ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2002. Серия 1. Том 9, № 4, 23–32

УДК 519.854

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Представлена модификация алгоритма Сердюкова для решения задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$. В случае графов с вершинами в точках целочисленной решетки указаны условия на диаметр графа, при которых достигаются лучшие оценки точности по сравнению с исходным алгоритмом.

Введение

Задачей коммивояжера называется задача отыскания экстремального по длине гамильтонова цикла в заданном графе. Наиболее полный обзор работ по этой теме можно найти в [3, 4]. Исторически основное внимание уделялось задаче на отыскание минимального по длине гамильтонова цикла, одной из основных NP-трудных задач дискретной оптимизации. Однако в последние 10 лет возрос интерес также к задаче коммивояжера на максимум. В [3] этой задаче посвящена отдельная глава. Как известно, для задачи коммивояжера на максимум (как и для задачи на минимум) в общем виде не существуют алгоритмы полиномиальной сложности со сколь угодно хорошей оценкой точности (в предположении P $\neq$ NP). Поэтому изучение отдельных подклассов этой задачи — важный аспект исследования операций.

Одним из основных исследуемых подклассов этой задачи является задача коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве, т. е. когда вершинам заданного графа поставлены в соответствие точки в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$, а длины дуг между вершинами определяются как евклидовы расстояния между точками, соответствующими этим вершинам.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–01153), INTAS (грант 00–217) и программы «Университеты России» (проект УР.04.01.012).

В [2] описан асимптотически точный алгоритм решения задачи коммивояжера на максимум в k-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$. Трудоемкость этого алгоритма определяется временной сложностью отыскания максимального паросочетания в заданном графе. Решение получается выбором одного из четырех гамильтоновых циклов, каждый из которых содержит все ребра построенного максимального паросочетания.

В [1] представлена модификация этого алгоритма с такими же оценками точности, но более простая в изложении. В отличие от [2] решение в [1] сводится к построению единственного гамильтонова цикла, к тому же не содержащего ребер максимального паросочетания, за исключением, быть может, двух.

Анализ указанных работ показал, что на достаточно широких подклассах задач отказ от использования одного из основных этапов в алгоритмах [1, 2] может привести к улучшению получаемых оценок точности.

Так как относительная точность алгоритма является величиной безразмерной, то масштабирование графа (растяжение соответствующего пространства $\mathbf{R}^k$ на неотрицательную величину) не изменяет оценки точности алгоритмов. Будем полагать, что вершины графа заданы в точках целочисленной решетки и, таким образом, минимальный вес ребра графа равен 1. В этом случае отношение максимального веса ребра графа к минимальному является его геометрическим диаметром (в дальнейшем просто диаметром).

В данной статье показано, что при достаточно слабых ограничениях на диаметр исходного графа отказ от использования одного из основных этапов в алгоритмах [1, 2] может привести к улучшению получаемых оценок точности.

1. Постановка задачи

Задачу коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве можно сформулировать следующим образом.

Пусть в $\mathbf{R}^k$ задан набор точек $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}^k$. Определим вес $W(X,\sigma)$ гамильтонова цикла, порожденного перестановкой $\sigma \in S_n$ и обозначаемого одноименной буквой, как

$$W(X,\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_{\sigma_i}, x_{\sigma_{i+1}}) + \rho(x_{\sigma_n}, x_{\sigma_1}), \tag{1.1}$$

где $\rho(x,y)$ — евклидово расстояние между точками x и y в $\mathbf{R}^k$. Требуется максимизировать $W(X,\sigma)$ по всем перестановкам σ из S_n.

Пусть $\sigma^*(X)$ — точное решение задачи. Обозначим через $A(X)$ решение, получаемое заданным алгоритмом A.

Введем понятие *точности* Δ_A алгоритма A как

$$\Delta_A \stackrel{\text{def}}{=} \max_{X \subset \mathbf{R}^k,\ |X|=n} \frac{W(X,\sigma^*(X)) - W(X, A(X))}{W(X,\sigma^*(X))}. \tag{1.2}$$

Алгоритм A назовем *асимптотически точным*, если

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_A = 0. \tag{1.3}$$

2. Алгоритм Сердюкова

2.1. Краткое описание алгоритма A

Исходным моментом в [2] является построение максимального взвешенного паросочетания M в $\mathbf{R}^k$, которое представляется в виде совокупности $\{I_1,\dots,I_m\}$ прямолинейных отрезков (далее ребер), где $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Из t самых легких по весу ребер паросочетания M образуется подмножество M_2 (число t выбирается специальным образом). Остальные ребра (назовем их тяжелыми) образуют подмножество M_1.

