ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2002. Серия 1. Том 9, № 4, 5–22

УДК 519.7

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ КВАЗИМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНЫХ ПОЛУРЕШЕТКАХ*)

Г. П. Агибалов, Н. Г. Парватов

Рассматриваются функции, определенные на конечной верхней полурешетке. Формулируются необходимые и достаточные условия, при которых произвольная система монотонных функций, содержащая все одноместные минимальные точечные функции, образует полную систему для реализации всех квазимонотонных функций. Доказывается существование конечной системы монотонных функций, полной для реализации квазимонотонных функций.

1. Функции на полурешетках

Функции на полурешетках служат инструментом для адекватного описания с наперед заданной точностью динамического поведения дискретных управляющих систем, или дискретных автоматов [2].

Пусть далее L есть конечная верхняя полурешетка, L^n — ее n-я декартова степень и P_L — множество всех функций $f : L^n \to L$, $n \geqslant 1$. Функции в P_L называются *функциями на полурешетке* L. Отношения порядка в полурешетках L и L^n обозначаются символом $\leqslant$. Область определения функции f обозначается через D_f. Для n-местной функции из P_L это есть полурешетка L^n. Множество всех n-местных функций в $F \subseteq P_L$ обозначается через $F^{(n)}$.

Функция $f \in P_L$ называется *точечной*, если ее значение на любом элементе $d \in D_f$ равно точной верхней грани множества ее значений на минимальных элементах множеств D_f, содержащихся в d. Функция f называется *монотонной*, если из $a \leqslant b$ следует $f(a) \leqslant f(b)$. Говорят, что функция f *реализуется* функцией g, или g является *реализацией* f, и пишут $g \leqslant f$, если $D_f = D_g$ и $g(d) \leqslant f(d)$ при любом $d \in D_f$. Функция f называется *квазимонотонной*, если она реализуется монотонной функцией.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98–01–00288).

Конструктивные тесты квазимонотонности можно найти в [1, 2]. Множества всех точечных, монотонных и квазимонотонных функций в P_L обозначаются через T_L, M_L и Q_L соответственно. Вместе с отношением реализации они являются частично упорядоченными множествами, причем $T_L \subseteq M_L \subseteq Q_L \subseteq P_L$. Поэтому можно говорить о минимальных элементах в них. Минимальные элементы в T_L называются *минимальными точечными функциями.* Множество всех минимальных элементов частично упорядоченного множества S обозначается через $m(S)$. В частности, $m(T_L)$ и $m(L)$ — это множества всех минимальных точечных функций в T_L и точек в L соответственно. Элементы в L рассматриваются и как функции в P_L, принимающие соответствующие константные значения, и как таковые являются точечными функциями, т. е. $L \subseteq T_L$, причем $m(L) \subseteq m(T_L) = m(M_L) = m(Q_L)$.

В приложениях к дискретным автоматам важное место занимают функции на полурешетке $\widetilde{E}_k$ всех непустых подмножеств множества $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Именно квазимонотонные функции на $\widetilde{E}_k$ физически реализуемы (допускают схемную реализацию в физически исполнимом базисе): реальные элементы (транзисторы, вентили и т. п.) реализуют точечные функции, схемы из таких элементов реализуют монотонные функции, а функции, реализуемые схемами, являются квазимонотонными [2].

2. Понятия полноты, r- и rs-полноты

Замыкание любого подмножества F функций из P_L относительно операции суперпозиции обозначается через $[F]$. Кроме того, определяются $[F]_r$ — *замыкание* $[F]$ *по реализации,* т. е.

$$f \in [F]_r \Leftrightarrow \exists g \in [F](g \leqslant f),$$

и $[F]_{rs}$ — *замыкание* F *по реализации и суперпозиции,* т. е.

1) $F \subseteq [F]_{rs}$,

2) если $g \in [F]_{rs}$ и $g \leqslant f$, то $f \in [F]_{rs}$,

3) если $f_0, f_1, \ldots, f_m \in [F]_{rs}$, то $f_0(f_1, \ldots, f_m) \in [F]_{rs}$.

По определению имеем $[F] \subseteq [F]_r \subseteq [F]_{rs}$. Кроме того, непосредственно проверяется, что если $F \subseteq M_L$, то $[F]_r = [F]_{rs}$. Подмножество $F \subseteq P_L$ называется *замкнутым классом* (*по суперпозиции*), если $F = [F]$, *замкнутым классом по реализации*, если $F = [F]_r$, и *замкнутым классом по реализации и суперпозиции*, если $F = [F]_{rs}$. Класс F называется *полной*, *r-полной* или *rs-полной системой* в $P \subseteq P_L$, если $F \subseteq P$ и $[F] = P$, $[F]_r = P$ или $[F]_{rs} = P$ соответственно. По определению свойство полноты влечет свойство r-полноты, которое в свою

очередь влечет свойство rs-полноты, но обратные импликации в общем случае не верны. В случае, когда $F \subseteq M_L$, свойства r- и rs-полноты системы F совпадают. Система функций из Q_L, r-полная в Q_L, называется также *полной системой для реализации функций из* Q_L.

3. Состояние проблемы

Проблемы полноты, r- и rs-полноты, совпадающие в P_k, различны в Q_L и, в отличие от P_k, осложняются в Q_L тем, что квазимонотонные функции из Q_L не допускают выражения через квазимонотонные функции в виде, аналогичном совершенной дизъюнктивной нормальной форме, что делает нетривиальной даже задачу нахождения примеров конечных и тем более минимальных полных систем в Q_L. Первый результат, относящийся к полноте в Q_L, получен в работе [2]. В ней описана бесконечная система квазимонотонных функций из $Q_{\tilde{E}_3}$ со следующими свойствами:

(1) любая квазимонотонная функция из $Q_{\tilde{E}_3}$ может быть реализована формулой, построенной из функций этой системы с помощью (двухместных) конъюнкции и дизъюнкции, являющихся минимальными точечными функциями в $Q_{\tilde{E}_3}$, — свойство П-полноты;

(2) никакая собственная часть системы не обладает свойством (1) — свойство независимости.

В [3] было установлено, что система гомоморфизмов не является rs-полной даже для $T_{\tilde{E}_k}$, в то время как система $T_{\tilde{E}_k}$ полна для $M_{\tilde{E}_k}$ и r-полна для $Q_{\tilde{E}_k}$. Затем было выяснено [4], что система из минимальных функций в $T_{\tilde{E}_k}$, зависящих от 2^k переменных, является r-полной в $Q_{\tilde{E}_k}$, т. е. впервые было доказано существование в $Q_{\tilde{E}_k}$ конечных r-полных систем. Кроме того, в [4] показано, что в случае $k = 2$ система $F \subseteq m(Q_{\tilde{E}_k})$, содержащая константы из $m(\tilde{E}_k)$, является r-полной в $Q_{\tilde{E}_k}$ тогда и только тогда, когда в P_k полна система ограничений на E_k функций из F, а при $k \geqslant 3$ это не так.

