. Он позволяет добиться на выходах всех элементов схемы C слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме.

Основным отличием описываемых в настоящей статье преобразований от преобразований из [3] и [4] является то, что теперь в получаемых схемах удается легко устанавливать однотипные нетривиальные автоматы в одинаковые внутренние состояния. Это позволяет значительно сократить длины тестовых слов.

Целью оставшейся части статьи является доказательство теоремы 1.

§ 1. Схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$

1.1. **Q-преобразование.** Рассмотрим схему R, изображенную на рис. 2. Она содержит $2m+1$ подсхем Q и одну подсхему D. Опишем эти подсхемы.

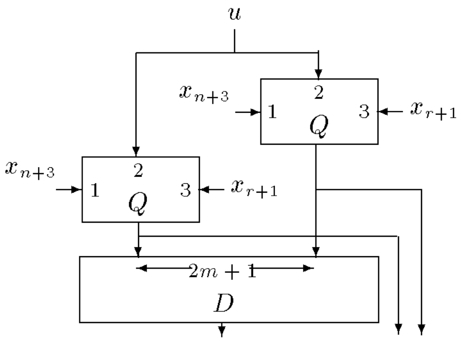


Рис. 2. Схема R

Схема Q. Если на первый, второй и третий входы схемы Q подаются значения переменных k, v и w, то на ее выходе реализуется функция $\overline{k}v \vee kw$.

Схема D. Эта схема осуществляет отображение

$$(a_1, \dots, a_{2m+1}) \to b(a_1, \dots, a_{2m+1}),$$

где

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что если схема D исправна, а в R содержится не более m неисправных схем Q, то R — самокорректирующаяся схема.

Функция $b(a_1, \dots, a_{2m+1})$ является симметрической булевой функцией от $2m+1$ переменных. Известно [5, с. 369], что такую функцию можно реализовать в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$ схемой, содержащей не более $c_1 m$ элементов, где c_1 — константа. В базисе Φ можно построить такую схему R, что

$$L(R) < c_2 m. \tag{1.1}$$

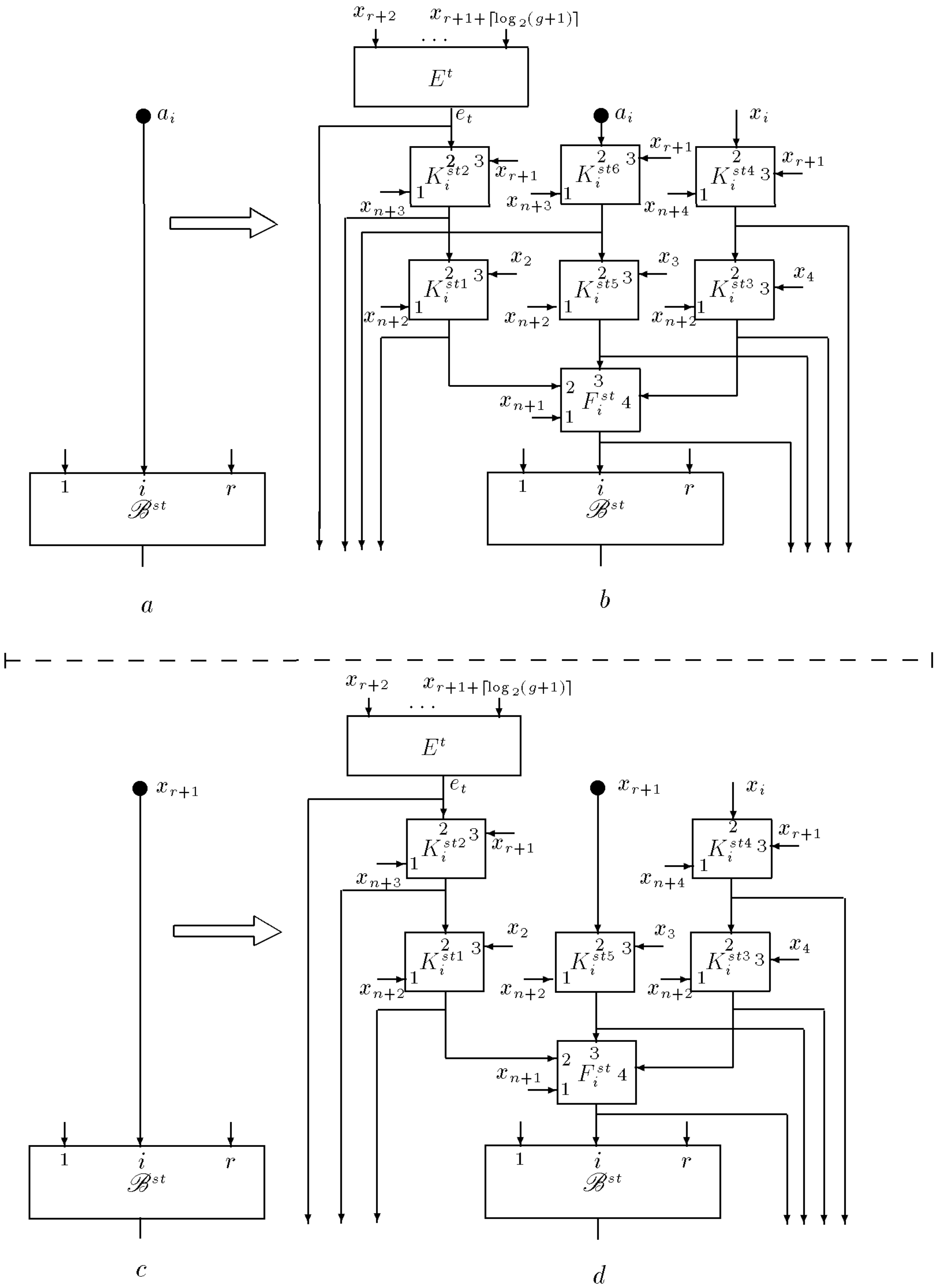
(Здесь и всюду ниже через $c_2, c_3, \dots$ обозначены константы, зависящие только от простой части базиса Φ.)

Пусть $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ — узлы схемы A, не являющиеся входными полюсами схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$, и пусть к узлам $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ подключены входные полюсы схемы B. Выполним следующие преобразования. Вход схемы B, подключенный к w_{i_1}, переключим на выход схемы R, а к w_{i_1} подключим вход схемы R. Аналогичные переключения выполним для w_{i_2}, ..., w_{i_s}, используя каждый раз новый экземпляр схемы R. В результате между узлами $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$ и входными полюсами схемы B появится s одинаковых схем R.

На этом Q-преобразование схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ заканчивается. Схему, в которую превратилась схема B после Q-преобразования, обозначим через B_1.

1.2. F-преобразование. При этом преобразовании к схеме B добавляется R_B схем E^t, $1 \leqslant t \leqslant R_B$. Кроме того, добавляется rR_B схем F и не более $6rR_B$ схем K. Опишем эти схемы.

Схема E^t. Эта схема имеет $w = \lceil \log_2(g+1) \rceil$ входов и 1 выход. Пусть $\mu(b_1, \dots, b_w) = \sum\limits_{i=1}^{w} b_i 2^{w-i}$. При любом t если на входы схемы E^t



x_{r+2}
$x_{r+1+\lceil\log_2(g+1)\rceil}$
E^t
e_t
a_i
x_i
K_i^{st2}
K_i^{st6}
K_i^{st4}
K_i^{st1}
K_i^{st5}
K_i^{st3}
F_i^{st}
x_{r+1}
x_{n+1}
x_{n+2}
x_{n+3}
x_{n+4}
x_2
x_3
x_4
$\mathscr{B}^{st}$
a
b
c
d

Рис. 3

подается вектор $(b_1, \dots, b_w)$, то на выходе схемы E^t появляется

$$e_t = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu(b_1, \dots, b_w) \geqslant t+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко показать, что схему E^t можно построить так, чтобы выполнялось неравенство

$$L(E^t) < c_3 \log_2 g. \tag{1.2}$$

Схема F. Эта схема имеет 4 входа и 1 выход (рис. 3). Функция, реализуемая схемой F, определяется так: если на i-й вход, $i = 1, \dots, 4$, схемы подается значение b_i, то на ее выходе реализуется функция

$$z(b_1, b_2, b_3, b_4) = \overline{b}_1 b_3 \vee b_1 \overline{b}_2 b_4.$$

Ясно, что схему F можно построить так, чтобы выполнялось неравенство

$$L(F) < c_4. \tag{1.3}$$

Схема K. Эта схема имеет 3 входа и 1 выход. Если на входы схемы K с номерами 1, 2, 3 подаются x, y, z, то на ее выходе реализуется функция $\overline{x}y \vee xz$.