Далее методом склеивания циклов множество тяжелых ребер M_1 за $m-2t-1$ шагов модифицируется в множество $\widetilde{M}_1$. На каждом шаге в текущем (модифицированном) множестве $\widetilde{M}_1$ (сначала $\widetilde{M}_1 = M_1$) выбираются такие t ребер, что в каждом цикле содержится не более одного из них. В выбранной системе ищется пара «почти параллельных» ребер, после чего циклы, содержащие эти ребра, склеиваются в один.

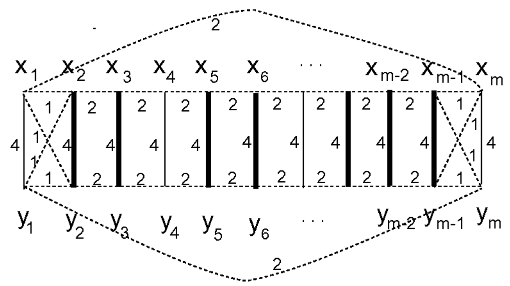

Рис. 2.1. Мультиграф объединения гамильтоновых циклов

После $m-2t-1$ шагов процедуры склейки получаем множество $\widetilde{M}_1$, состоящее из $t-1$ модифицированных циклов, и множество M_2 легких ребер. Эти множества используются для построения мультиграфа $\overline{G}$ (рис. 2.1), включающего в себя все ребра $I_j = (x_j, y_j)$, $j =$

$1, \ldots, m$, паросочетания M (тяжелые ребра изображены жирными линиями, легкие — тонкими), а также дополнительные ребра (изображены пунктиром). Ребра мультиграфа $\overline{G}$ изображены вместе с кратностью их вхождения. Мультиграф $\overline{G}$ покрывается четырьмя гамильтоновыми циклами H_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (по-разному в случае четного и нечетного m). В качестве приближенного решения выбирается гамильтонов обход с наибольшим весом среди H_i, $i = 1, 2, 3, 4$. При этом в каждом обходе содержатся все ребра паросочетания M.

2.2. Известные результаты

Решающим в обосновании асимптотической точности алгоритма A явился факт существования среди достаточно большого числа отрезков в $\mathbf{R}^k$ пары «почти параллельных» отрезков.

Точная трактовка этого факта может быть представлена следующей леммой из [2].

Лемма 1. *Пусть в евклидовом пространстве* $\mathbf{R}^k$ *задано произвольное множество из* t *прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой* $\alpha(k,t)$ *такой, что* $\alpha(k,t) \to 0$ *при* $t \to \infty$. *При этом*

$$\sin^2 \frac{\alpha(k,t)}{2} \leqslant \frac{\gamma_k}{t^{2/(k-1)}}, \tag{2.1}$$

где константа γ_k *зависит лишь от* k.

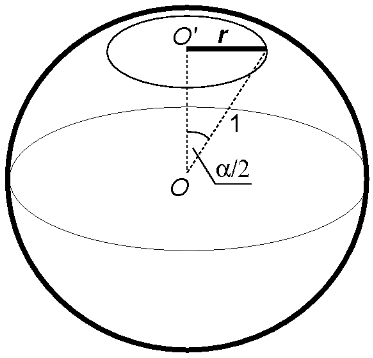

Рис. 2.2. Круг на сфере, задаваемый одним из отрезков

Доказательство. Достаточно предположить, что все отрезки имеют длину 1 и перенесены в пространстве так, что один конец каждого отрезка лежит в начале координат. Тогда в предположении, что любая пара отрезков имеет между собой угол больше $\alpha(k,t)$, получим, что круги с центрами во вторых концах отрезков и радиусами $r = \frac{\alpha(k,t)}{2}$, лежащие на сфере единичного радиуса, не пересекаются (рис. 2.2). Сравнивая суммарную площадь этих кругов с площадью сферы единичного радиуса в $\mathbf{R}^k$, получаем верхнюю оценку для $\alpha(k,t)$. Лемма 1 доказана.

