

УДК 519.713

О СЛОЖНОСТИ ОДНОМЕРНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

И. И. Захарчук

Рассматриваются одномерные клеточные автоматы, названные ординарными, с минимальными значениями параметров (числом состояний или числом соседних клеток). Приводятся оценки моделирования поведения любых одномерных клеточных автоматов ординарными. Доказывается существование универсального клеточного автомата с двумя состояниями и шестнадцатью соседними клетками, моделирующего универсальную машину Тьюринга.

Клеточный автомат с момента своего возникновения до настоящего времени остается уникальным математическим объектом. Необычность такого объекта заключается в том, что глобальное поведение описывается в терминах локального взаимодействия простейших элементов однородной структуры. В приложениях клеточный автомат выступает и как средство моделирования широкого круга явлений — от физических до социальных, и как алгоритмически универсальная вычислительная модель [3].

В связи с этим универсальность клеточных автоматов можно рассматривать с двух позиций. В первом случае клеточный автомат является универсальным, если он моделирует поведение других клеточных автоматов с заданными параметрами. Другой подход — алгоритмический. Здесь клеточный автомат является универсальным, если он моделирует универсальную машину Тьюринга.

Представляет интерес исследование клеточных автоматов с минимальными значениями параметров.

1. Основные определения

Клеточный автомат \mathcal{K} есть упорядоченное множество из четырех компонент

$$\mathcal{K} = \langle \mathbb{Z}^d, N, A, \varphi \rangle,$$

где \mathbb{Z}^d — множество d -мерных векторов с целочисленными координатами — клеточное пространство; N — конечное множество мощности

m векторов из \mathbb{Z}^d :

$$N = \{n_i \mid n_i = (x_{1i}, \dots, x_{di}), \exists n_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

с нулевым вектором — шаблон соседства клетки; A — конечное множество мощности k состояний клетки с выделенным состоянием покоя \emptyset — алфавит клеточного автомата; φ — локальная функция переходов, определенная в дискретные моменты времени и изменяющая состояние клетки, являющейся нулевым элементом в шаблоне, в зависимости от состояний клеток, составляющих шаблон соседства $\varphi : A^m \rightarrow A$; при этом $\varphi(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = \emptyset$. Состояние всех клеток в момент времени t образует текущую конфигурацию $c_t : \mathbb{Z}^d \rightarrow A$.

Применение локальной функции переходов к текущей конфигурации задает глобальную функцию переходов $c_{j+1} = g(c_j)$. Упорядоченная совокупность конфигураций, получаемая из начальной последовательным применением глобальной функции переходов, образует эволюцию e клеточного автомата: $e = \langle c_0, c_1, \dots, c_s \rangle$.

Одномерные ($d = 1$) клеточные автоматы, у которых $m = 2$ или $k = 2$, будем называть *ординарными*.

Клеточный автомат \mathcal{K}^* моделирует поведение клеточного автомата \mathcal{K} с замедлением n , если для любой эволюции $e \in E$, допускаемой клеточным автоматом \mathcal{K} , существует гомоморфизм $h : E \rightarrow E^*$, причем такой, что $c_j = h(c_{n,j}^*)$. При $n = 1$ будем говорить, что моделирование осуществляется в реальном времени.

Пусть задана машина Тьюринга

$$\mathcal{MT} = \langle \mathbb{Z}, S, Q, \psi \rangle,$$

где \mathbb{Z} — одномерное целочисленное пространство — лента; S — конечное множество символов, включая пустой \emptyset — алфавит машины; Q — конечное множество состояний машины; L — трехэлементное множество, элементы которого соответствуют направлениям перемещения по ленте; ψ — функция переходов, определенная в дискретные моменты времени:

$$\psi : S \times Q \rightarrow S \times Q \times L.$$

Отображение $v_t : \mathbb{Z} \rightarrow S$ задает конфигурацию машины Тьюринга на момент t , а кортеж $w = \langle v_0, v_1, \dots, v_\tau \rangle$ определяет эволюцию машин Тьюринга. Множество всех возможных эволюций машины Тьюринга обозначим через W . Будем говорить, что клеточный автомат \mathcal{K} *моделирует* машину Тьюринга \mathcal{MT} , если существует гомоморфизм $r : W \rightarrow E$. Если клеточный автомат \mathcal{K}_u моделирует универсальную машину Тьюринга \mathcal{MT}_u , то \mathcal{K}_u будем называть *универсальным*.