Замечание. Схемы K и Q реализуют одно и то же отображение. Можно было бы обозначить их одним символом. Однако удобно использовать оба символа, так как это позволяет избежать пояснений, связанных с расположением элементов в схеме. В отличие от K один вход элемента Q обязательно подключен к выходу элемента схемы A.

Перейдем к описанию F-преобразования. Пусть $\mathscr{B}^{st}$ — автомат из B. Это элемент с номером t из s-й группы автоматов. Обозначим через a_i узел схемы B_1, к которому подключен i-й вход элемента $\mathscr{B}^{st}$. Отметим, что в схеме $S(A, B_1, \widetilde{x}_{n+1})$ вход автомата $\mathscr{B}^{st}$ не может подключаться к узлу схемы A или к выходу схемы Q. Поэтому a_i является либо выходом некоторого отличного от Q элемента из B_1, либо входным полюсом x_j, где $1 \leqslant j \leqslant n$. Присоединим к схеме B_1 схему E^t. Если a_i не является входным полюсом, то к схеме B_1 присоединим одну схему F, обозначив ее через F_i^{st}, и 6 схем K с индексами так, как изображено на рис. 3, *b*.

Если a_i является входным полюсом, то к B_1 присоединяем 1 схему F и 5 схем K с индексами так, как изображено на рис. 3, *d*.

Подобное преобразование выполним для каждого входа каждого автомата $\mathscr{B}^{st}$, $1 \leqslant t \leqslant g_s$, $1 \leqslant s \leqslant h$. На этом F-преобразование схемы B_1 заканчивается. В результате F-преобразования к схеме B_1 присоединяется R_B схем E^t и не более $6rgh$ схем K. Полученную в результате этого преобразования схему обозначим через B_2. Отсюда, а также из (1.1), (1.2) и (1.3) следует, что

$$L(B_2) < c_5(mL(B) + R_B \log_2 R_B). \tag{1.4}$$

1.3. K-преобразование. Это преобразование схемы $S(A, B_2)$ связано с размещением описанных выше схем K на линиях, соединяющих некоторые пары элементов в схеме B_2. Преобразования изображены на рис. 4.

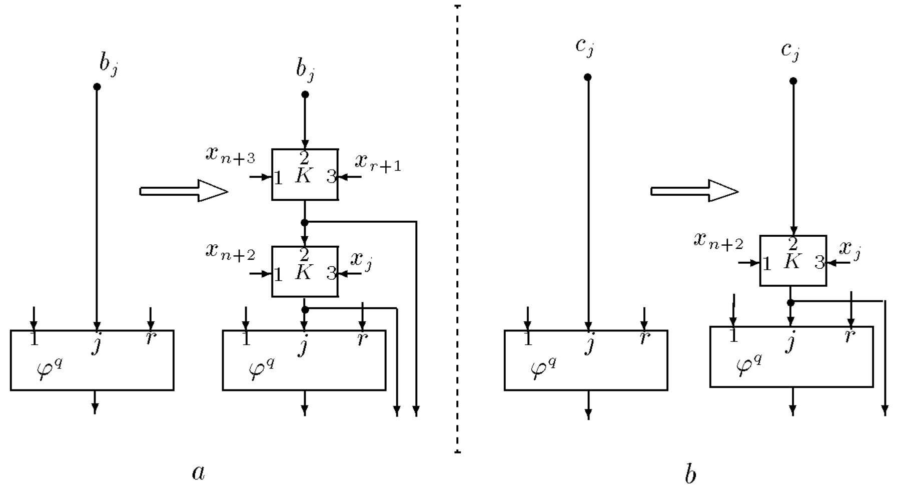


Рис. 4

Предполагается, что элемент φ^q, показанный слева в частях *a, b* рис. 4, является тривиальным автоматом и не находится внутри схемы K, Q или F. Элемент b_j есть либо отличный от x_{r+1} входной полюс из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, либо выход элемента, не находящегося внутри схем Q, K или F. Элемент c_j есть либо полюс x_{r+1}, либо выход блока Q. Преобразования ведутся до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, изображенные в левых частях рассматриваемых рисунков. Полученную в результате K-преобразования схему обозначим через C.

Схемы K, Q, F а также базисные элементы схемы C, находящиеся вне схем K, Q и F, назовем *блоками* схемы.

О сложности схемы C. При K-преобразовании к схеме B_2 присоединяется не более $2L(B_2)$ блоков K. Отсюда и из (1.4) следует, что

$$L(C) < c_6(mL(B) + R_B \log_2(R_B)). \tag{1.5}$$

Выходы схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$. Будем считать, что выход каждого блока в C является выходом схемы $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$. Таким образом, схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ имеет выходы, которых нет в $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ (на рис. 1 они обозначены через $b_1, \ldots, b_p$).

1.4. Функции, реализуемые схемой $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$. При построении схемы C все добавляемые к B элементы являются тривиальными автоматами. Если на входы x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3} и x_{n+4} подаются нулевые значения, то все элементы K и Q функционально эквивалентны проводникам, соединяющим их вторые входы с выходами этих элементов. При тех же условиях схемы F функционально эквивалентны проводникам, соединяющим их третьи входы с выходами этих элементов, а все схемы R, добавленные при первом преобразовании, тоже эквивалентны проводникам, соединяющим их входы u с их же выходами (см. рис. 2). Если в схеме $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ не использовать дополнительные выходы, то при $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4} = 0$ схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ будет эквивалентна схеме $S(A, B, \widetilde{x}_n)$. Точнее, справедлива

Теорема 2. *Для любых состояний $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ подсхем A и B схемы $S(A, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C)$ схемы C, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A, B, \sigma(A), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A, C, \sigma(A), \sigma(C), \vec{P}_{(0000)}).$$

§ 2. Диагностика неисправностей в $S^* = S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+4})$

2.1. Вспомогательные результаты. Пусть $\mathscr{B}$ — конечный автомат и $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$ — множество его внутренних состояний. Через $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ будем обозначать автомат $\mathscr{B}$ с начальным состоянием λ_i. Через $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ будем обозначать любой инициальный автомат из множества $\{\mathscr{B}_{[\lambda_1]}, \ldots, \mathscr{B}_{[\lambda_t]}\}$ в случае, когда состояние автомата $\mathscr{B}$ неизвестно. Запись $\mathscr{B}_{[\lambda_i \vec{a}]}$ обозначает автомат $\mathscr{B}$ в том состоянии, в котором окажется автомат $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ после подачи на его вход слова $\vec{a}$. Если $\vec{u}$ и $\vec{w}$ — входные слова для автомата $\mathscr{B}$, то запись $\vec{u} * \vec{w}$ обозначает конкатенацию слов, т. е. слово, в котором $\vec{w}$ следует за $\vec{u}$. Выражение $\prod\limits_{j=1}^{d} \vec{u}_j$ означает конкатенацию $\vec{u}_1 * \vec{u}_2 * \ldots * \vec{u}_d$.

Инициальные автоматы $\mathscr{B}_{[\lambda_i]}$ и $\mathscr{B}_{[\lambda_j]}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $\mathscr{B}_{[\lambda_i]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda_j]}$), если они реализуют одно и то же отображение. В этом случае состояния λ_i и λ_j называются эквивалентными в $\mathscr{B}$. Говорят, что автоматы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ эквивалентны (обозначение: $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$), если для каждого состояния автомата $\mathscr{A}$ найдется эквивалентное состояние в автомате $\mathscr{B}$ и для каждого состояния автомата $\mathscr{B}$ найдется эквивалентное состояние в автомате $\mathscr{A}$. Автомат называется *t-автоматом*, если число его состояний не превосходит t.

Обозначим через $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$ слово, которое появляется на выходе автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ при подаче на его вход слова $\vec{a}$. Если на вход автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ подано слово $\vec{a}$ и на его выходе получено слово $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$, то будем говорить, что автомат $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ *испытан словом* $\vec{a}$. Ниже всюду выходные слова автоматов будут обозначаться греческой буквой ξ со стрелкой, а входные — латинскими буквами со стрелкой.

Соглашение о входном алфавите. Условимся, что у всех рассматриваемых ниже автоматов входной и выходной алфавиты те же, что и соответствующие алфавиты у автоматов из базиса Φ.