В [5, 6] построены 1) r-полная в $Q_{\tilde{E}_k}$ система из $k+3$ минимальных точечных функций, одна из которых является k-местной, две — двухместные конъюнкция и дизъюнкция и k одноместных функций; 2) полная для $Q_{\tilde{E}_k}$ система из 2^k+2 точечных функций, одна из которых является (2^k-1)-местной, две — двухместные конъюнкция и дизъюнкция и 2^k-1 одноместных функций. Кроме того, в [5] указана минимальная точечная функция от $k+1$ переменных, которая вместе с константами из $m(\widetilde{E}_k)$ образует r-полную систему в $Q_{\tilde{E}_k}$. Последний результат позволяет сформулировать алгоритм распознавания r-полноты в $Q_{\tilde{E}_k}$.

Наконец, в [9] установлены 1) r-полнота в $Q_{\tilde{E}_k}$ системы из двухместной конъюнкции (или дизъюнкции) и всех одноместных функций из

$m(T_{\tilde{E}_k})$; 2) полнота в $Q_{\tilde{E}_k}$ системы из двухместной конъюнкции (или дизъюнкции) и всех одноместных функций из $Q_{\tilde{E}_k}$; 3) полнота в $M_{\tilde{E}_k}$ системы из двухместной конъюнкции (или дизъюнкции) и всех одноместных функций из $M_{\tilde{E}_k}$.

В заключение заметим, что ни теоремы о функциональной полноте, ни общих критериев полноты, подобных тем, что известны для P_k, для $Q_{\tilde{E}_k}$ (тем более для Q_L) до сих пор не установлено. Ниже формулируются необходимые и достаточные условия r-полноты в Q_L произвольной системы монотонных функций, содержащей все одноместные минимальные точечные функции, и устанавливается существование r-полной в Q_L конечной системы монотонных функций. Эти результаты были доложены на конференции DAOR'2000 [7].

4. Формулировка результатов

Будем обозначать через $\inf\ V$ точную нижнюю грань в L произвольного подмножества $V \subseteq L$ и писать $\inf\ V = \varnothing$, если таковая отсутствует. Далее будем предполагать что $\inf\ L = \varnothing$, т. е. L не является решеткой, поскольку в противном случае рассматриваемые ниже задачи не имеют смысла.

Подмножество $V \subseteq L$ называется *особым*, если существует $a \in V$ такое, что $\inf\{a, v\} \neq \varnothing$; V называется *существенным*, если $\inf\ V = \varnothing$. Последнее условие равносильно условию: существуют $b \in V$ и $A \subseteq V$ такие, что $\inf\ A \neq \varnothing$ и $\inf(A \cup \{b\}) = \varnothing$; b называется *существенным элементом в* V. Множество всех существенных элементов в V обозначается через $E(V)$. Подмножество V называется *сильно существенным*, если существуют $b, c \in V$ и $A \subseteq V$ такие, что $b \neq c$, $\inf\ A \neq \varnothing$ и $\inf(A \cup \{b\}) = \inf(A \cup \{c\}) = \varnothing$. Существенное подмножество, не являющееся сильно существенным, называется *слабо существенным*. Множества всех особых слабо и сильно существенных подмножеств полурешетки L обозначаются через $W(L)$ и $S(L)$ соответственно.

Пусть λ — некоторый линейный порядок на L. Для всякого непустого подмножества $V \subseteq L$ через $\lambda(V)$ обозначим набор элементов из V, взятых по одному разу и записанных в этом порядке. Пусть $H_L = \{\lambda(V) \mid V \in S(L)\} \cup \{(\lambda(V)b) \mid V \in W(L) \text{ и } b \in E(V)\}$. Ввиду конечности решетки L множество H_L конечно. Если $x = x_1x_2\ldots x_n$ — элемент множества L^n, $1 \leqslant i \leqslant n$, и $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, то пусть $x[i] = x_i$ и $x[I] = \{x_i \mid i \in I\}$. Для любого набора $y \in L^n$ определим множество

$$U(y) = \{u \subseteq \{1, \ldots, n\} \mid \inf\ y[u] = \varnothing \text{ и } u \neq \varnothing\},$$

предикат $\rho_y\colon L^n \to \{0, 1\}$ такой, что

$$\rho_y(x) = 1 \Leftrightarrow U(x) \subset U(y),$$

и множество $Q_L(y)$ всех функций из Q_L, сохраняющих предикат ρ_y, т. е. функция $f \in Q_L^{(m)}$ принадлежит множеству $Q_L(y)$ тогда и только тогда, когда для любых наборов $a_i \in L^n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, из $\rho_y(a_1) = \dots = \rho_y(a_m) = 1$ следует $\rho_y(f(a_1[1], \dots, a_m[1]), \dots, f(a_1[n], \dots, a_m[n])) = 1$, или, что то же самое, из $U(a_i) \subset U(y)$ при всех i следует

$$U(f(a_1[1], \dots, a_m[1]), \dots, f(a_1[n], \dots, a_m[n])) \subset U(y).$$

По определению множество $U(y)$ является множеством всех тех непустых подмножеств компонент вектора y, которые не имеют нижней грани в L. Заметим, что поскольку суперпозиция функций, сохраняющих некоторый предикат, также сохраняет этот предикат [8] и суперпозиция квазимонотонных функцией является квазимонотонной функцией [2], то $Q_L(y)$ является замкнутым классом функций из Q_L, т. е. $[Q_L(y)] = Q_L(y)$.

Пусть, наконец, $\Omega_L = \{Q_L(y) \mid y \in H_L\}$. Обратим внимание на конечность множества Ω_L.

Теорема 1. *Если $F \subseteq M_L$, то $F \cup m(T_L^{(1)})$ является полной системой для реализации функций из Q_L тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из замкнутых классов семейства Ω_L.*

Другими словами, система $F \cup m(T_L^{(1)})$ полна для реализации всех квазимонотонных функций на L тогда и только тогда, когда для каждого набора $y \in H_L$ система содержит функцию, не сохраняющую предикат ρ_y.

Теорема 2. *В множестве M_L существует конечная система функций, полная для реализации всех функций из Q_L.*

Доказательству теорем предпошлем формулировку необходимых вспомогательных лемм, доказательство которых вынесено в конец статьи.

5. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Каждый класс в семействе Ω_L содержит все одноместные квазимонотонные функции.*

Лемма 2. *Классы в семействе Ω_L не являются r-полными системами функций из Q_L.*

Пусть V_f обозначает множество всех значений функции f, т. е. $V_f = f(D_f) \subseteq L$.

Лемма 3. *Для любой квазимонотонной функции f множество V_f особое.*

Лемма 4. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_L$, $V_f \in W(L)$ и $|f^{-1}(b)| = 1$ для каждого элемента $b \in E(V_f)$. Тогда существуют функция $s \in m(T_L^{(1)})$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $s(x_j) \leqslant f(x_1, \dots, x_n)$.*

Для функции $f \in P_L$ число таких подмножеств $A \subseteq D_f$, что $\inf\ f(A) = \varnothing$, называется *весом* функции f и обозначается через $w(f)$. Говорят, что функция $f \in P_L^{(n)}$ разлагается по функции $f_0 \in P_L^{(m)}$ на компоненты $f_1, \ldots, f_m$ из $P_L^{(n)}$, если $f_0(f_1, \ldots, f_m) \leqslant f$. Если при этом $w(f_i) < w(f)$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant m$, то говорят, что f разлагается по f_0 на компоненты меньшего веса.