По аналогии с введенной Шенноном сложностью универсальных машин Тьюринга произведение $C_s = d \times m \times k$ называется сложностью универсальных клеточных автоматов.

2. Результаты

Теорема 1. Любой одномерный клеточный автомат \mathcal{K} с шаблоном соседства m моделируется с замедлением $m - 1$ ординарным клеточным автоматом \mathcal{K}_o с числом состояний

$$k_o \leq \sum_{i=1}^m k^i.$$

Теорема 2. Любой одномерный клеточный автомат \mathcal{K} моделируется в реальном масштабе времени ординарным клеточным автоматом \mathcal{K}_o с шаблоном соседства

$$m_o \leq m \lceil \log_2 2k^2 \rceil - 2.$$

Теорема 3. Существует универсальный ординарный клеточный автомат \mathcal{K}_o^u со сложностью $C_s = 16 \times 2$.

3. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Пусть \mathcal{K} и \mathcal{K}^* — два одномерных клеточных автомата, отличающиеся только тем, что каждый элемент x_i^* шаблона клеточного автомата \mathcal{K}^* имеет вид $x_i^* = x_i + c$, где c — некоторая целочисленная константа. Тогда эволюции клеточных автоматов изоморфны, а их конфигурации отличаются только сдвигом в клеточном пространстве.

Добавление целочисленной константы приводит к тому, что число «левых» (элементы, у которых $x_i < 0$) и «правых» ($x_i > 0$) соседей у каждой клетки клеточного автомата \mathcal{K}^* изменяется при сохранении общего числа соседних элементов в шаблоне. Заметим, что нулевой элемент должен сохраняться в шаблоне N^* после преобразований по определению понятия шаблона клеточного автомата.

Без нарушения общности допустим, что число элементов в шаблонах нечетно и шаблон N имеет вид

$$N = \left\{ -\frac{m-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{m-1}{2} \right\},$$

а шаблон N^* имеет вид

$$N^* = \{-(m-1), -(m-2), \dots, -1, 0\}.$$

В данном случае $c = -(m-1)/2$.

Рассмотрим фрагмент конфигурации клеточного автомата \mathcal{K} , когда число клеток равно размеру m шаблона

$$\cdots \underbrace{aa \dots a}_{\frac{m-1}{2}} a \underbrace{aa \dots a}_{\frac{m-1}{2}} \cdots, a \in A.$$

Пусть локальная функция φ переводит данный фрагмент конфигурации в фрагмент

$$\cdots \underbrace{\#\# \dots \#}_{\frac{m-1}{2}} y \underbrace{\#\# \dots \#}_{\frac{m-1}{2}} \cdots, y \in A.$$

Состояния клеток, отмеченных знаком $\#$, изменяются в зависимости от состояния других клеток конфигурации, не включенных в данный шаблон. Для клеточного автомата \mathcal{K}^* преобразования будут иметь вид

$$\cdots \underbrace{\#\# \dots \#}_{\frac{m-1}{2}} \underbrace{\#\# \dots \#}_{\frac{m-1}{2}} y \cdots,$$

т. е. результат применения локальной функции φ сдвинут в пространстве на величину константы с шаблона. Так как локальная функция применяется одновременно ко всем клеткам, такое смещение будет характерно для всех позиций конфигурации клеточного автомата \mathcal{K}^* . При этом на каждом шаге эволюции получаемые конфигурации будут идентичны с точностью до сдвига в пространстве. Отсюда следует изоморфизм автоматов. Лемма 1 доказана.

В силу леммы 1 будем полагать, что в шаблонах клеточных автоматов \mathcal{K} и \mathcal{K}_0 нет элементов с разными знаками. Для определенности пусть клетки имеют только «левых» соседей

$$N = \{x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1, 0\}, \quad x_i < 0, \\ N_0 = \{-1, 0\}.$$

Зададим алфавит A_0 клеточного автомата \mathcal{K}_0 в виде

$$A_0 = \{A \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_{m-1}\},$$

где A — алфавит моделируемого клеточного автомата \mathcal{K} ; A_i — множество, элементы которого есть i -разрядные коды в алфавите A , $2 \leq i \leq m-1$.

