ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2002. Серия 1. Том 9, № 4, 75–81

УДК 519.8

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОКООРДИНАТНОГО ПОДЪЕМА ДЛЯ ПОЛИМАТРОИДОВ*)

В. В. Шенмайер

Рассматривается задача целочисленного программирования на полиматроидах. Эта задача является обобщением задачи о базе матроида максимального веса и подобно последней решается алгоритмом покоординатного подъема. Рассматривается класс всех алгоритмов покоординатного подъема, и в данном классе характеризуется подкласс алгоритмов, позволяющих получать точное решение. В качестве следствия получено обобщение теоремы Радо — Эдмондса для произвольных семейств векторов, опирающееся на понятие коцикла.

Введение

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, I — конечное множество координат, $\Im$ — конечное множество векторов из N^I, $\mathscr{B}(\Im)$ — множество максимальных векторов из $\Im$ и $e_i = (0, \dots, 1_i, \dots, 0)$. Требуется найти

$$\max\{f(X) \mid X \in \mathscr{B}(\Im)\}, \tag{1}$$

где f — произвольная функция на N^I такая, что

$$\text{если } f(X+e_i) \geqslant f(X+e_j) \text{ и } k \neq i, \text{ то } f(X+e_k+e_i) \geqslant f(X+e_k+e_j). \tag{2}$$

Пусть Π — семейство алгоритмов покоординатного подъема с единичным шагом для задачи (1). Каждый алгоритм $A \in \Pi$ характеризуется набором множеств $\varphi_A(X)$, $X \in \Im$, состоящих из координат, которые для алгоритма A являются возможными направлениями увеличения вектора X. Алгоритм A начинает работу с нулевого вектора $\mathbf{0}$ и на каждом шаге переходит от вектора X к вектору $X + e_i$, где $i \in \arg\max\{f(X + e_j) \mid j \in \varphi_A(X)\}$. Работа алгоритма заканчивается при $\varphi_A(X) = \varnothing$.

Цель статьи — в классе Π охарактеризовать подкласс алгоритмов, позволяющих получать точное решение задачи (1) в случае, когда множество $\Im$ является целочисленным полиматроидом.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–01153).

§ 1. Известные результаты

Множество $\Im$ называется *монотонным вниз*, если из условий $X \leqslant Y$, $Y \in \Im$ и $X \in N^I$ следует $X \in \Im$. Монотонные вниз множества, состоящие только из 0-1-векторов, называются *системами независимости*. Множество $\Im$ называется *целочисленным полиматроидом*, если оно не пусто, монотонно вниз и для любого $X \in N^I$ максимальные векторы вида $Y \in \Im$, $Y \leqslant X$ имеют одинаковую сумму координат. Целочисленные полиматроиды, состоящие только из 0-1-векторов, называются *матроидами*.

Введем следующие обозначения:

$X, Y \in N^I$;

$|X|$ — сумма координат вектора X;

$X(i)$ — i-я координата вектора X, $i \in I$;

$I(X) = \{i \in I \mid X(i) > 0\}$ — носитель вектора X;

$J_\Im(X) = \{i \in I \mid X + e_i \in \Im\}$;

$X \vee Y$ — вектор такой, что $(X \vee Y)(i) = \max\{X(i), Y(i)\}$ при всех $i \in I$;

$X \wedge Y$ — вектор такой, что $(X \wedge Y)(i) = \min\{X(i), Y(i)\}$ при всех $i \in I$;

$\sup \Im = \bigvee\{Z \mid Z \in \Im\}$ — точная верхняя грань множества $\Im$.

Алгоритм покоординатного подъема такой, что $\varphi_A(X) = J_\Im(X)$ при всех $X \in N^I$, будем называть *жадным* алгоритмом. Данный алгоритм является наиболее изученным представителем семейства Π.

Основными примерами функций, обладающих свойством (2), являются линейные и вогнутые сепарабельные функции. *Линейными* функциями называются функции вида $f(X) = \sum\limits_{i \in I} w(i)X(i)$, где $w \in R^I$. *Сепарабельными* функциями называются функции вида $f(X) = \sum\limits_{i \in I} f_i(X(i))$, где f_i — вещественные функции.

Теорема 1 [3, 4]. *Пусть $\Im$ — система независимости. Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи* (1) *при любой линейной функции f тогда и только тогда, когда система $\Im$ является матроидом.*

Теорема 2. *Пусть $\Im$ — монотонное вниз множество векторов. Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи* (1) *при любой вогнутой сепарабельной функции f тогда и только тогда, когда множество $\Im$ является целочисленным полиматроидом.*

Теорема 2 является следствием результата из [1].

Пусть $\Im$ — матроид и $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Тогда множество

$$\Im^* = \{X \in \{0,1\}^I \mid X \leqslant \mathbf{1} - Y \text{ для некоторого } Y \in \mathscr{B}(\Im)\}$$

также является матроидом и называется *двойственным* матроидом. Минимальные векторы из $\{0,1\}^I \setminus \Im$ называются *циклами* матроида $\Im$. Циклы матроида $\Im^*$ называются *коциклами* матроида $\Im$.