Лемма 1 [2, с. 169]. *Пусть $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ — приведенный автомат с t состояниями и с неизвестным начальным состоянием. Тогда можно указать слово $\vec{x}(\mathscr{A})$ длины не более $(t-1)^2$, испытав которым автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$, можно установить, в каком состоянии он оказался.*

Удобно пользоваться другой формой утверждения леммы 1, назвав ее следствием леммы 1.

Следствие 1. *Множество $\bigcup\limits_{j=1}^{t} \vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ можно разбить на такие классы $\Delta_1(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A})), \ldots, \Delta_t(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, что если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{x}(\mathscr{A})) \in \Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$, то $\mathscr{A}_{[\sigma \vec{x}(\mathscr{A})]} \sim \mathscr{A}_{[\sigma_i]}$.*

Отметим, что при некоторых значениях i множество $\Delta_i(\mathscr{A}, \vec{x}(\mathscr{A}))$ может быть пустым.

Лемма 2 [2, с. 46]. *Пусть σ_i и σ_j — произвольные состояния сильно связного t-автомата $\mathscr{A}$. Тогда найдется входное слово $\vec{y}(\mathscr{A}, \sigma_i, \sigma_j)$ длины не более $t-1$, которое переводит $\mathscr{A}$ из состояния σ_j в состояние σ_i.*

Лемма 3 [4, с. 52]. *Пусть $\mathscr{A}$ — приведенный сильно связный автомат с t состояниями, а $\mathscr{B}$ — произвольный t-автомат. Если $\mathscr{A}_{[\sigma]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda]}$ при некоторых σ и λ, то $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$.*

Остаточная отличимость. Будем говорить, что слово $\vec{a}$ *остаточно отличает* автомат $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ от автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$, если выполняется одно из условий:

(i) $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{a}) \neq \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$;

(ii) если $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma]}, \vec{a}) = \vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, \vec{a})$, то $\mathscr{A}_{[\sigma, \vec{a}]} \sim \mathscr{B}_{[\lambda, \vec{a}]}$.

Если для автоматов $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ и $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ выполняется условие (ii), то будем говорить, что эти автоматы *$\vec{a}$-эквивалентны.*

Лемма 4 [1]. *Пусть $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ — произвольный приведенный сильно связный автомат с t состояниями. Тогда существует входное слово длины не более $2 \cdot 4^r t^4 \ln(2t)$, остаточно отличающее $\mathscr{A}_{[\sigma]}$ от любого инициального t-автомата.*

2.2. Контроль работы нетривиального блока $\mathscr{B}^{st}$. Множество нетривиальных автоматов из C разобьем на классы эквивалентности $\mathscr{K}_s$, $1 \leqslant s \leqslant d(\Phi)$, рассматривая автоматы как неинициальные. Если

$\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}''$, то такие автоматы из C зачисляем в один класс. Если $\mathscr{B}' \not\sim \mathscr{B}''$, то $\mathscr{B}'$ и $\mathscr{B}''$ должны быть зачислены в разные классы. Автоматы, попавшие в класс $\mathscr{K}_s$, будем называть блоками s-го типа. Пусть в C имеется g_s нетривиальных блоков s-го типа. Занумеруем их числами $1, 2, \ldots, g_s$ произвольно, но так, чтобы любые 2 блока имели разные номера. Обозначим через $\mathscr{B}^{st}$ блок s-го типа с номером t. Совокупность блоков $\mathscr{B}^{st}$, $1 \leqslant t \leqslant g_s$, будем называть *$s$-группой блоков.*

Примем следующие обозначения.

$\diamond$ Базисный автомат, копиями которого в исправной схеме являются блоки $\mathscr{B}^{st}$, $1 \leqslant t \leqslant g_s$, будем обозначать через $\mathscr{A}^s$. Через $\sigma_1^s, \sigma_2^s, \ldots, \sigma_k^s$ будем обозначать состояния автомата $\mathscr{A}^s$.

$\diamond$ Обозначим через $\vec{y}(\mathscr{B}, \sigma_1, \sigma_j)$ последовательность r-разрядных булевых векторов, переводящую автомат $\mathscr{B}$ из состояния σ_j в состояние σ_1.

$\diamond$ Обозначим через $\vec{\xi}(\mathscr{B}_{[\lambda]}, S^*, \vec{u})$ слово, появляющееся на выходе автомата $\mathscr{B}_{[\lambda]}$ из схемы S^* при поступлении на входы этой схемы слова $\vec{u}$.

$\diamond$ Пусть $\vec{R}$ есть последовательность h-разрядных векторов, а $\widetilde{w} = (w_1 \ldots, w_p)$ является p-разрядным вектором (h и p — произвольные натуральные числа). Обозначим через $\vec{R} \otimes \widetilde{w}$ последовательность, полученную из $\vec{R}$ следующей заменой каждого h-разрядного вектора на $(h+p)$-разрядный: значения первых h разрядов в новом векторе те же, что и в заменяемом, а последние p разрядов равны $w_1, \ldots, w_p$.

$\diamond$ Пусть $g = \max\{g_1, \ldots, g_{d(\Phi)}\}$. При любом i, $1 \leqslant i \leqslant g$, положим

$$\widetilde{b}(i) = (\underbrace{0, b_{r+2}, \ldots, b_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil}, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0}_{n+4-r \text{ разрядов}}),$$

где булевы константы $b_{r+2}, \ldots, b_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil}$ выбраны так, что $\sum\limits_{j=r+2}^{v} b_j 2^{v-j} = i$, $v = r + 1 + \lceil \log_2(g+1) \rceil$.

Слова $\vec{U}(S^*, s)$ и $\vec{M}(S^*, s)$. Слово $\vec{U}(S^*, s)$ состоит из r-разрядных векторов и определяется рекуррентно. Пусть s-я группа блоков в C состоит из блоков $\mathscr{B}^{s1}, \ldots, \mathscr{B}^{sg_s}$. Полагаем

$$\vec{U}(S^*, s, j) = \begin{cases} \vec{y}\Big(\mathscr{A}^s,\ \sigma_1^s,\ \Big[\sigma_i^s \prod\limits_{l=1}^{j-1} \vec{U}(S^*, s, l)\Big]\Big), \text{ если найдется } i \text{ такое,} \\ \quad \text{что } \vec{\xi}(\mathscr{B}^{sj}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) \in \Delta_i(\mathscr{A}^s, \vec{x}(\mathscr{A}^s)); \\ \varnothing, \text{ если } \vec{\xi}(\mathscr{B}^{sj}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i(\mathscr{A}^s, \vec{x}(\mathscr{A}^s)). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\left[\sigma_i^s \prod_{l=1}^{j-1} \vec{U}(S^*, s, l)\right]$ — состояние, в которое переходит автомат $\mathscr{A}^s_{[\sigma_i^s]}$ при поступлении на его входы слова $\prod_{l=1}^{j-1} \vec{U}(S^*, s, l)$.

Используя слова $\vec{U}(S^*, s, j)$, образуем слово

$$\vec{M}(S^*, s) = (\vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) * \prod_{j=1}^{g_s} (\vec{U}(S^*, s, j) \otimes \widetilde{b}(j)) * (\vec{q}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)). \quad (2.2)$$

Оценим длину слова $\vec{M}(S^*, s)$, которую будем обозначать через $|\vec{M}(S^*, s)|$. Слово $\vec{M}(S^*, s)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\vec{M}(S^*, s)| < k^2 + kg_s + 2 \cdot 4^r k^4 \ln(2k), \quad (2.3)$$

ибо по леммам 1, 2 и 4 слова $\vec{x}(\mathscr{A}^s)$, $\vec{U}(S^*, s, j)$ и $\vec{q}(\mathscr{A}^s)$ можно выбрать такими, чтобы выполнялись неравенства $|\vec{x}(\mathscr{A}^s)| < k^2$, $|\prod_{j=1}^{g_s} (\vec{U}(S^*, s, j) \otimes \widetilde{b}(j))| < kg_s$ и $|\vec{q}(\mathscr{A}^s)| < 2 \cdot 4^r k^4 \ln(2k)$.

Слово $\vec{C}(S^*, s, t)$. Положим $w = \sum_{j=t+1}^{g_s} |\vec{U}(S^*, s, j)|$ и $\widetilde{0}_r = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r})$.