Локальную функцию переходов φ_0 представим в виде

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi_0^1 : A^2 \rightarrow A_2; \\ \varphi_0^2 : A_2^2 \rightarrow A_3; \\ \vdots \\ \varphi_0^{(m-1)} : A_{m-1}^2 \rightarrow A. \end{cases}$$

При этом все отображения $\varphi_0^1, \dots, \varphi_0^{(m-2)}$ — биекции, а $\varphi_0^{(m-1)}$ — сюръекция. Отображение $\varphi_0^{(m-1)}$ выбирается таким образом, чтобы выполнялась композиция $\varphi = \varphi_0^1 \circ \varphi_0^2 \circ \cdots \circ \varphi_0^{(m-1)}$. Здесь φ — локальная функция переходов моделируемого клеточного автомата \mathcal{K} .

Приведем пример для случая $m = 3$. Пусть фрагменты последовательных конфигураций клеточного автомата \mathcal{K} имеют вид

$$\begin{aligned} c_i \cdots a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 \cdots, \\ c_{i+1} \cdots \# y^2 y^3 y^4 y^5 \cdots, \end{aligned}$$

где $a^i, \#, y^i \in A$. Тогда клеточный автомат \mathcal{K}_0 будет выполнять следующие преобразования:

$$\begin{aligned} c_i^0 \cdots a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 \cdots, \\ c_{i+1}^0 \cdots (\# a^1)(a^1 a^2)(a^2 a^3)(a^3 a^4)(a^4 a^5) \cdots, \\ c_{i+2}^0 \cdots \# y^2 y^3 y^4 y^5 \cdots, \end{aligned}$$

где $(a^i a^{i+1}) \in A_2$.

Очевидно, что при одинаковых начальных конфигурациях клеточный автомат \mathcal{K}_0 будет моделировать клеточный автомат \mathcal{K} .

Последовательное применение подстановок требует $m - 1$ такт работы автомата \mathcal{K}_0 , а число его состояний увеличивается до величины

$$k_0 \leq \sum_{i=1}^m k^i.$$

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Как и в случае теоремы 1, согласно лемме 1 будем полагать, что клеточный автомат \mathcal{K} и моделирующий его ординарный клеточный автомат \mathcal{K}_0 имеют шаблоны соседства следующего вида:

$$\begin{aligned} N &= \{x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1, 0\}, \quad x_i < 0, \\ N_0 &= \{-1, 0\}. \end{aligned}$$

Для представления k символов состояний $a \in A$ клеточного автомата \mathcal{K} в двоичном алфавите \mathbb{B} клеточного автомата \mathcal{K}_0 используем биекцию $f_0 : A \rightarrow \mathbb{B}^{\lceil \log_2 2k^2 \rceil}$.

Отображение f_0 задает следующую кодировку:

$$a \rightarrow \underbrace{bb \dots b}_{\lceil \log_2 k \rceil} \underbrace{011 \dots 1}_{\lceil \log_2 k \rceil}, \quad a \in A, b \in \mathbb{B}.$$

Рассмотрим некоторый фрагмент начальной конфигурации клеточного автомата \mathcal{K}_0 , получаемый кодированием начальной конфигурации клеточного автомата \mathcal{K} в соответствии с представленным выше отображением

$$\cdots bb \dots b011 \dots 1bb \dots b011 \dots 1bb \dots b011 \dots 1 \cdots.$$

Последовательность символов $011\dots 1$ выполняет роль разделителя между собственно кодами $bb\dots b$ символов алфавита A . При анализе любой последовательности двоичных символов длины не более $\lceil \log_2 2k^2 \rceil$ каждой конфигурации из нее всегда можно выделить либо только разделитель, если самый правый символ последовательности не последний символ кода, либо разделитель вместе с кодом символа — в противном случае. Данный факт иллюстрируется примером для случая $k = 14$:

$$\dots 011111001 \underbrace{10111111101}_{\lceil \log_2 2k^2 \rceil} \underbrace{0111111011}_{\lceil \log_2 2k^2 \rceil} 01 \dots$$