При доказательстве асимптотической точности (при $t = \lceil n^{(k-1)/(k+1)} \rceil$) алгоритма A из [2] определяющими оказались лемма 1 и тот факт, что суммарный вес тяжелых ребер $W(M_1)$ удовлетворяет неравенству

$$W(M_1) \geqslant W(M)(1 - t/m), \tag{2.2}$$

где $W(M)$ — вес максимального взвешенного паросочетания.

В [2] показано, что точность алгоритма A может быть оценена сверху следующим образом:

$$\Delta_A \leqslant \beta_k n^{-\frac{2}{k+1}}, \tag{2.3}$$

где константа β_k определяется только размерностью пространства $\mathbf{R}^k$.

3. Модифицированный алгоритм

3.1. Суть модификации алгоритма и область ее применимости

Одной из основных операций алгоритма A является разбиение максимального паросочетания M на множество легких и тяжелых ребер. Процедура замены пары ребер на пару несмежных ребер, соединяющих их, производится только над множеством M_1. Невозможность распространить эту процедуру на все ребра паросочетания M обусловлена тем, что при уменьшении числа ребер оценки суммарного веса соединяющих ребер в соответствии с результатом леммы 1 уменьшаются. В итоге это приводит к ухудшению эффективности алгоритма. Оказывается, что при наложении некоторых достаточно слабых ограничений на исходный граф данный процесс допускает продолжение на все паросочетание M. Это, в свою очередь, делает ненужными последующие шаги алгоритма A.

В реальных задачах данные представляются числами с фиксированным количеством разрядов. Исходя из соображений масштабируемости задачи предположим, что задаваемые таким образом точки лежат в вершинах целочисленной решетки $\mathbf{Z}^k$.

Обозначим через $\delta_k(X)$ диаметр исходного n-вершинного графа G, построенного на множестве точек X. При этом все вершины графа лежат в шаре с радиусом $\delta_k(X)$, но находятся друг от друга на расстоянии больше 1. Тогда верно неравенство

$$\delta_k(X) \geqslant c_k n^{\frac{1}{k}}, \tag{3.1}$$

где c_k — константа, зависящая только от k.

Далее будет показано, при каких условиях построенная в данной работе модификация $\tilde{A}$ асимптотически точных алгоритмов из [1, 2] обладает лучшими оценками точности.

3.2. Описание алгоритма $\tilde{A}$

Шаг 1. Построим максимальное паросочетание M в заданном графе G.

Назовем *набором* любое множество ребер, образующих цикл в графе G. При этом в наборе выделены *ведущее* и *ведомое* ребра. Каждое ребро из паросочетания M есть набор, в котором это ребро является одновременно ведущим и ведомым и образует цикл длины 2. На дальнейших шагах алгоритма ведущими и ведомыми ребрами рассматриваемых наборов всегда являются ребра из максимального паросочетания M.

При выполнении условий

$$\delta_k(G) < \begin{cases} C_2 n^{\frac{5}{6}} & \text{при } k = 2; \\ C_3 \frac{n^{\frac{5}{6}}}{\log n} & \text{при } k = 3; \\ C_k n^{\frac{1}{k} + \frac{4}{k^2-1}} & \text{при } k > 3 \end{cases} \qquad (3.2)$$

(через C_k обозначена константа, зависящая только от k) выполняются следующие шаги.

Шаг i, $i \in \{2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Среди имеющихся $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2$ наборов выберем два таких, в которых угол между ведущими ребрами минимален.