Лемма 5. *Пусть $f \in Q_L$, $V_f \in S(L)$, $y = \lambda(V_f)$, $g \in Q_L$ и g не сохраняет предикат ρ_y. Тогда существует такая функция $s \in m(T_L^{(1)})$, что f разлагается по суперпозиции $s(g)$ на компоненты из Q_L меньшего веса.*

Лемма 6. *Пусть $f \in Q_L$, $V_f \in W(L)$ и $|f^{-1}(b)| > 1$ для некоторого элемента $b \in E(V_f)$. Пусть также $y = (\lambda(V)b)$, $g \in Q_L$ и g не сохраняет предикат ρ_y. Тогда существует такая функция $s \in m(T_L^{(1)})$, что f разлагается по суперпозиции $s(g)$ на компоненты из Q_L меньшего веса.*

Лемма 7. *Если $g \leqslant f$ и функция f не сохраняет предикат ρ_y, то функция g также не сохраняет предикат ρ_y.*

6. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Если система F содержится в некотором классе семейства Ω_L, то по лемме 1 система $F \cup m(T_L^{(1)})$ также содержится в Ω_L и по лемме 2 не является полной для реализации функций из Q_L.

Достаточность. Пусть система F монотонных функций, содержащая все одноместные минимальные точечные функции, не содержится целиком ни в одном из классов семейства Ω_L. Покажем, каким образом произвольная квазимонотонная функция f может быть реализована суперпозицией функций из $F \cup m(T_L^{(1)})$. Рассмотрим возможные случаи.

1. Если V_f не является существенным подмножеством L, т. е. $\inf\ V_f \neq \varnothing$, то f реализуется любой константой $c \leqslant \inf\ V_f$. Любая такая минимальная константа принадлежит множеству $m(T_L^{(1)})$.

2. Если V_f слабо существенное и $|f^{-1}(b)| = 1$ для любого элемента $b \in E(V_f)$, то f реализуется функцией из $m(T_L^{(1)})$ по лемме 4.

3. Если V_f сильно существенное или является слабо существенным подмножеством, содержащим такой элемент $b \in E(V_f)$, что $|f^{-1}(b)| > 1$, то, будучи по лемме 3 особым, множество V_f принадлежит $S(L)$ или $W(L)$ соответственно. Так как F не содержится ни в одном из классов в Ω_L, то для каждого $y \in H_L$, в том числе для $y = \lambda(V_f)$ и для $y = \lambda(V_f)b$, в F есть функция g, не сохраняющая предикат ρ_y. Таким образом, функция f удовлетворяет условиям лемм 5 или 6 соответственно и может

быть разложена на компоненты меньшего веса по функции $s(g)$ для некоторого $s \in m(T_L^{(1)})$. Для компонент этого разложения можно повторить все действия, предпринятые для функции f, и в конце концов ввиду конечности веса функции получить суперпозицию функций из $F \cup m(T_L^{(1)})$, реализующую f. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. По лемме 2 для каждого $y \in H_L$ существует квазимонотонная функция, не сохраняющая предикат ρ_y. Возьмем любую ее монотонную реализацию g_y. По лемме 7 функция g_y также не сохраняет предикат ρ_y и потому не принадлежит классу $Q_L(y)$. Тем самым множество выбранных таким образом монотонных функций g_y, $y \in H_L$, не содержится целиком ни в одном из замкнутых классов семейства Ω_L. Его объединение с множеством $m(T_L^{(1)})$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и является полной системой для реализации функций из Q_L. Ввиду конечности множеств H_L и $m(T_L^{(1)})$ эта система конечная. Теорема 2 доказана.

7. Доказательство лемм

Приведем формулировку теста квазимонотонности из [1, 2] и с его помощью установим ряд вспомогательных предложений.

Тест квазимонотонности. *Функция $f\colon L^n \to L$ квазимонотонна тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subseteq L^n$, имеющего нижнюю грань в L^n, подмножество $f(A) \subseteq L$ имеет нижнюю грань в L.*

Существование нижней грани для подмножества в верхней полурешетке равносильно существованию для него точной нижней грани. Поэтому в формулировке теста вместо «нижняя грань» можно читать «точная нижняя грань». В дальнейшем мы пользуемся этой возможностью без дополнительных оговорок.

Предложение 1. *Для любой квазимонотонной функции f множество V_f особое.*

Доказательство. Пусть $b = \sup\ D_f$ и $a = f(b)$. Тогда $\inf\{b, d\} = d \neq \varnothing$ для любого $d \in D_f$ и по тесту квазимонотонности ввиду $f(D_f) = V_f$ имеем $\inf\{a, v\} \neq \varnothing$ для любого $v \in V_f$. Предложение 1 доказано.

Предикат $\rho\colon L^n \to \{0, 1\}$ называется *монотонным*, если из $a \leqslant b$ в L^n следует $\rho(a) \leqslant \rho(b)$ в $\{0, 1\}$.

Предложение 2. *Пусть f и g — функции из P_L, $g \leqslant f$, и $\rho\colon L^n \to \{0, 1\}$ — монотонный предикат. Тогда если g сохраняет ρ, то f сохраняет ρ.*

Доказательство. Пусть m — местность функций f и g, $d_1, \ldots,$ d_m — произвольные наборы из L^n, на которых $\rho = 1$. Тогда поскольку

g сохраняет ρ, то $\rho(g(d_1[1], \dots, d_m[1]), \dots, g(d_1[n], \dots, d_m[n])) = 1$, и так как $g \leqslant f$, то в силу монотонности ρ имеем $\rho(f(d_1[1], \dots, d_m[1]), \dots, f(d_1[n], \dots, d_m[n])) = 1$. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Пусть $x, y \in L^n$, $x \leqslant y$. Тогда $U(x) \supseteq U(y)$.*

Доказательство. Пусть $u \in U(y)$. Тогда $\inf\ y[u] = \varnothing$. Так как $x \leqslant y$, то $x[i] \leqslant y[i]$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поэтому $\inf\ x[u] = \varnothing$ и $u \in U(x)$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Для любого y из L^n предикат ρ_y монотонный.*

Доказательство. Пусть $\rho_y(a) = 1$. Тогда $U(y) \supset U(a)$. Если $b \geqslant a$, то по предложению 3 имеем $U(a) \supseteq U(b)$. В этом случае $U(y) \supset U(b)$ и $\rho_y(b) = 1$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Классы из множества Ω_L замкнуты по реализации.*

Доказательство. Так как $Q_L(y) = [Q_L(y)]$ и по предложению 4 предикат ρ_y монотонный, то ввиду предложения 2 имеем $Q_L(y) = [Q_L(y)]_r$. Предложение 5 доказано.

Для произвольного элемента $y \in L^n$ пусть

$$U_0(y) = \{u \in U(y) \mid \forall z \subset u (z \notin U(y))\}.$$

Это есть множество всех минимальных по включению подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$, входящих в $U(y)$ в качестве элементов.