Слово $\vec{C}(S^*, s, t)$ определим так:

$$\vec{C}(S^*, s, t) = \begin{cases} \vec{x}(\mathscr{A}^s) * \prod_{j=1}^{t} \vec{U}(S^*, s, j) * \underbrace{\widetilde{0}_r * \widetilde{0}_r * \ldots * \widetilde{0}_r}_{w} * \vec{q}(\mathscr{A}^s) \\ \text{при } 1 \leqslant t < g_s; \\ \vec{x}(\mathscr{A}^s) * \prod_{j=1}^{t} \vec{U}(S^*, s, j) * \vec{q}(\mathscr{A}^s) \text{ при } t = g_s. \end{cases} \quad (2.4)$$

Лемма 5. *Если существует i такое, что $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) \in \Delta_i(\mathscr{A}^s, \vec{x}(\mathscr{A}^s))$, то $\vec{C}(S^*, s, t)$ можно представить в виде*

$$\vec{C}(S^*, s, t) = \vec{x}(\mathscr{A}^s) * \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma_1^s, \sigma_i^s) * q(\mathscr{A}^s). \quad (2.5)$$

Доказательство. Пусть существует i такое, что $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) \in \Delta_i(\mathscr{A}^s, \vec{x}(\mathscr{A}^s))$. Тогда из (2.1) следует, что для автомата $\mathscr{A}^s$ справедливо равенство $\left[\sigma_i^s \prod_{l=1}^{t} \vec{U}(S^*, s, l)\right] = \sigma_1^s$. Это означает, что $\prod_{l=1}^{t} \vec{U}(S^*, s, l)$ является словом, переводящим $\mathscr{A}^s$ из состояния σ_i^s в состояние σ_1^s. С другой стороны, $\mathscr{A}^s$ как базисный автомат должен удовлетворять условию $\mathscr{A}^s_{[\sigma_1^s \tilde{0}_r]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma_1^s]}$, из которого следует $\mathscr{A}^s_{[\sigma_1^s(\tilde{0}_r * \tilde{0}_r * \ldots * \tilde{0}_r)]} \sim$

$\mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}$. Поэтому слово

$$\vec{u} = \prod_{l=1}^{t} \vec{U}(S^*, s, l) * \underbrace{(\widetilde{0}_r * \widetilde{0}_r * \ldots * \widetilde{0}_r)}_{w},$$

где $w = \sum\limits_{j=t+1}^{g_s} |\vec{U}(S^*, s, j)|$, переводит $\mathscr{A}^s$ из состояния σ^s_i в состояние σ^s_1. Слово $\vec{u}$ может быть представлено в виде $\vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma^s_1, \sigma^s_i)$. Отсюда следует утверждение леммы 5.

В слове $\vec{M}(S^*, s)$ выделим подслова $\vec{M}^{(i)}(S^*, s, t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{M}(S^*, s) &= \vec{M}^{(1)}(S^*, s, t) * \vec{M}^{(2)}(S^*, s, t) * \vec{M}^{(3)}(S^*, s, t); \\ M^{(1)}(S^*, s, t) &= (\vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)) * \prod_{j=1}^{t} (\vec{U}(S^*, s, j) \otimes \widetilde{b}(j)); \\ M^{(2)}(S^*, s, t) &= \prod_{j=t+1}^{g_s} (\vec{U}(S^*, s, j) \otimes \widetilde{b}(j)); \\ M^{(3)}(S^*, s, t) &= \vec{q}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1). \end{aligned}\right\}$$

Обозначим через $\widehat{E}^t$ схему, в которую преобразовалась схема E^t из B_2 после K-преобразования, т. е. когда в схему E^t добавлены блоки K.

Окрестность блока $\mathscr{B}^{st}$. Будем считать, что окрестность блока $\mathscr{B}^{st}$ (обозначение $O(\mathscr{B}^{st})$) состоит из блоков $\mathscr{B}^{st}$, $\widehat{E}^t$ и блоков F^{st}_i, K^{stj}_i, где $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant 4$ (см. рис. 3). Из этого определения и неравенства (1.2) следует, что

$$L(O(\mathscr{B}^{st})) < c_7 \log_2 g. \tag{2.6}$$

Лемма 6. *Пусть в S^* исправны схема $\widehat{E}^t$ и все блоки F и K из $O(\mathscr{B}^{st})$. Если на входы схемы S^* поступает слово $\vec{M}(S^*, s)$, то в момент, когда на входы схемы S^* поступает вектор $\widetilde{a}$ из $\vec{M}(S^*, s)$, на i-й вход блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает такое значение v_i, что*

$$v_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } \widetilde{a} \text{ — вектор из } \vec{M}^{(1)}(S^*, s, t) \text{ или из } \vec{M}^{(3)}(S^*, s, t); \\ 0, & \text{если } \widetilde{a} \text{ — вектор из } \vec{M}^{(2)}(S^*, s, t). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_{n+4})$ принадлежит либо слову $\vec{M}^{(1)}(S^*, s, t)$, либо слову $\vec{M}^{(3)}(S^*, s, t)$. Тогда $\mu(a_{r+2}, \ldots, a_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil}) \leqslant t$ и при поступлении вектора $(a_{r+2}, \ldots, a_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil})$ на вход схемы $\widehat{E}^t$ на ее t-м выходе появляется 0. Вектор $\widetilde{a}$ определен так, что $a_{n+1} = 1, a_{n+2} = a_{n+3} = a_{n+4} = 0$. Поэтому если $\widetilde{a}$ поступает на входы схемы S^*, то на первый вход схемы F_i^{st} поступает 1, а на второй — 0, потому что на выходах блоков K_i^{st1} и K_i^{st2} при $x_{n+2} = x_{n+3} = 0$ появляются значения, поступающие на их вторые входы. Эти значения равны 0. При значениях 1 и 0, поступающих соответственно на первый и второй входы схемы F_i^{st}, она реализует значение, поступающее на ее четвертый вход. Оно равно a_i, так как блоки K_i^{st3} и K_i^{st4} реализуют значения, поступающие на их вторые входы. Таким образом, если $\widetilde{a}$ принадлежит слову $\vec{M}^{(1)}(S^*, s, t)$ или слову $\vec{M}^{(3)}(S^*, s, t)$, то на i-й вход блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает значение a_i.

Предположим, что $\widetilde{a}$ входит в слово $\vec{M}^{(2)}(S^*, s, t)$. В этом случае $\mu(a_{r+2}, \ldots, a_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil}) > t$ и при поступлении вектора $(a_{r+2}, \ldots, a_{r+1+\lceil \log_2(g+1) \rceil})$ на вход схемы $\widehat{E}^t$ на ее t-м выходе появляется 1, которая через блоки K_i^{st1} и K_i^{st2} передается на второй вход схемы F_i^{st}. При этом на первый вход схемы F_i^{st} поступает 1. В этих условиях на выходе блока F_i^{st} появляется 0.

Из леммы 6 и определения слова $C(S^*, s, t)$ получаем два следствия.

Следствие 2. *Пусть в S^* исправны схема $\widehat{E}^t$ и все блоки K и F из $O(\mathscr{B}^{st})$. Если на входы схемы S^* поступает слово $\vec{M}(S^*, s)$, то на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово $\vec{C}(S^*, s, t)$.*

Следствие 3. *Если на входы схемы S^* поступает слово $\vec{M}(S^*, s)$, а на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово, отличное от слова $\vec{C}(S^*, s, t)$, то в $O(\mathscr{B}^{st})$ есть неисправные блоки.*

Правильное слово в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$. Слово $\vec{M}(S^*, s)$ называется *правильным в S^* относительно блока $\mathscr{B}^{st}$*, если при поступлении слова $\vec{M}(S^*, s)$ на входы схемы S^* выполняются три условия:

(b1) на входах блока $\mathscr{B}^{st}$ появляется слово $\vec{C}(S^*, s, t)$;

(b2) при поступлении на входы схемы S^* слова $\vec{x}(\mathscr{A}^s) \otimes \widetilde{b}(1)$, являющегося начальным подсловом в $\vec{M}(S^*, s)$, на выходе блока $\mathscr{B}^{st}$ появляется слово из множества $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i(\mathscr{A}^s)$;

(b3) слово $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{M}(S^*, s))$, образованное последними $|\vec{q}(\mathscr{A}^s)|$ символами слова $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda^0]}, S^*, \vec{M}(S^*, s))$, совпадает со словом $\vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma_1^s]}, \vec{q}(\mathscr{A}^s))$.

Теорема 3. *Пусть блок $\mathscr{B}^{st}$ из S^* находится в произвольном состоянии λ. Если слово $\vec{M}(S^*, s)$ не является правильным относительно блока $\mathscr{B}^{st}$, то в $O(\mathscr{B}^{st})$ есть неисправный блок.*

Доказательство. Пусть $\vec{M}(S^*, s)$ не является правильным словом в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$, и пусть $\vec{M}(S^*, s)$ поступает на входы схемы S^*.