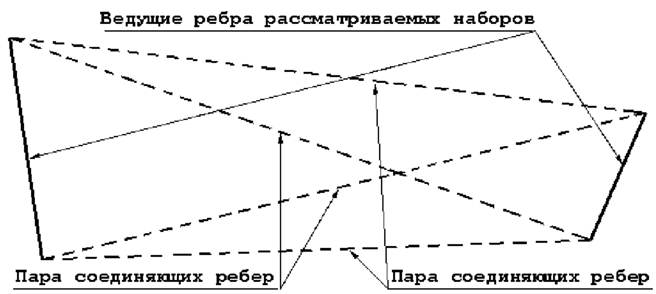

Рис. 3.1. Возможные пары соединяющих ребер

Объединим эти два набора в один, удалив из них ведущие ребра и добавив в получившийся объединенный набор два соединяющих ребра (рис. 3.1), суммарный вес которых максимален. Любое из ведомых ребер объединяемых наборов назначим ведущим в новом наборе.

В случае, когда условия (3.2) не выполняются, гамильтонов цикл находится согласно алгоритму [1].

Получившийся набор является гамильтоновым циклом. Этот цикл и представляет результат работы модифицированного алгоритма $\tilde{A}$.

3.3. Анализ алгоритма $\tilde{A}$

Из описания алгоритма $\tilde{A}$ видно, что в отличие от [2] почти все ребра найденного гамильтонова обхода (кроме ведущего и ведомого ребер оставшегося набора) не принадлежат максимальному паросочетанию M, построенному в начале работы алгоритма.

Перейдем к анализу точности алгоритма $\tilde{A}$. Ниже воспользуемся следующим фактом из [2].

Лемма 2. *Пусть $I_j = (x_j, y_j)$ и $I_l = (x_l, y_l)$ — два отрезка (ребра) в $\mathbf{R}^k$ и $\alpha \leqslant \pi/2$ — угол между ними. Тогда*

$$\begin{aligned}\max\{w(x_j,x_l)+w(y_j,y_l), w(x_j,y_l)+w(y_j,x_l)\}\\ \geqslant \max\Big\{w(I_j), w(I_l), \cos\frac{\alpha}{2}(w(I_j)+w(I_l))\Big\}. \quad (3.3)\end{aligned}$$

Для доказательства условий асимптотической точности алгоритма $\tilde{A}$ потребуются следующие леммы.

Лемма 3. *Вес $W(M)$ максимального паросочетания M удовлетворяет неравенству*

$$W(M) \geqslant \frac{0,5kc_k}{k+1} n^{1+\frac{1}{k}}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть W_n — минимальный возможный вес максимального паросочетания в n-вершинном графе. Рассмотрим граф G_n, на котором этот минимум достигается. Соответствующие максимальные паросочетания обозначим через M_n. Для каждого n строим другое паросочетание $\widetilde{M}_n$ $\widetilde{M}_n$, а на оставшихся $n-2$ вершинах графа было построено максимальное паросочетание. В результате имеем

$$\begin{aligned}W(M) \geqslant W_n \geqslant W(\widetilde{M}_n) \geqslant \delta_k(G_n) + W_{n-2} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_k(G_i)\\ \geqslant \frac{c_k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_k}{2}\int_0^n x^{\frac{1}{k}}\,dx \geqslant \frac{0,5kc_k}{k+1}n^{1+\frac{1}{k}}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *В случае выполнения условий (3.2) вес гамильтонова обхода $\tilde{A}(X)$, полученного алгоритмом $\tilde{A}$, удовлетворяет неравенству*

$$W(X, \tilde{A}(X)) \geqslant 2W(M) - 2\delta_k(G)\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Рассмотрим результаты работы алгоритма $\tilde{A}$ в случае выполнения условий (3.2). Исходя из описания алгоритма и леммы 2 суммарный вес ребер оставшегося набора можно выразить в виде

$$W(X, \tilde{A}(X)) = w(I_k) + w(I_l) + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (w(I_{r_{1i}}) + w(I_{r_{2i}})) \cos \frac{\alpha(k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2)}{2},$$

где $w(I_k)$ и $w(I_l)$ — веса ведущего и ведомого ребер оставшегося набора, $w(I_{r_{1i}})$ и $w(I_{r_{2i}})$ — веса ведущих ребер наборов, объединенных на шаге i алгоритма $\tilde{A}$.