Предложение 6. *Пусть $y \in L^n$ и $u \in U(y)$. Тогда в $U_0(y)$ существует подмножество $z \subseteq u$.*

Доказательство. Пусть $U = \{v \subseteq u \mid v \in U(y)\}$ — множество всех подмножеств множества u, принадлежащих $U(y)$. Так как $u \in U(y)$ и $u \subseteq u$, то $U \neq \varnothing$. Пусть z — элемент из U минимальной мощности. Тогда $z' \notin U(y)$ для любого $z' \subset z$ и $z \in U_0(y)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. *Пусть $y \in L^n$ и $z \subseteq u \subseteq \{1, \dots, n\}$. Тогда $(z \in U(y)) \Rightarrow (u \in U(y))$.*

Доказательство. Так как $z \subseteq u$, то $y[z] \subseteq y[u]$. Поэтому $(z \in U(y)) \Rightarrow (\inf\ y[z] = \varnothing$ и $z \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ y[u] = \varnothing$ и $u \neq \varnothing) \Rightarrow (u \in U(y))$. Предложение 7 доказано.

Следствие 1. *Пусть $y \in L^n$ и $z \subseteq u \subseteq \{1, \dots, n\}$. Тогда $(u \notin U(y)) \Rightarrow (z \notin U(y))$.*

Предложение 8. *Если для $y \in L^n$ существуют такие $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $u \subseteq \{1, \dots, n\}$, что $i \neq j$, $u \notin U(y)$, $u \cup \{i\} \in U(y)$ и $u \cup \{j\} \in U(y)$, то $|U_0(y)| > 1$.*

Доказательство. По предложению 6 существуют подмножества $x(i) \subseteq u \cup \{i\}$, $x(j) \subseteq u \cup \{j\}$, принадлежащие $U_0(y)$. Если $i \notin x(i)$, то $x(i) \subseteq u$ и по следствию 1 $x(i) \notin U(y)$, а значит, $x(i) \notin U_0(y)$, что невозможно. Следовательно, $i \in x(i)$. Аналогично показывается, что $j \in x(j)$. Так как $i \neq j$, то $x(i) \neq x(j)$ и $|U_0(y)| > 1$. Предложение 8 доказано.

Следствие 2. *Если множество $V \subseteq L$ сильно существенное, то $|U_0(\lambda(V))| > 1$.*

Доказательство. Пусть $|V| = m$. Из определения сильно существенного множества следует, что в V имеются A, a и b, $a \neq b$, такие, что $\inf\ A \neq \inf(\{a\} \cup A\ ) = \inf(\{b\} \cup A) = \varnothing)$. Так как $\lambda(V)$ — набор всех элементов из V, взятых по одному разу, то существуют $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ и $u \subseteq \{1, \ldots, m\}$ такие, что $\lambda(V)[u] = A$, $\lambda(V)[i] = a$ и $\lambda(V)[j] = b$, где $i \neq j$ ввиду $a \neq b$. Так как $\inf\ A \neq \inf(\{a\} \cup A) = \inf(\{b\} \cup A) = \varnothing$, то $u \notin U(\lambda(V))$, $u \cup \{i\} \in U(\lambda(V))$ и $u \cup \{j\} \in U(\lambda(V))$. Теперь по предложению 8 получаем $|U_0(\lambda(V))| > 1$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть множество $V \subseteq L$ слабо существенное и b — существенный элемент из V. Тогда $|U_0(\lambda(V)b)| > 1$.*

Доказательство. Пусть $|V|+1 = m$. Ввиду существенности $b \in V$ имеется $A \subseteq V$ такое, что $\inf\ A \neq \inf(\{b\} \cup A) = \varnothing$. Так как в наборе $\lambda(V)$ присутствуют все элементы из V, то существует такое подмножество $u \subseteq \{1, \ldots, m\}$, что $(\lambda(V)b)[u] = A$. Так как в наборе $(\lambda(V)b)$ элемент b присутствует дважды, то имеются элементы $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, такие, что $(\lambda(V)b)[i] = (\lambda(V)b)[j] = b$. Так как $\inf\ A \neq \inf(\{b\} \cup A) = \varnothing$, то $u \notin U(\lambda(V)b)$, $u \cup \{i\} \in U(\lambda(V)b)$ и $u \cup \{j\} \in U(\lambda(V)b)$. По предложению 8 получаем $|U_0(\lambda(V)b)| > 1$. Следствие 3 доказано.

Следствие 4. *Если $y \in H_L$, то $|U_0(y)| > 1$.*

Это утверждение вытекает из следствий 2 и 3 по определению H_L.

Для произвольного элемента $y \in L^n$ определим множество

$$B(y) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid (z \notin U(y)) \Rightarrow (z \cup \{i\} \notin U(y) \text{ при любом } z \subseteq \{1, \ldots, n\})\}.$$

В $B(y)$ указана (своим номером) всякая такая и только такая компонента вектора y, которую можно присоединить к любому подмножеству компонент в y, имеющему нижнюю грань в L, без нарушения его последнего свойства.

Предложение 9. *Пусть $y \in L^n$ и $u \in U_0(y)$. Тогда $i \notin B(y)$ при любом $i \in u$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i \in u$ верно $i \in B(y)$. Поскольку $(u - \{i\}) \notin U(y)$ при $u \in U_0(y)$, то $u \notin U(y)$. Так как $U_0(y) \subseteq U(y)$, то $u \notin U_0(y)$, что противоречит условию. Предложение 9 доказано.

Следствие 5. *Пусть $y \in L^n$ и $u \in U_0(y)$. Тогда $y[i] \neq \sup\ L$ для любого $i \in u$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i \in u$ верно $y[i] = \sup\ L$. Рассмотрим $z \subseteq \{1, \ldots, n\}$ такое, что $z \notin U(y)$. Тогда $\inf\ y[z] \neq \varnothing$ и ввиду $y[i] = \sup\ L$ верно $\inf\ y[z \cup \{i\}] = \inf\ y[z] \neq \varnothing$. Таким образом, $\inf\ y[z \cup \{i\}] \neq \varnothing$. Поэтому $i \in B(y)$, что противоречит предложению 9. Следствие 5 доказано.

Предложение 10. *Пусть $y \in L^n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ и i не принадлежит ни одному из множеств $u \in U_0(y)$. Тогда $i \in B(y)$.*

Доказательство. Допустим, что $i \notin B(y)$. Тогда существует $u \subseteq \{1, \ldots,\ n\}$ такое, что $u \notin U(y)$ и $u \cup \{i\} \in U(y)$. По предложению 6 имеется подмножество $z \subseteq u \cup \{i\}$, принадлежащее $U_0(y)$. Случай $i \in z$ невозможен по условию. Если же $i \notin z$, то $z \subseteq u$, и по следствию 1 $z \notin U(y)$, а значит, $z \notin U_0(y)$. Предложение 10 доказано.

Предложение 11. *Пусть $y \in L^n$, $u \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и $u \notin U(y)$. Тогда $u \cup B(y) \notin U(y)$.*

Доказательство. Случай $B(y) = \varnothing$ тривиален. Пусть $B(y) = \{b_1, \ldots, b_m\} \neq \varnothing$. По определению $B(y)$ имеем $u \cup \{b_1\} \notin U(y)$. Если $m = 1$, то предложение доказано. Пусть $m > 1$ и для $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ верно $u \cup \{b_1, \ldots, b_i\} \notin U(y)$. Тогда по определению $B(y)$ имеем $u \cup \{b_1, \ldots, b_{i+1}\} \notin U(y)$. Предложение 11 доказано.