Тогда выполняется одно из условий:

(c1) на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово, отличное от $\vec{C}(S^*, s, t)$;

(c2) на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово $\vec{C}(S^*, s, t)$, и при поступлении его начального подслова $\vec{x}(\mathscr{A}^s)$ на выходе блока $\mathscr{B}^{st}$ появляется слово $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{x}(\mathscr{A}^s))$, не принадлежащее множеству $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i(\mathscr{A}^s)$;

(c3) на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово $\vec{C}(S^*, s, t)$ и выполняются следующие два условия:
— при поступлении подслова $\vec{x}(\mathscr{A}^s)$ на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ на его выходе появляется такое слово $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{x}(\mathscr{A}^s))$, что при некотором $j \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется соотношение $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{x}(\mathscr{A}^s)) \in \Delta_j$;
— в слове $\vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{C}(S^*, s, t))$ последние $|\vec{q}(\mathscr{A}^s)|$ символов образуют такое слово $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{C}(S^*, s, t))$, что $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{C}(S^*, s, t)) \neq \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}, \vec{q}(\mathscr{A}^s))$.

Рассмотрим эти случаи.

1. Если выполняется условие (c1), то из следствия 3 получаем, что в $O(\mathscr{B}^{st})$ есть неисправный блок.

2. Если выполняется условие (c2), то это означает, что перед поступлением слова $\vec{C}(S^*, s, t))$ на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ он находился в состоянии, которому нет эквивалентного состояния в $\mathscr{A}^s$. Отсюда следует, что $\mathscr{B}^{st} \not\sim \mathscr{A}^s$. Это свидетельствует о неисправности блока $\mathscr{B}^{st}$.

3. Пусть выполняется условие (c3). Предположим, что $\mathscr{B}^{st} \sim \mathscr{A}^s$. Тогда $\mathscr{B}^{st}_{[\lambda \vec{x}(\mathscr{A}^s)]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma^s_j]}$. Отсюда $\mathscr{B}^{st}_{[\lambda(\vec{x}(\mathscr{A}^s) * \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma^s_1, \sigma^s_j))]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma^s_j \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma^s_1, \sigma^s_j)]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}$. Следовательно, $\vec{\xi}_q(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda]}, \vec{C}(S^*, s, t)) = \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}, \vec{x}(\mathscr{A}^s))$, что противоречит неравенству из условия (c3). Значит, неверно предположение о том, что $\mathscr{B}^{st} \sim \mathscr{A}^s$; следовательно, $\mathscr{B}^{st} \not\sim \mathscr{A}^s$. Это означает, что блок $\mathscr{B}^{st}$ неисправен.

Теорема 4. *Пусть блок $\mathscr{B}^{st}$ из S^* находится в произвольном состоянии λ. Если на входы схемы S^* подается слово $\vec{M}(S^*, s)$ и оно является правильным в S^* относительно блока $\mathscr{B}^{st}$, то*

(a) $\mathscr{B}^{st} \sim \mathscr{A}^s$;

(b) $\mathscr{B}^{st}_{[\lambda \vec{C}(S^*, s, t)]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1 \vec{q}(\mathscr{A}^s)]}$.

Доказательство. Предположим, что $\vec{M}(S^*, s)$ — правильное в S^* слово относительно блока $\mathscr{B}^{st}$. Тогда выполнены условия (b1), (b2) и (b3) из определения правильного слова. Пользуясь соотношением (2.5), получаем

$$\vec{\xi}_q(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda^0]}, \vec{C}(S^*, s, t)) = \vec{\xi}(\mathscr{B}^{st}_{[\lambda(\vec{x}(\mathscr{A}^s) * \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma^s_1, \sigma^s_j))]}, \vec{q}(\mathscr{A}^s)) = \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}, \vec{q}(\mathscr{A}^s)).$$

Из последнего равенства и из того, что слово $\vec{q}(\mathscr{A}^s)$ остаточно отличает $\mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1]}$ от любого инициального t-автомата, следует, что в автоматах $\mathscr{A}^s$ и $\mathscr{B}^{st}$ найдутся состояния σ' и λ' такие, что $\mathscr{A}^s_{\sigma'} \sim \mathscr{B}^{st}_{\lambda'}$. Отсюда и из леммы 3 следует, что выполняются соотношения (a) и (b).

2.3. Контроль работы блока K^* из $(K^*, \mathscr{B}^{st})$-связки. Здесь мы будем говорить о контроле, связанном с работой блока K^*, вход которого подключен к выходу нетривиального блока $\mathscr{B}^{st}$. Такой блок K^* будем называть *блоком из $(K^*, \mathscr{B}^{st})$-связки.*

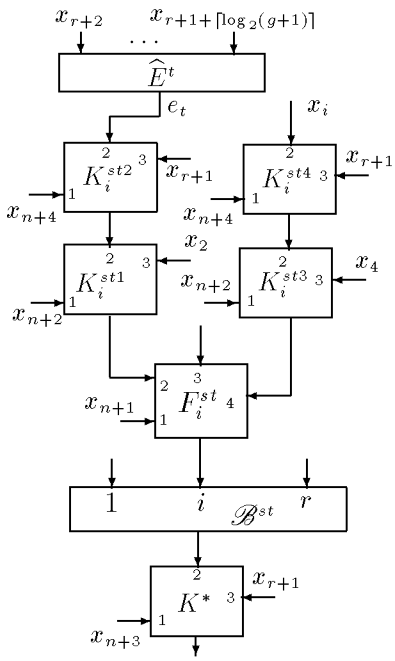


Рис. 5

Окрестность блока K^* из $(K^*, \mathscr{B}^{st})$-связки. На рис. 5 изображен фрагмент схемы S, содержащий блок K^* из $(K^*, \mathscr{B}^{st})$-связки. Полагаем, что окрестность $O(K^*)$ блока K^* из связки $(K^*, \mathscr{B}^{st})$ состоит из блоков K^*, $\mathscr{B}^{st}$, $\widehat{E}^t$ и блоков F^{st}_i, K^{stj_i}, где $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Очевидно неравенство

$$L(O(K^*)) < c_8 \log_2 g. \tag{2.7}$$

Слова $\vec{P}^s$ и $\vec{Q}(S^*, s)$. Пусть $\mathscr{A}^s$ — базисный нетривиальный автомат. Тогда в нем найдутся два состояния σ^{s0} и σ^{s1} и пара булевых r-разрядных векторов $\widetilde{a}^{s0}$ и $\widetilde{a}^{s1}$ таких, что $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma^{s0}]}, \widetilde{a}^{s0}) = 0$ и $\vec{\xi}(\mathscr{A}_{[\sigma^{s1}]}, \widetilde{a}^{s1}) = 1$. Пусть $\sigma^0, \sigma', \sigma'', \sigma''', \sigma''''$ — такие состояния в $\mathscr{A}^s$, что $\sigma^0 = [\sigma^s_1 \vec{q}(\mathscr{A}^s)]$, $\sigma' = \sigma^{s0}$, $\sigma'' = [\sigma^{s0} \widetilde{a}^{s0}]$, $\sigma''' = \sigma^{s1}$, $\sigma'''' = [\sigma^{s1} \widetilde{a}^{s1}]$. Образуем слово

$$\vec{p}(s) = \widetilde{a}^{s0} * \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma''', \sigma'') * \widetilde{a}^{s1} * \vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma', \sigma''''). \tag{2.8}$$

(Отметим, что существуют его подслова $\vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma''', \sigma'')$ и $\vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma', \sigma'''')$, обеспечивающие указанные в их записи переходы из состояние в состояние, потому что $\mathscr{A}^s$ — сильно связный автомат.) Образуем множество слов

$$W = \Big\{ \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma']}, \vec{p}(s)), \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma' \vec{p}(s)]}, \vec{p}(s)), \vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma'(\vec{p}(s) * \vec{p}(s))]}, \vec{p}(s)),$$
$$\vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma'(\vec{p}(s) * \vec{p}(s) * \vec{p}(s))]}, \vec{p}(s)) \Big\}.$$

Из определения слова $\vec{p}(s)$ непосредственно следует

Лемма 7. *В каждом слове из* W *содержатся* 0 *и* 1.

Пусть последовательность r-разрядных векторов $\widetilde{v}^{s1}\widetilde{v}^{s2}\ldots\widetilde{v}^{sp_s}$ является словом $\vec{p}(s)$, определенным равенством (2.8). Используя векторы $\widetilde{v}^{sj} = (v_1^{sj}, \ldots, v_r^{sj})$, $1 \leqslant j \leqslant p_s$, как части столбцов, образуем таблицу P_{cd}^s.