Используя лемму 1, получаем

$$W(X, \tilde{A}(X)) \geqslant w(I_k)+w(I_l)+\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (w(I_{r_{1i}}) + w(I_{r_{2i}})) \cos^2 \frac{\alpha(k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2)}{2}$$

$$\geqslant w(I_k) + w(I_l) + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (w(I_{r_{1i}}) + w(I_{r_{2i}}))\Big(1 - \sin^2 \frac{\alpha(k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2)}{2}\Big)$$

$$\geqslant 2W(M)-2\delta_k(G)\sum_{i=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sin^2 \frac{\alpha(k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - i + 2)}{2} \geqslant 2W(M)-2\delta_k(G)\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}}.$$

Лемма 4 доказана.

Теорема. *Алгоритм $\tilde{A}$ находит асимптотически точное решение задачи отыскания максимального взвешенного гамильтонова обхода n вершин графа, заданных в точках целочисленной решетки евклидовой плоскости. При выполнении условий (3.2) алгоритм $\tilde{A}$ обладает лучшими оценками точности по сравнению с алгоритмами из* [1, 2].

Доказательство. Понятно, что в случае невыполнения ограничения (3.2) характеристики алгоритмов $\tilde{A}$ и A совпадают. Поэтому далее исследуем случай, когда условие (3.2) выполняется.

По определению понятия точности для алгоритма $\tilde{A}$ имеем

$$\Delta_{\widetilde{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{X \subset \mathbf{R}^k,\ |X|=n} \frac{W(X, \sigma^*(X)) - W(X, \widetilde{A}(X))}{W(X, \sigma^*(X))}.$$

Используем очевидную верхнюю оценку точного решения задачи коммивояжера на максимум:

$$W(X, \sigma^*(X)) \leqslant 2W(M(X)),$$

где $W(M(X))$ — вес максимального паросочетания в графе, построенном на множестве вершин X.

Учитывая лемму 3 в условиях выполнения ограничения (3.2), имеем

$$\max_{X\subset\mathbf{R}^k,\ |X|=n} \frac{W(X,\sigma^*(X)) - W(X,\tilde{A}(X))}{W(X,\sigma^*(X))}$$

$$\leqslant \max_{X\subset\mathbf{R}^k,\ |X|=n} \frac{2W(M(X)) - W(X,\tilde{A}(X))}{\frac{0{,}5\,k\,c_k}{k+1} n^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что

$$\Delta_{\tilde{A}} \leqslant \frac{2\delta_k(G)\sum\limits_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}}}{\frac{0{,}5\,k\,c_k}{k+1} n^{1+\frac{1}{k}}}.$$

Для разных значений k применим следующие оценки суммы, стоящей в правой части последнего неравенства.

Если $k = 2$, то

$$\sum_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Если $k = 3$, то

$$\sum_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}} = \sum_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^{-1} \leqslant \int\limits_{1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \frac{1}{x}\,dx = \ln\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

Если $k > 3$, то

$$\sum_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} i^{-\frac{2}{k-1}} \leqslant \int\limits_{1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} x^{\frac{-2}{k-1}}\,dx \leqslant \frac{k-1}{k-3}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)^{\frac{k-3}{k-1}}.$$

Нетрудно видеть, что ограничения (3.2) влекут неравенство $\Delta_{\tilde{A}} < \Delta_A$, гарантирующее асимптотическую точность алгоритма $\tilde{A}$ и лучшие, чем в [2], оценки точности. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей статье проведено исследование возможности модификации алгоритма Сердюкова решения задачи коммивояжера в евклидовом пространстве на максимум с целью улучшения точности алгоритма на определенных подклассах задач.

В результате исследования построен новый алгоритм. Выделен достаточно широкий класс исходных данных, на которых построенный алгоритм дает улучшенные оценки точности по сравнению с известным алгоритмом Сердюкова.

Из сравнения накладываемых ограничений (3.2) и естественного неравенства (3.1) следует, что описанная область входных данных достаточно велика, особенно для евклидовых пространств небольшой размерности. Из приведенных соображений следует важность данного подкласса задач коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гимади Э. Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера на максимум // Труды XII Байкальской междунар. конф. (Иркутск, 24 июня – 1 июля 2001 г.). Т. 1: Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН, 2001. С. 117–124.
2. **Сердюков А. И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
3. **Gutin G., Punnen A. P.** (eds.) The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
4. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G.,Shmoys D. B.** (eds.) The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1985.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Статья поступила
27 августа 2002 г.