Предложение 12. *Пусть $x, y \in L^n$ и $U_0(x) \subseteq U_0(y)$. Тогда $U(x) \subseteq U(y)$.*

Доказательство. Пусть $u \in U(x)$. Тогда по предложению 6 существует $z \subseteq u$ такое, что $z \in U_0(x)$. Поскольку $U_0(x) \subseteq U_0(y)$, то $z \in U_0(y)$. Так как $U_0(y) \subseteq U(y)$, то $z \in U(y)$ и по предложению 7 $u \in U(y)$. Предложение 12 доказано.

Предложение 13. *Пусть $x, y \in L^n$ и $U_0(x) \subset U_0(y)$. Тогда $U(x) \subset U(y)$.*

Доказательство. Из $U_0(x) \subset U_0(y)$ следует существование такого множества $u \in U_0(y)$, что $u \notin U_0(x)$. Так как $U_0(y) \subseteq U(y)$, то $u \in U(y)$. Покажем, что $u \notin U(x)$. Предположим, что $u \in U(x)$. Тогда по предложению 6 существует $z \subseteq u$ такое, что $z \in U_0(x)$. Так как $u \notin U_0(x)$, то $z \subset u$, а так как $U_0(x) \subset U_0(y)$ и $z \in U_0(x)$, то $z \in U_0(y)$.

Однако из $u \in U_0(y)$ и $z \subset u$ следует, что $z \notin U_0(y)$. Противоречие. Следовательно, $u \notin U(x)$. В силу предложения 12 имеем $U(x) \subseteq U(y)$. Следовательно, $U(x) \subset U(y)$. Предложение 13 доказано.

Предложение 14. *Пусть $y \in L^n$ и $|U_0(y)| > 1$. Тогда существует квазимонотонная функция, не сохраняющая предикат ρ_y.*

Доказательство. Пусть $U_0(y) = \{t_1, \dots, t_m\}$ и $m > 1$. Зафиксируем указанную нумерацию элементов в $U_0(y)$. Построим следующие векторы $a_1, \dots, a_m$ из L^n: для произвольных $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$a_i[j] = \begin{cases} y[j], & \text{если } j \in t_i \text{ или } j \notin t_1 \cup \dots \cup t_m; \\ \sup\ L & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Каждому числу $j \in \{1, \dots, n\}$ поставим в соответствие число $i(j) \in \{1, \dots, m\}$ по следующему правилу: если $j \in t_1 \cup \dots \cup t_m$, то в качестве $i(j)$ возьмем некоторое такое $i \in \{1, \dots, m\}$, что $j \in t_i$; в противном случае $i(j)$ есть любое число из $\{1, \dots, m\}$. Тогда в соответствии с (1) будем иметь $a_{i(j)}[j] = y[j]$.

Пусть $b, c \in \{1, \dots, n\}$ и $y[b] \neq y[c]$. Тогда $y[b] \neq \sup\ L$ или $y[c] \neq \sup\ L$. Если $y[b] \neq \sup\ L$, то $a_{i(b)}[b] = y[b] \neq \sup\ L$; а так как $y[b] \neq y[c]$ и виду (1) $a_{i(b)}[c] \in \{y[c], \sup\ L\}$, то $a_{i(b)}[b] \neq a_{i(b)}[c]$. Аналогично показывается, что если $y[c] \neq \sup\ L$, то $a_{i(c)}[b] \neq a_{i(c)}[c]$. Таким образом, $a_{i(b)}[b] \neq a_{i(b)}[c]$ или $a_{i(c)}[b] \neq a_{i(c)}[c]$. Это означает, что $(a_1[b], \dots, a_m[b]) \neq (a_1[c], \dots, a_m[c])$. Следовательно, $(y[b] \neq y[c]) \Rightarrow (a_1[b], \dots, a_m[b]) \neq (a_1[c], \dots, a_m[c])$ при любых $b, c \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому можно построить такую функцию $f\colon L^m \to L$, что для произвольного $d \in L^m$

$$f(d) = \begin{cases} y[j], & \text{если } d = (a_1[j], \dots, a_m[j]) \text{ при некотором } j \in \{1, \dots, n\}, \\ \sup\ L & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Покажем, что функция f квазимонотонная. Пусть $D \subseteq D_f$, $\inf\ f(D) = \varnothing$ и $A = D \cap \{(a_1[i], \dots, a_m[i]) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. В соответствии с (2) $f(d) = \sup\ L$ для любого $d \in (D - A)$. Следовательно, $A \neq \varnothing$, $\inf\ f(D) = \inf\{\sup\ L, \inf\ f(A)\} = \inf\ f(A)$ и $\inf\ f(A) = \varnothing$. Пусть $a = \{j \in \{1, \dots, n\} \mid (a_1[j], \dots, a_m[j]) \in A\}$. Так как $\inf\ f(A) = \varnothing$ и $f(A) = \{f(d) \mid d \in A\} = \{(f(a_1[j], \dots, a_m[j]) \mid j \in a\} = \{y[j] \mid j \in a\} = y[a]$, то $\inf\ y[a] = \varnothing$ и $a \in U(y)$. По предложению 6 существует такое $i \in \{1, \dots, m\}$, что $t_i \subseteq a$. Так как $t_i \in U_0(y)$ и $y[t_i] = a_i[t_i]$ согласно (1), то $t_i \in U_0(a_i)$ и, следовательно, $t_i \in U(a_i)$. Тогда по предложению 7 $a \in U(a_i)$ и $\inf\ a_i[a] = \varnothing$, откуда в силу $\{d[i] \mid d \in A\} = a_i[a]$ следует $\inf\ A = \inf\{d[i] \mid d \in A\} = \varnothing$. Так как $A \subseteq D$, то $\inf\ D = \varnothing$, и по тесту квазимонотонности функция f квазимонотонная.

Покажем, что функция f не сохраняет предикат ρ_y. Пусть $i \in \{1,\ldots,m\}$. Так как $t_i \in U_0(a_i)$, то $|U_0(a_i)| \geqslant 1$. Предположим, что $|U_0(a_i)| > 1$. Тогда существует $t \in U_0(a_i)$ такое, что $t \neq t_i$. По следствию 5 $a_i[j] \neq \sup\ L$ при любом $j \in t$. Поэтому в соответствии с (1) $j \in t_i$ или $j \notin t_1 \cup \cdots \cup t_m$ при любом $j \in t$, а так как по предложению 10 $\{j \in \{1,\ldots,n\} \mid j \notin t_1 \cup \cdots \cup t_m\} \subseteq B(y)$, то $t \subseteq t_i \cup B(y)$. Из $t \in U_0(a_i)$ следует, что $t_i \not\subset t$, и поскольку $t \neq t_i$, то $l \notin t$ при некотором $l \in t_i$. Следовательно, $t \subseteq (t_i - \{l\}) \cup B(y)$. Так как $t_i \in U_0(y)$, то $(t_i - \{l\}) \notin U(y)$ и по предложению 11 $(t_i - \{l\}) \cup B(y) \notin U(y)$. Поэтому по следствию 1 $t \notin U(y)$. Согласно (1) $a_i \geqslant y$ и по предложению 3 $t \notin U(a_i)$. Противоречие. Значит, предположение о том, что $|U_0(a_i)| > 1$, неверно. Следовательно, $|U_0(a_i)| = 1$ и $U_0(a_i) = \{t_i\} \subset U_0(y)$. Отсюда по предложению 13 получаем $U(a_i) \subset U(y)$. Последнее означает, что $\rho_y(a_i) = 1$. Это верно при любом $i = 1,\ldots,m$. Согласно (2) $(f(a_1[1],\ldots,a_m[1]),\ldots,f(a_1[n],\ldots,a_m[n])) = y$ и по определению предиката ρ_y получаем $\rho_y(f(a_1[1],\ldots,a_m[1]),\ldots,f(a_1[n],\ldots,a_m[n])) = \rho_y(y) = 0$. Таким образом, функция f действительно не сохраняет предикат ρ_y. Предложение 14 доказано.