Таблица P_{cd}^s

1	v_1^{s1}	v_1^{s2}	$\ldots$	$v_1^{sp_s}$
2	v_2^{s1}	v_2^{s2}	$\ldots$	$v_2^{sp_s}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
r	v_r^{s1}	v_r^{s2}	$\ldots$	$v_r^{sp_s}$
$r+1$	c	c	$\ldots$	c
$r+2$	0	0	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	0	0	$\ldots$	0
$n+1$	1	1	$\ldots$	1
$n+2$	0	0	$\ldots$	0
$n+3$	d	d	$\ldots$	d
$n+4$	0	0	$\ldots$	0

Обозначим через $\vec{P}_{cd}^s$ слово, составленное из $(n+4)$-разрядных векторов, являющихся столбцами таблицы. Придавая параметрам c и d значения 0 и 1, образуем слова $\vec{P}_{00}^s$, $\vec{P}_{01}^s$, $\vec{P}_{10}^s$ и $\vec{P}_{11}^s$ и слова $\vec{P}^s$ и $\vec{Q}(S^*, s)$ такие, что $\vec{P}^s = \vec{P}_{00}^s * \vec{P}_{01}^s * \vec{P}_{10}^s * \vec{P}_{11}^s$ и $\vec{Q}(S^*, s) = \vec{M}(S^*, s) * (\vec{y}(\mathscr{A}^s, \sigma', \sigma^0) \otimes \widetilde{b}(1)) * \vec{P}^s$. Пользуясь неравенством (2.3) и леммой 2, заключаем, что слово $\vec{Q}(S^*, s)$ может быть выбрано таким, чтобы выполнялось неравенство $|\vec{Q}(S^*, s)| < 2 \cdot 4^r k^4 \ln(2k) + k^2 + kg_s + 4(2k+2) + k$. Отсюда при $k \geqslant 2$ следует, что

$$|\vec{Q}(S^*, s)| < 3 \cdot 4^r k^4 \ln(k) + g_s k. \qquad (2.9)$$

Слово $\vec{Q}(S^*, s)$ называется *правильным в* S^* *относительно блока* K^* из $(K^*, \mathscr{B}^{st})$-связки, если при его поступлении на входы схемы S^* выполняются условия:

(d1) подслово $\vec{M}(S^*, s)$ из $\vec{Q}(S^*, s)$ является правильным в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$;

(d2) при поступлении на входы схемы S^* каждого из четырех подслов $\vec{P}_{00}^s$, $\vec{P}_{01}^s$, $\vec{P}_{10}^s$ и $\vec{P}_{11}^s$ слова $\vec{Q}(S^*, s)$ на входах блока K^* появляются все трехразрядные булевы векторы;

(d3) если на 1, 2 и 3-й входы блока K^* поступают значения a, b и c, то на выходе этого блока реализуется функция $\overline{a}b \vee ac$.

Теорема 5. *Пусть* K^* *является блоком из* $(K^*, \mathscr{B}^{st})$*-связки. Тогда*

1) *если* $\vec{Q}(S^*, s)$ — *правильное в* S^* *слово относительно* K^*, *то блок* K^* *исправен;*

2) *если* $\vec{Q}(S^*, s)$ *не является правильным в* S^* *словом относительно* K^*, *то в* $O(K^*)$ *есть неисправный блок.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы 5 очевидно. Докажем второе. Предположим, что $\vec{Q}(S^*, s)$ не является правильным в S^* словом относительно K^*. Возможны случаи:

(e1) подслово $\vec{M}(S^*, s)$ из $\vec{Q}(S^*, s)$ не является правильным в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$;

(e2) подслово $\vec{M}(S^*, s)$ из $\vec{Q}(S^*, s)$ является правильным в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$ и при поступлении на входы схемы S^* одного из слов $\vec{P}^s_{00}$, $\vec{P}^s_{01}$, $\vec{P}^s_{10}$, $\vec{P}^s_{11}$ на входы блока K^* поступают не все трехразрядные булевы векторы;

(e3) при поступлении на входы схемы S^* каждого из слов $\vec{P}^s_{00}$, $\vec{P}^s_{01}$, $\vec{P}^s_{10}$ и $\vec{P}^s_{11}$ на входах блока K^* появляются все трехразрядные булевы векторы, а при поступлении на входы блока K^* некоторого вектора (a, b, c) на его выходе появляется значение, отличное от $\overline{a}b \vee ac$.

Пусть выполняется случай (e1). Тогда по теореме 3 в $O(\mathscr{B}^{st})$ есть неисправный блок. Отсюда следует, что и в $O(K^*)$ есть неисправный блок, так как $O(\mathscr{B}^{st}) \subset O(K^*)$.

Пусть выполняется случай (e2). Тогда слово $\vec{M}(S^*, s)$ является правильным в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$. Пользуясь теоремой 4, заключаем, что выполняются соотношения $\mathscr{B}^{st} \sim \mathscr{A}^s$ и $\mathscr{B}^{st}_{[\lambda \vec{C}(S^*,s,t)]} \sim \mathscr{A}^s_{[\sigma^s_1 \vec{q}(s)]}$. Поэтому при поступлении на входы схемы S^* слова $\vec{P}^s_{00}$ на входы блока $\mathscr{B}^{st}$ поступает слово $\vec{p}(s)$. Перед его поступлением $\mathscr{B}^{st}$ был инициальным автоматом, эквивалентным автомату $\mathscr{A}^s_{[\sigma']}$. В результате на выходе блока $\mathscr{B}^{st}$ должно появиться слово $\vec{\xi}(\mathscr{A}^s_{[\sigma']}, \vec{p}(s))$, в котором по лемме 7 содержатся 0 и 1. После появления слова $\vec{P}^s_{00}$ на входе схемы S^* блок $\mathscr{B}^{st}$ снова станет автоматом, эквивалентным автомату $\mathscr{A}^s_{[\sigma']}$. При поступлении на вход схемы S^* очередных подслов $\vec{P}^s_{01}$, $\vec{P}^s_{10}$ и $\vec{P}^s_{11}$ блок $\mathscr{B}^{st}$ каждый раз будет переходить в состояние, эквивалентное состоянию σ' автомата $\mathscr{A}^s$, и на выходе этого блока появятся слова, в каждом из которых имеются 0 и 1. Из сказанного следует, что если слово $\vec{M}(S^*, s)$ является правильным в S^* относительно $\mathscr{B}^{st}$, то на вход блока K^* должны поступать все трехразрядные векторы. Таким образом, условие (e2) является противоречивым.

Очевидно, что при условии (e3) неисправен блок K^*. В этом случае в $O(K^*)$ есть неисправные блоки, так как блок K^* по определению входит в свою окрестность. Теорема 5 доказана.

2.4. Контроль блока, в окрестности которого нет нетривиальных блоков. На рис. 6 изображены схемы R_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$, являющиеся фрагментами схемы S^*. Эти фрагменты определяют всевозможные способы подключения блоков $\mathscr{B}$, F и K^* к их соседям в S^*.

Определим наборы блоков из S^*, которые будем называть окрестностями блоков B, F, K^*. Состав окрестности блока зависит от способа его подключения (см. рис. 6). Окрестность блока U обозначим через $O(U)$ и определим ее так:

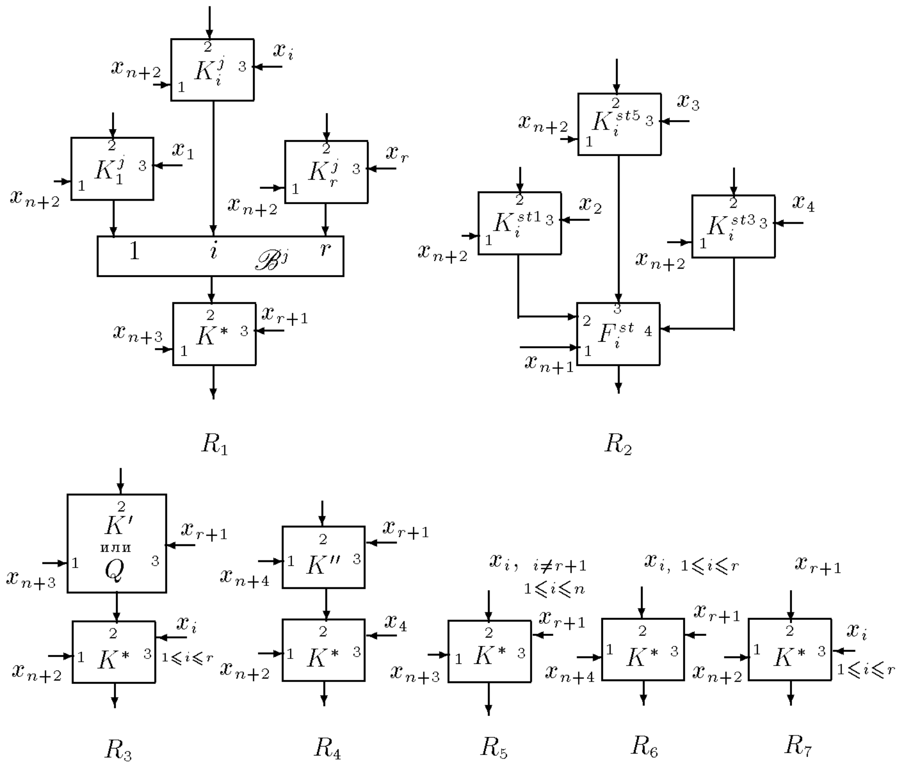


Рис. 6

$$O(U)=\begin{cases}\{\mathscr{B}^j, K_1^j, K_2^j \ldots, K_r^j\}, \text{ если } U=\mathscr{B}^j;\\ \{F_i^{st}, K_i^{st1}, K_i^{st3}, K_i^{st5}\}, \text{ если } U=F_i^{st};\\ \{K^*, K'\} \text{ или } \{K^*, Q\}, \text{ если } U=K^* \text{ и } K^*\in R_3;\\ \{K^*, K''\}, \text{ если } U=K^* \text{ и } K^*\in R_4;\\ \{K^*\}, \text{ если } U=K^* \text{ и } K^*\in R_t,\ t\in\{5,6,7\}.\end{cases} \tag{2.10}$$

Множества G_i. Пусть $\Big(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, 1, d, 0\Big)$ является $(n{+}4)$-разрядным булевым вектором. Варьируя значения $a_1, a_2, \ldots,$ a_{r+1}, d, образуем множество $G_1=\Big\{\Big(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, 1, d, 0\Big)\Big\}$, состоящее из 2^{r+2} векторов. Аналогично образуем множества G_i, $2\leqslant i\leqslant 7$:

$G_2=\Big\{\Big(0, a_2, a_3, a_4, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-4}, b, 1, 0, 0\Big)\Big\}$,

$$G_3 = \Big\{\Big(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r}, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, c, 1, 0\Big)\Big\},$$

$$G_4 = \Big\{\Big(0, 0, 0, a_4, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r-4}, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, c, 0, 1\Big)\Big\},$$

$$G_5 = \Big\{\Big(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r}, a_{r+1}, \underbrace{a, a, \ldots, a}_{n-r-1}, 0, 0, d, 0\Big)\Big\},$$

$$G_6 = \Big\{\Big(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r}, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, 0, 0, e\Big)\Big\},$$

$$G_7 = \Big\{\Big(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r}, a_{r+1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-r-1}, 0, c, 0, 0\Big)\Big\},$$

Произвольно упорядочив каждое множество, образуем такие слова $\vec{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 7$, что $|\vec{G}_1| = 2^{r+2}$, $|\vec{G}_2| = 16$ и $|\vec{G}_i| = 8$ при $3 \leqslant i \leqslant 7$.

Слово G имеет вид $\vec{G} = \vec{G}_1 * \vec{G}_2 * \ldots * \vec{G}_7$, для него выполняется равенство

$$|\vec{G}| = 4 \cdot 2^r + 56. \tag{2.11}$$

α-связка в C^*. Пусть K^* является частью схемы R_1 и автомат $\mathscr{A}^j$ в C, соответствующий автомату $\mathscr{B}^j$ в C^*, реализует константу α, $\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда будем говорить, что блоки $\mathscr{B}^j$ и K^* входят в *α-связку* в схеме C^*.

α-правильный блок K^* в S^*. Пусть K^* — произвольный блок типа K в C^*. Блок K^* называется *α-правильным*, если он входит в α-связку и при поступлении вектора (x, α, y) на входы блока K^* на его выходе реализуется функция $\overline{x}\alpha \vee xy$. Работа α-правильного блока K^* может отличаться от работы исправного блока K^* лишь на входных наборах вида $(c, \overline{\alpha}, d)$.

Правильное в S^* слово относительно блока U. Слово $\vec{P}$ называется *правильным* в S^* относительно блока U из R_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$, если при поступлении слова $\vec{P}$ на входы схемы S^* выполняются условия:

(f1) если $U = K^*$ и K^* не входит ни в какую α-связку, то на входы блока K^* поступают все входные наборы; если $U = K^*$ и K^* входит в α-связку, то на его входы поступают все векторы из множества $\{(0, \alpha, 0), (0, \alpha, 1), (1, \alpha, 0), (1, \alpha, 1)\}$;

(f2) на выходе блока U реализуется предписанная ему функция, т. е.
— если $U = K^*$ и на входы этого блока поступают x, y и z, то на его выходе реализуется функция $\overline{x}y \vee xz$;
— если $U = F_i^{st}$ и на входы этого блока поступают x, y, z и t, то на его выходе реализуется функция $\overline{x}z \vee x\overline{y}t$;

— если $U = \mathscr{B}^t$ и на входы блока $\mathscr{B}^t$ поступает произвольный вектор $(y_1, \dots, y_r)$ из слова $\vec{P}$, то на выходе блока $\mathscr{B}^t$ появляется то значение, которое должно появиться в этой ситуации на выходе исправного блока $\mathscr{B}^t$.

Пусть U — один из блоков, в окрестности которого нет нетривиальных блоков. Будем говорить, что $\vec{P}$ *контролирует* U в схеме S^*, если выполняются два условия:

(a) если $\vec{P}$ является правильным словом в S^* относительно блока U, то блок U исправен;

(b) если $\vec{P}$ не является правильным словом в S^* относительно блока U, то в $O(U)$ есть неисправный блок.

Теорема 6. *Справедливы утверждения*:

(a) $\vec{G}_1$ *контролирует* K^* *в* S^*, *если* K^* *находится в* R_1 *и не образует* α-*связку с блоком* $\mathscr{B}^j$ *из* R_1;

(b) $\vec{G}_i$ *контролирует* K^* *в* S^*, *если* K^* *находится в* R_i *и* $3 \leqslant i \leqslant 7$;

(c) $\vec{G}_1$ *контролирует* $\mathscr{B}^j$ *в* S^*;

(d) $\vec{G}_2$ *контролирует* F_i^{st} *в* S^*.

Доказательство. Рассмотрим утверждение (a). Пусть K^* находится в R_1 и не образует α-связку с блоком $\mathscr{B}^j$ из R_1. Это означает, что в исправной схеме блок $\mathscr{B}^j$ не является схемой, реализующей константную функцию.

Если $\vec{G}_1$ является правильным словом в S^* относительно K^* в S^*, то из определения правильного в S^* слова следует, что блок K^* исправен.

Предположим, что слово $\vec{G}_1$ не является правильным относительно K^*. Рассмотрим случаи (1) и (2), когда это слово не является правильным.

(1) Предположим, что на входы блока K^* поступают не все трехразрядные векторы. Слово $\vec{G}_1$ выбрано таким, что любой его вектор содержит единицу в $(n+2)$-м разряде. Если бы блоки K_i^j, $1 \leqslant i \leqslant r$, и $\mathscr{B}^j$ были исправными, то при поступлении на входы схемы S^* любого вектора $\widetilde{g}$ из слова G_1 на входы блока $\mathscr{B}^j$ поступал бы вектор, образованный первыми r компонентами вектора $\widetilde{g}$, а на первый и третий входы блока K^* поступали бы значения $(n+3)$-й и $(r+1)$-й компонент вектора $\widetilde{g}$. Слово $\vec{G}_1$ определено так, что для любого вектора $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ и булевых значений u и v в $\vec{G}_1$ найдется вектор такой, что его первые r компонент равны $(a_1, a_2, \dots, a_r)$, а $(n+3)$-я и $(r+1)$-я компоненты равны u и v. Так как K^* не входит в α-связки, то блок $\mathscr{B}^j$ реализует функцию, отличную от константы, и при поступлении слова $\vec{G}$ на входы схемы S^* на входы блока K^* поступят все 8 трехмерных векторов. Но

мы предположили, что это не так. Значит, неверно предположение об исправности всех блоков K_i^j, $1 \leqslant i \leqslant r$, и блока $\mathscr{B}^j$.