Таким образом, величина $m \lceil \log_2 2k^2 \rceil$ мощности шаблона соседства клеточного автомата \mathcal{K}_0 достаточна для моделирования поведения клеточного автомата \mathcal{K} . У каждой клетки автомата \mathcal{K}_0 , содержащей крайний правый двоичный символ кода $bb\dots b$ и $\lceil \log_2 k \rceil - 1$ последующих клеток, содержащих символы разделителя $011\dots 1$, имеется вся информация, соответствующая m клеткам автомата \mathcal{K} . Тогда шаблон m_0 может быть сокращен на два элемента, а в каждой последующей конфигурации код $bb\dots b$, полученный в результате применения локальной функции, вместе с разделителем $011\dots 1$ будут сдвигаться на $\lceil \log_2 k \rceil - 1$ позиций вправо:

$$\begin{aligned} c_i^0 \dots 1b \dots bb \underbrace{011\dots 1}_{\lceil \log_2 k \rceil} 11b \dots, \\ c_{i+1}^0 \dots 11 \dots 1 \underbrace{bbbb\dots bb}_{\lceil \log_2 k \rceil} 011 \dots \end{aligned}$$

Заметим, что равенство $m_0 = m \lceil \log_2 2k^2 \rceil - 2$ справедливо в общем случае. Для некоторых k число символов, образующих разделитель, может совпадать с $\lceil \log_2 k \rceil$ символами собственно кода. В этом случае вид разделителя может также измениться. Следовательно, полученное значение m_0 клеточного автомата \mathcal{K}_0 является верхней оценкой мощности шаблона:

$$m_0 \leq m \lceil \log_2 2k^2 \rceil - 2.$$

Как отмечалось выше, каждая клетка может точно позиционировать свое место среди $\lceil \log_2 2k^2 \rceil$ соседей. С учетом этого для достижения изоморфизма эволюций клеточных автоматов необходимо, чтобы локальная функция переходов φ_0 базировалась на следующих положениях:

- (1) каждая клетка, содержащая последний символ разделителя или первые $\lceil \log_2 k \rceil - 1$ символов кода, переходит в состояние «1»;
- (2) каждая клетка, содержащая $(\lceil \log_2 2k \rceil - 1)$ -й символ кода разделителя, переходит в состояние «0»;

- (3) начиная с клетки, содержащей последний символ кода, и до $(\lceil \log_2 2k \rceil - 1)$ -го символа кода разделителя, состояние i -й клетки соответствует i -му символу отображения $f(\varphi(f^{-1}(b)))$.

Теорема 2 доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Утверждение теоремы 3 непосредственно вытекает из теоремы 2 при моделировании ординарными клеточными автоматами одномерных универсальных автоматов. Универсальные клеточные автоматы рассматривались в работах [1, 2, 4, 5]. Для ординарных универсальных клеточных автоматов лучшие результаты по оценке сложности принадлежат Смитту — $C_s = 2 \times 14$ и Аладьеву — $C_s = 17 \times 2$ [1]. Оценка сложности $C_s = 17 \times 2$ получена также в [4]. При подстановке значений $m = 2$ и $k = 14$ получаем более сильный результат — $C_s = 16 \times 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В. З. Однородные структуры: Теоретические и прикладные аспекты. Киев: Техника, 1990.
2. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Болотов А. А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.
3. Cellular automata and complexity: collected papers / Ed. by S. Wolfram. New York: Addison-Wesley, 1994.
4. Lindgren K., Nordahl M. G. Universal computation in simple one-dimensional cellular automata // Complex Systems. 1990. V. 4, N 3. P. 299–318.
5. Smith III A. R. Simple computation-universal cellular spaces // J. Assoc. Comput. Mach. 1971. V. 18, N 3. P. 339–353.

Адрес автора:

Военный инженерно-
космический университет
им. А. Ф. Можайского,
Ждановская наб., 13,
197082 Санкт-Петербург,
Россия.
E-mail: vlars-i3@mail.ru

Статья поступила
9 июля 2002 г.