Из следствия 4 получаем

Следствие 6. *Для любого $y \in H_L$ существует квазимонотонная функция, не сохраняющая предикат ρ_y.*

Следствие 7. *Каждый класс в семействе Ω_L не является полной по реализации системой для Q_L.*

Доказательство. Пусть $F \in \Omega_L$. Тогда по определению Ω_L существует $y \in H_L$ такое, что F состоит из всех функций множества Q_L, сохраняющих предикат ρ_y, и по следствию 1 в Q_L есть функция, не принадлежащая F. Следовательно, $F \neq Q_L$. Кроме того, по предложению 5 $F = [F]_r$. Следовательно, $[F]_r \neq Q_L$. Следствие 7 доказано.

Для произвольной одноместной функции $s \in P_L$ и произвольного набора $x = x_1x_2\ldots x_n \in L^n$ положим по определению $sx = s(x_1)s(x_2)\ldots s(x_n) \in L^n$.

Предложение 15. *Пусть $x, y \in L^n$ и $U(x) \supseteq U(y)$. Тогда существует $s \in m(T_L^{(1)})$ такое, что $sx \leqslant y$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x[i] \mid i \in \{1,\ldots,n\}\}$. Построим одноместную функцию $p \in P_L$ такую, что для произвольного элемента $a \in L$

$$p(a) = \begin{cases} \inf\{y[i] \mid i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ (x[i] = a)\}, & \text{если } a \in X; \\ \sup\ L & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем квазимонотонность функции p. Для этого, следуя тесту квазимонотонности, возьмем произвольное подмножество $A \subseteq L$ такое,

что $\inf\ A \neq \varnothing$, и покажем, что $\inf\ p(A) \neq \varnothing$. Рассмотрим возможные случаи. Если $A \cap X = \varnothing$, то согласно (3) $\inf\ p(A) = \sup\ L \neq \varnothing$. Пусть теперь $A \subseteq X$. Положим $u = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid x[i] \in A\}$. Тогда ввиду (3)

$$\begin{aligned}\inf\ p(A) &= \inf\{p(a) \mid a \in A\}\\ &= \inf\{\inf\{y[i] \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ и } x[i] = a\} \mid a \in A\}\\ &= \inf\{y[i] \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ и } x[i] \in A\}\\ &= \inf\{y[i] \mid i \in u\} = \inf\ y[u].\end{aligned}$$

Кроме того, если $\inf\ A \neq \varnothing$, то $\inf\ x[u] \neq \varnothing$. Следовательно, $u \notin U(x)$, откуда в силу включения $U(x) \supseteq U(y)$ следует, что $u \notin U(y)$. Это означает, что $\inf\ y[u] \neq \varnothing$ и, таким образом, $\inf\ p(A) \neq \varnothing$. Наконец, пусть $A \cap X \neq \varnothing$. В этом случае $\inf\ p(A) = \inf\ p(A \cap X)$. Так как $A \cap X \subseteq A$ и $\inf\ A \neq \varnothing$, то $\inf\ (A \cap X) \neq \varnothing$. Так как $A \cap X \subseteq X$, то по предыдущему случаю $\inf\ p(A \cap X) \neq \varnothing$ и, следовательно, $\inf\ p(A) \neq \varnothing$. Таким образом, $(\inf\ A \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ p(A) \neq \varnothing)$ при любом $A \subseteq L$ и по тесту квазимонотонности функция p квазимонотонная. Пусть s — любая одноместная минимальная точечная функция, реализующая функцию p. Тогда $sx \leqslant px$. Пусть $j \in \{1, \dots, n\}$. Так как $y[j] \in \{y[i] \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ и } x[i] = x[j]\}$, то $p(x[j]) = \inf\{y[i] \mid i \in \{1, \dots, n\} \text{ и } x[i] = x[j]\} \leqslant y[j]$. Следовательно, $px \leqslant y$ и $sx \leqslant y$. Предложение 15 доказано.

Следствие 8. *Пусть f, g — квазимонотонные функции такие, что $D_f = D_g$ и $(\inf f(A) \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ g(A) \neq \varnothing)$ при любом $A \subseteq D_f$. Тогда существует $s \in m(T_L^{(1)})$ такое, что $s(f) \leqslant g$.*

Доказательство. Пусть x и y обозначают векторы значений функции f и g соответственно. Тогда $(s(f) \leqslant g) \Leftrightarrow (sx \leqslant y)$. Кроме того, в условиях следствия ввиду теста квазимонотонности справедливо включение $U(x) \supseteq U(y)$, которое по предложению 15 влечет существование $s \in m(T_L^{(1)})$ со свойством $sx \leqslant y$. Следствие 8 доказано.

Предложение 16. *Пусть $A \subseteq V \subseteq L$ и подмножество $A \cap E(V) \subseteq V$ имеет точную нижнюю грань в L. Тогда A имеет точную нижнюю грань в L.*

Доказательство. Пусть $A - E(V) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Элементы множества $A - E(V)$ несущественные, поэтому справедлива цепочка импликаций $(\inf(A \cap E(V)) \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf((A \cap E(V)) \cup \{a_1\}) \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf((A \cap E(V)) \cup \{a_1, a_2\}) \neq \varnothing) \Rightarrow \dots \Rightarrow (\inf((A \cap E(V)) \cup \{a_1, \dots, a_n\}) = \inf\ A \neq \varnothing)$. Предложение 16 доказано.

Следствие 9. *Пусть $V \subseteq L$. Тогда отсутствие в L точной нижней грани для подмножества $A \subseteq V$ влечет отсутствие в L точной нижней грани для множества $A \cap E(V)$.*

Следствие 10. *Элемент v в V существенный тогда и только тогда, когда существует такое подмножество $A \subseteq E(V)$, что* $(\inf A \neq \varnothing)$ & $(\inf(A \cup \{v\}) = \varnothing)$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость. Пусть $v \in V$ существенный элемент. Тогда по определению существенного элемента существует такое подмножество $A' \subseteq V$, что $\inf\ A' \neq \varnothing$ и $\inf(A' \cup \{v\}) = \varnothing$. Пусть $A = A' \cap E(V)$. Тогда $A \subseteq E(V)$. Так как $v \in E(V)$, то $(A' \cup \{v\}) \cap E(V) = (A' \cap E(V)) \cup \{v\} = A \cup \{v\}$. Поэтому ввиду $\inf\ (A' \cup \{v\}) = \varnothing$ по следствию 9 получаем $\inf\ (A \cup \{v\}) = \varnothing$. Наконец, из $A \subseteq A'$ и $\inf\ A' \neq \varnothing$ вытекает, что $\inf\ A \neq \varnothing$. Следствие 10 доказано.

Следствие 11. *Для любого существенного подмножества $V \subseteq L$ множество $E(V)$ не имеет точной нижней грани в L.*

Доказательство. Если $E(V)$ имеет точную нижнюю грань в L, то по предложению 16 множество V также имеет точную нижнюю грань в L, что противоречит существенности V. Следствие 11 доказано.