(2) Предположим, что на входы блока K^* поступают все трехразрядные векторы, но при поступлении одного из них, например вектора (a, b, c), на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{a}b \vee ac$. В этом случае, очевидно, неисправен блок K^*.

Утверждение (a) теоремы 6 доказано. Доказательства остальных утверждений теоремы 6 мы опустим. Они несложны и аналогичны доказательству утверждения (a).

Теорема 7. *Предположим, что K^* входит в α-связку с блоком $\mathscr{B}^j$. Тогда*

(a) *если $\vec{G}_1$ — правильное в S^* слово относительно K^*, то блок K^* является α-правильным;*

(b) *если $\vec{G}_1$ не является правильным словом в S^* относительно K^*, то блок K^* неисправен.*

Доказательство. Утверждение (a) теоремы 7 очевидно. Доказательство утверждения (b) аналогично доказательству утверждения (a) теоремы 6. Отличие состоит лишь в том, что если правильно работают все блоки K_i^j, $1 \leqslant i \leqslant r$, а $\mathscr{B}^j$ является блоком из окрестности блока K^*, то при поступлении слова $\vec{G}_1$ на входы схемы S^* на входы блока K^* должно поступить слово, в котором присутствуют векторы $(0, \alpha, 0)$, $(0, \alpha 1)$, $(1, \alpha, 0)$, $(1, \alpha, 1)$ (и могут не содержаться остальные трехразрядные векторы). Если на входы блока K^* поступают не все такие векторы, то в $O(K^*)$ есть неисправный блок. Если поступают все четыре вектора, но при поступлении одного из них, например вектора (a, α, b), на выходе блока K^* появляется значение, отличное от $\overline{a}\alpha \vee ab$, то, очевидно, неисправен блок K^*. Теорема 7 доказана.

2.5. Слово $\vec{T}(S^*)$. Множества D_i. Классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$.

Слово $\vec{T}(S^*)$ определим так:

$$\vec{T}(S^*) = \prod_{s=1}^{d(\Phi)} \vec{Q}(S^*, s) * \vec{G}. \tag{2.12}$$

Из (2.9) и (2.11) следует, что $\vec{T}(S^*)$ можно выбрать таким, чтобы выполнялись неравенства $|\vec{T}(S^*)| < 3d(\Phi) \cdot 4^r k^4 \ln k + kR_B + 2^{r+2} + 56 <$ (при $k \geqslant 2$) $< d(\Phi) \cdot 4^{r+1} k^4 \ln k + kR_B$. Следовательно,

$$|\vec{T}(S^*)| < d(\Phi) \cdot 4^{r+1} k^4 \ln k + kR_B. \tag{2.13}$$

Обозначим через $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\}$ множество, содержащее все блоки из C^*, кроме блоков Q. Положим $D_i = O(\beta_i)$, где $O(\beta_i)$ — окрестность блока β_i. Множество $\{D_1, \ldots, D_s\}$ разобьем на два класса $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$ согласно следующим правилам.

1. Если при испытании схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+4})$ словом $\vec{T}(S^*)$ установлено, что β — исправный или α-правильный блок, то отнесем $O(\beta)$ к классу $D(2, C^*)$.

2. Если при испытании схемы $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+4})$ словом $\vec{T}(S^*)$ не удалось установить, что β является исправным или α-правильным блоком, то отнесем его окрестность $O(\beta)$ в класс $D(1, C^*)$.

Замечание. Из теорем 3–7 следует, что испытанием схемы S^* словом $\vec{T}(S^*)$ можно установить, какое из следующих утверждений выполняется:

— блок β исправен;

— в $O(\beta)$ есть неисправные блоки.

Если выполняются оба утверждения, то по первому правилу окрестность $O(\beta)$ относится к классу $D(2, C^*)$.

Теорема 8. 1. *Если класс $D(1, C^*)$ непуст, то любая часть D_i из $D(1, C^*)$ содержит неисправный элемент.*

2. *Если класс $D(1, C^*)$ пуст, то для произвольных состояний $\sigma(A^*)$ и $\sigma(B)$ подсхем A^* и B схемы $S(A^*, B, \widetilde{x}_n)$ найдется такое состояние $\sigma(C^*)$ схемы C^*, что для любой последовательности $\vec{P}$, состоящей из n-разрядных булевых векторов, справедливо равенство*

$$S_a(A^*, B, \sigma(A^*), \sigma(B), \vec{P}) = S_a(A^*, C^*, \sigma(A^*), \sigma(C^*), \vec{P}_{(0000)}).$$

Доказательство. Если $D_i \in D(1, C^*)$, то по одной из теорем 3–7 получаем, что в D_i имеется неисправный элемент.

Предположим, что множество $D(1, C^*)$ пусто. Тогда из теорем 4–7 следует, что в схеме C^*

— все блоки, отличные от блоков K, Q и F, исправны;

— при любом $\alpha \in \{0, 1\}$ все блоки типа K, входящие в α-связки, являются α-правильными;

— блоки K, не входящие в α-связки, исправны;

— блоки F исправны;

— среди блоков Q имеется не более m неисправных.

Из определения блоков K и Q следует, что если $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4} = 0$, а переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают произвольные значения, то в схеме $S(A^*, C^*, \widetilde{x}_{n+4})$ блоки K и Q работают как проводники, соединяющие вторые входы блоков с выходами тех же блоков. Блоки F работают как проводники, соединяющие их третьи входы с выходами этих блоков. При условиях теоремы 8 в схеме C^* любой блок K^*, не входящий в α-связку, исправен, а входящие в α-связки блоки K являются α-правильными. В схеме C^* исправны все блоки, отличные от K, F и Q, поэтому в C^* исправны и блоки, реализующие константы.

Пусть $\mathscr{B}$ — блок, входящий в α-связку с блоком K^*. Блок $\mathscr{B}$ исправен и реализует константу α, а блок K^* является α-правильным. Поэтому если $x_{n+3} = 0$, а остальные переменные принимают произвольные значения, то на выходе блока K^* реализуется константа α. Это следует из того, что любой α-правильный блок K^* реализует значение $\overline{x}\alpha \vee xz$, если на его входы поступает вектор (x, α, z). Следовательно, при $x_{n+3} = 0$ можно считать, что блок K^* работает как проводник, соединяющий его второй вход с выходом блока K^*. Таким образом, в условиях теоремы 8 при $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4} = 0$ в схеме C^* *все блоки* K^* работают как проводники, соединяющие их вторые входы с выходами этих блоков. Так же работают и блоки Q, кроме, быть может, нескольких неисправных, причем число последних не превышает m. В схеме C^* правильно работающие схемы D корректируют работу неисправных блоков Q. Поэтому если каждый нетривиальный блок $\mathscr{B}$ из C^* привести в то состояние, в котором находится соответствующий ему элемент в B, то при $x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3} = x_{n+4} = 0$ схема C^* будет работать как исправная схема B. Отсюда следует второе утверждение теоремы 8.

Заключение

Убедимся, что определенная в § 1 схема $S(A, C, \widetilde{x}_{n+4})$ обладает свойствами, перечисленными в утверждениях теоремы 1.

1. Утверждение (a) теоремы 1 следует из теоремы 2.

2. Пусть $D_1, \ldots, D_t$ — окрестности всех отличных от Q блоков в C и пусть $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$ — классы, определенные в п. 2.5 из § 2. Пользуясь соотношениями (2.6), (2.7) и (2.10), получаем, что при любом $i \in \{1 \ldots t\}$ выполняется неравенство $L(D_i) < c_9 \log_2 R_B$. Из (1.5) имеем $L(C) < c_6(mL(B) + R_B \log_2 R_B)$. Следовательно, справедливо утверждение (b) теоремы 1.

3. Слово $\vec{T}(S^*)$ определим соотношением (2.12). Для $\vec{T}(S^*)$ справедливо неравенство $|\vec{T}(S^*)| < d(\Phi)4^{r+1}k^4 \ln k + kR_B$ (см. (2.13) в § 2). Классы $D(1, C^*)$ и $D(2, C^*)$, определенные в п. 2.5 из § 2, обладают всеми свойствами, о которых говорится в утверждении (c) теоремы 1. Это следует из теоремы 8.

Все утверждения теоремы 1 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Василевский М. П.** О распознавании неисправности автоматов // Кибернетика. 1973. № 4. С. 98–108.

2. **Гилл А.** Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.

3. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 1. С. 44–64.

4. **Носков В. Н.** О диагностических и установочных задачах для схем из ненадежных автоматов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 45–71.

5. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: noskov@math.nsc.ru

Статья поступила
24 мая 2002 г.