Предложение 17. *Пусть v — произвольный существенный элемент слабо существенного подмножества $V \subseteq L$. Тогда множество $V - \{v\}$ имеет точную нижнюю грань в L.*

Доказательство. Сначала покажем, что множество $E(V) - \{v\}$ имеет точную нижнюю грань в L. Из существенности элемента v по следствию 10 следует существование такого подмножества $A \subseteq E(V)$, что

$$\inf\ A \neq \inf(A \cup \{v\}) = \varnothing. \tag{4}$$

Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\} = E(V) - A - \{v\}$. Тогда $E(V) - \{v\} = A \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$. Из слабой существенности множества V в силу (4) следует, что $\inf(A \cup \{v_1\}) \neq \varnothing$. Поэтому если $n = 1$, то множество $E(V) - \{v\}$ имеет точную нижнюю грань в L. Пусть $n > 1$ и $i \in \{2, \ldots, n\}$. Предположим, что множество $A \cup \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ имеет точную нижнюю грань в L, а множество $A \cup \{v_1, \ldots, v_i\}$ таковой не имеет. Тогда в силу (4) $\inf(A \cup \{v_1, \ldots, v_{i-1}\} \cup \{v\}) = \varnothing$ и получаем сильную существенность множества V, что противоречит условию. Следовательно, из существования точной нижней грани в L для множества $A \cup \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ следует существование точной нижней грани в L для множества $A \cup \{v_1, \ldots, v_i\}$. Применяя индукцию по i, приходим к утверждению, что множество $A \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$ и равное ему множество $E(V) - \{v\}$ имеют точную нижнюю грань в L. Поскольку $v \in E(V)$ и $E(V) - \{v\} = (V - \{v\}) \cap E(V)$, то по предложению 16 множество $V - \{v\}$ имеет точную нижнюю грань в L. Предложение 17 доказано.

Предложение 18. *Пусть V — слабо существенное подмножество множества L. Тогда подмножество $A \subseteq V$ не имеет точной нижней грани в L тогда и только тогда, когда множество $E(V)$ целиком содержится в множестве A.*

Доказательство. Необходимость. Пусть подмножество $A \subseteq V$ не имеет точной нижней грани в L. Предположим, что множество $E(V)$ не содержится целиком в множестве A. Тогда в $V - A$ существует существенный элемент v. По предложению 17 множество $V - \{v\}$ имеет точную нижнюю грань в L, а так как $A \subseteq V - \{v\}$, то множество A также имеет точную нижнюю грань в L. Противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. По следствию 11 множество $E(V)$ не имеет точной нижней грани в L. Если множество $E(V)$ целиком содержится в подмножестве $A \subseteq V$, то A также не имеет точной нижней грани в L. Предложение 18 доказано.

Введем следующее обозначение: для любого $A \subseteq L^n$ и любого $j \in \{1, \dots, n\}$ положим $A[j] = \{a[j] \mid a \in A\}$.

Предложение 19. *Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — квазимонотонная функция, множество V_f — слабо существенное и $|f^{-1}(b)| = 1$ для каждого элемента $b \in E(V_f)$. Тогда существуют функция $s \in m(T_L^{(1)})$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $s(x_j) \leqslant f(x_1, \dots, x_n)$.*

Доказательство. Пусть $D = \{d \in D_f \mid f(d) \in E(V_f)\}$. По следствию 11 множество $E(V_f)$ не имеет точной нижней грани в полурешетке L. Поэтому ввиду квазимонотонности функции f по тесту квазимонотонности множество D не имеет точной нижней грани в полурешетке D_f. Это означает существование такого $j \in \{1, \dots, n\}$, что $\inf\ D[j] = \varnothing$. Пусть для некоторого подмножества $A \subseteq D_f$ верно $\inf\ f(A) = \varnothing$. Так как $f(A) \subseteq V_f$ и множество V_f слабо существенное, то по предложению 18 $f(A) \supseteq E(V_f)$, а так как $|f^{-1}(b)| = 1$ для каждого элемента $b \in E(V_f)$, то справедливо включение $D \subseteq A$, из которого ввиду $\inf\ D[j] = \varnothing$ следует, что $\inf\ A[j] = \varnothing$. Тем самым для каждого $A \subseteq D_f$ доказано, что $(\inf\ f(A) = \varnothing) \Rightarrow (\inf\ A[j] = \varnothing)$, или, что то же самое, $(\inf\ A[j] \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ f(A) \neq \varnothing)$ для любого $A \subseteq D_f$. Для аргумента x_j, рассматриваемого как функция $x_j \colon D_f \to L$, принимающая его значения и являющаяся минимальной точечной, справедливо равенство $x_j[A] = A[j]$. Поэтому $(\inf\ x_j[A] \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ f(A) \neq \varnothing)$ при любом $A \subseteq D_f$ и по следствию 8 существует такая функция $s \in m(T_L^{(1)})$, что $s(x_j) \leqslant f(x_1, \dots, x_n)$. Предложение 19 доказано.

Предложение 20. *Пусть $f, g \in P_L, D_g = D_f$, $(\inf\ f(A) \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ g(A) \neq \varnothing)$ для каждого $A \subseteq D_f$ и функция f квазимонотонная.*

Тогда функция g квазимонотонная.

Доказательство. Пусть $A \subseteq D_f$ и $\inf A \neq \varnothing$. Тогда по тесту квазимонотонности f имеем $\inf f(A) \neq \varnothing$, откуда по условию $\inf g(A) \neq \varnothing$ и по тесту квазимонотонности функция g квазимонотонная.

Предложение 21. *Пусть f и g — квазимонотонные функции и g не сохраняет предикат ρ_y, где y удовлетворяет любому из условий:*

1) $y = \lambda(V_f)$;

2) $y = (\lambda(V_f)b)$ для некоторого $b \in V_f$ такого, что $|f^{-1}(b)| > 1$.

Тогда существует такая функция $s \in m(T_L^{(1)})$, что f разлагается по функции $s(g)$ на квазимонотонные компоненты меньшего веса.

Доказательство. Пусть m — местность функции g и n — местность предиката ρ_y. Если выполнено условие 1, то $n = |V_f|$, и поскольку в наборе $y = \lambda(V_f)$ перечислены по одному разу все элементы множества V_f, то для любого набора $d \in D_f$ существует (причем единственный) элемент $j(d) \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $f(d) = y[j(d)]$. Если же выполнено условие 2, то $n = |V_f| + 1$. Пусть в этом случае $a \in f^{-1}(b)$. Тогда ввиду $|f^{-1}(b)| > 1$ имеем $f(D_f - \{a\}) = V_f$. Так как в наборе $y[1] \dots y[n-1] = \lambda(V_f)$ перечислены по одному разу все элементы множества V_f, то для каждого $d \in D_f - \{a\}$ существует единственный элемент $j(d) \in \{1, \dots, n-1\}$ такой, что $f(d) = y[j(d)]$. Положив $j(a) = n$, получаем, как и в первом случае, что $f(d) = y[j(d)]$ для любого $d \in D_f$. Дальнейшие построения являются общими для обоих случаев.

Так как функция g не сохраняет предикат ρ_y, то в L^n существуют такие наборы $d_1, \dots, d_m$, что $\rho_y(d_1) = \dots = \rho_y(d_m) = 1$ и $\rho_y(x) = 0$ для

$$x = (g(d_1[1], \dots, d_m[1]), \dots, g(d_1[n], \dots, d_m[n])).$$

Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ определим такую функцию $f_i\colon D_f \to L$, что $f_i(d) = d_i[j(d)]$ для любого $d \in D_f$.

По определению предиката ρ_y ввиду соотношения $\rho_y(d_1) = \dots = \rho_y(d_m) = 1$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$, верно включение $U(y) \supset U(d_i)$, означающее, что $(\inf\ y[u] \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ d_i[u] \neq \varnothing)$ для любого $u \subseteq \{1, \dots, n\}$, т. е. справедливо $(\inf\ y[u] \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\{(d_1[j], \dots, d_m[j]) \mid j \in u\} \neq \varnothing)$ для любого $u \subseteq \{1, \dots, n\}$. По тесту квазимонотонности для g при любом $u \subseteq \{1, \dots, n\}$ можно записать $(\inf\{(d_1[j], \dots, d_m[j]) \mid j \in u\} \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\{g(d_1[j], \dots, d_m[j]) \mid j \in u\} \neq \varnothing)$. Поэтому ввиду равенства $\{g(d_1[j], \dots, d_m[j]) \mid j \in u\} = x[u]$ для любого $u \subseteq \{1, \dots, n\}$ имеем $(\inf\ y[u] \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ x[u] \neq \varnothing)$, или, что то же самое, $U(x) \subseteq U(y)$. Но по определению предиката ρ_y ввиду $\rho_y(x) = 0$ неверно включение $U(x) \subset U(y)$. Поэтому $U(x) = U(y)$ и по предложению 15 существует функция $s \in m(T_L^{(1)})$ такая, что $sx \leqslant y$.

Для указанных функций $s, f_1, \ldots, f_m$ имеем $s(g(f_1, \ldots, f_m)) \leqslant f$, ибо для любого $d \in D_f$ можно записать $g(f_1(d), \ldots, f_m(d)) = g(d_1[j(d)], \ldots, d_m[j(d)]) = x[j(d)]$. Отсюда и из соотношений $sx \leqslant y$ и $y[j(d)] = f(d)$ следует $s(g(f_1(d), \ldots, f_m(d))) \leqslant y[j(d)] \leqslant f(d)$. Остается убедиться в квазимонотонности всех f_i и в том, что их вес меньше f.

Рассмотрим произвольное $i \in \{1, \ldots, m\}$. Пусть $A \subseteq D_f$, $\inf\ f(A) \neq \varnothing$ и $u = j(A) = \{j(d) \mid d \in A\}$. Так как $f(A) = \{f(d) \mid d \in A\} = \{y[j(d)] \mid d \in A\} = \{y[j] \mid j \in j(A)\} = y[u]$, то $u \notin U(y)$, а так как $U(d_i) \subset U(y)$, то $u \notin U(d_i)$. Следовательно, $\inf\ d_i[u] \neq \varnothing$. Аналогично $f_i(A) = \{f_i(d) \mid d \in A\} = \{d_i[j(d)] \mid d \in A\} = \{d_i[j] \mid j \in j(A)\} = \{d_i[j] \mid j \in u\} = d_i[u]$ и $\inf\ f_i(A) \neq \varnothing$. Таким образом, $(\inf\ f(A) \neq \varnothing) \Rightarrow (\inf\ f_i(A) \neq \varnothing)$ при любом $A \subseteq D_f$. Отсюда по предложению 20 следует квазимонотонность функции f_i и, кроме того, $w(f_i) \leqslant w(f)$.

Далее, так как $U(d_i) \subset U(y)$, то $U(y) - U(d_i) \neq \varnothing$. Если $u \in U(y) - U(d_i)$, то $\inf\ d_i[u] \neq \inf\ y[u] = \varnothing$. Поскольку $f(D_f) = V_f$, то для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ найдется набор $d \in D_f$ такой, что $j = j(d)$. Поэтому можно взять такое подмножество $A \subseteq D_f$, что $u = j(A)$. В результате будем иметь $d_i[u] = \{d_i[j] \mid j \in u\} = \{d_i[j(d)] \mid d \in A\} = \{f_i(d) \mid d \in A\} = f_i(A)$, $y[u] = \{y[j] \mid j \in u\} = \{y[j(d)] \mid d \in A\} = \{f(d) \mid d \in A\} = f(A)$ и $\inf\ f_i(A) \neq \inf\ f(A) = \varnothing$. Отсюда и из неравенства $w(f_i) \leqslant w(f)$ следует, что $w(f_i) < w(f)$. Предложение 21 доказано.

Предложение 22. *Если $y \in L^n$ и $f \in Q_L^{(1)}$, то f сохраняет ρ_y.*

Доказательство. Пусть $\rho_y(x) = 1$. Тогда $x \in L^n$ и $U(x) \subset U(y)$. Так как функция f квазимонотонная, то $U(fx) \subseteq U(x)$ и, следовательно, $U(fx) \subset U(y)$, т. е. $\rho_y(fx) = 1$.

Следствие 12. *Каждый класс из Ω_L содержит все одноместные квазимонотонные функции.*

Доказательство лемм. Лемма 1 является следствием 12, лемма 2 — следствием 7, лемма 3 — это предложение 1, лемма 4 справедлива ввиду предложения 19, леммы 5 и 6 содержатся в предложении 21 и лемма 7 следует из предложений 2 и 4. Леммы доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Квазимонотонные функции и их минимизация // Кибернетика. 1989. № 2. С. 111–113.

2. **Агибалов Г. П.** Дискретные автоматы на полурешетках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993.

3. **Агибалов Г. П.** Свойства замыканий некоторых классов функций на полурешетке подмножеств конечного множества // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XI Междунар. конф. (10–14 июня 1996 г.). М.: Издат. центр РГГУ, 1996. С. 4.
4. **Агибалов Г. П.** О полных системах функций на полурешетке подмножеств конечного множества // Всесибирские чтения по математике и механике. Т. 1. Математика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 148–149.
5. **Агибалов Г. П.** О полных системах операций и синтезе схем для квазимонотонных функций на конечных полурешетках // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. С. 149–152.
6. **Агибалов Г. П.** Канонические формы и полные системы квазимонотонных функций на конечных полурешетках // Междунар. Сиб. конф. по исследованию операций: Материалы конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1998. С. 118.
7. **Агибалов Г. П., Парватов Н. Г.** О полноте систем функций на конечных полурешетках // Междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций»: Материалы конф. (Новосибирск, 26 июня – 1 июля 2000 г.). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 66.
8. **Кудрявцев В. Б.** О функциональных системах автоматов // Дискретная математика. 1997. Т. 7, вып. 4. С. 3–28.
9. **Парватов Н. Г.** К синтезу формул, реализующих и представляющих квазимонотонные и монотонные функции на полурешетках подмножеств конечного множества // Вестн. Том. гос. ун-та. 2000. Т. 271. С. 111–115.
10. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

Адрес авторов:

Томский государственный
университет,
пр. Ленина, 36,
634050 Томск, Россия.
E-mail: agibalov@fpmk.tsu.ru

Статья поступила
6 октября 2000 г.