Пусть $A \in \Pi$. Вектор X называется *достижимым* для алгоритма A, если существует последовательность векторов $X_0, X_1, \ldots, X$ такая, что $X_0 = \mathbf{0}$ и $X_{k+1} = X_k + e_{i(k)}$, где $i(k) \in \varphi_A(X_k)$.

Обозначим через $\Pi_\Im$ семейство алгоритмов $A \in \Pi$ таких, что

($\varphi 1$) $\varphi_A(X) \neq \varnothing$, если $X \in \Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$;

($\varphi 2$) $X + e_i \in \Im$, если $i \in \varphi_A(X)$.

Теорема 3 [2]. *Пусть $\Im$ — матроид и $A \in \Pi_\Im$. Тогда алгоритм A находит оптимальное решение задачи (1) при любой линейной функции f тогда и только тогда, когда для любого достижимого вектора $X \in \Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$ множество $\varphi_A(X)$ является объединением носителей некоторых коциклов матроида $\Im$.*

Замечание. Теоремы 1–3 справедливы для произвольных функций f, обладающих свойством (2). Ниже будет доказано обобщение теоремы 3 для случая целочисленных полиматроидов и всего класса Π. Известным примером алгоритма покоординатного подъема, удовлетворяющего теореме 3, является алгоритм Прима для задачи об остовном дереве максимального веса.

§ 2. Основной результат

Для формулировки основного результата требуется понятие коцикла полиматроида. Пусть $\Im$ — целочисленный полиматроид. *Двойственным* полиматроидом будем называть множество

$$\Im^* = \{X \in N^I \mid X \leqslant (\sup \Im) - Y \text{ для некоторого } Y \in \mathscr{B}(\Im)\}.$$

Данное определение корректно, поскольку множество $\Im^*$ также является целочисленным полиматроидом. Минимальные векторы из $N^I \setminus \Im$ будем называть *циклами* полиматроида $\Im$. Циклы полиматроида $\Im^*$ будем называть *коциклами* полиматроида $\Im$. Заметим, что коциклами $\Im$ являются минимальные векторы $K \in N^I$ такие, что $K + X \nleqslant \sup \Im$ для всех $X \in \mathscr{B}(\Im)$.

Теорема 4. *Пусть $\Im$ — целочисленный полиматроид и $A \in \Pi$. Тогда алгоритм A находит оптимальное решение задачи (1) при любой функции f, обладающей свойством (2), тогда и только тогда, когда для любого достижимого вектора $X \in \Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$ множество $\varphi_A(X)$ является непустым объединением носителей некоторых коциклов K таких, что $K + X \leqslant \sup \Im$.*

Данное утверждение справедливо также в классе вогнутых сепарабельных функций f.

Для доказательства теоремы 4 потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Для любого вектора* $X \in \Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$ *существует коцикл* K *такой, что* $K + X \leqslant \sup \Im$.

Доказательство. Пусть $Z = \sup \Im - X$ и B — произвольный вектор из $\mathscr{B}(\Im)$. Тогда $X \ngeqslant B$ и, следовательно, $Z + B \nleqslant \sup \Im$. Отсюда следует существование коцикла K такого, что $K \leqslant Z$. Остается заметить, что $K + X \leqslant Z + X = \sup \Im$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* $X \in \Im$, K — *коцикл такой, что* $K + X \leqslant \sup \Im$, *и* $i \in I(K)$. *Тогда* $X + e_i \in \Im$.

Доказательство. Пусть $X + e_i \notin \Im$. Тогда существует такой цикл Z, что $Z \leqslant X + e_i$ и $Z(i) = X(i) + 1$. Согласно определению коцикла существует вектор $B \in \mathscr{B}(\Im)$ такой, что $B + K \leqslant \sup \Im + e_i$. Так как $Z - e_i \in \Im$, то согласно свойствам полиматроида существует такой вектор $C \in \mathscr{B}(\Im)$, что $Z - e_i \leqslant C \leqslant B \vee (Z - e_i)$.

Покажем, что $C + K \leqslant \sup \Im$. Согласно определению цикла имеем $Z \nleqslant C$. Поэтому $C(i) = Z(i) - 1 = X(i)$. Отсюда следует, что $(C + K)(i) = (X + K)(i) \leqslant (\sup \Im)(i)$ по условию леммы. При $j \neq i$ имеем $(C + K)(j) \leqslant \max\{(Z + K)(j),\ (B + K)(j)\}$. Поскольку $Z(j) \leqslant X(j)$, получаем $(Z + K)(j) \leqslant (X + K)(j) \leqslant (\sup \Im)(j)$. С другой стороны, $(B + K)(j) \leqslant (\sup \Im)(j)$ по выбору вектора B. Таким образом, $C + K \leqslant \sup \Im$, что противоречит определению коцикла. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Достаточность. Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_\ell$ — последовательность векторов, построенная алгоритмом A. Тогда все векторы X_s достижимы для алгоритма A и согласно лемме 2 принадлежат $\Im$. Отсюда и из условия непустоты $\varphi_A(X)$ получаем $X_\ell \in \mathscr{B}(\Im)$.

Пусть $Y \in \mathscr{B}(\Im)$, $f(Y) > f(X_\ell)$ и среди всех таких векторов вектор Y определяет максимальный номер s такой, что $X_s \leqslant Y$. Тогда $s < \ell$, поскольку $X_\ell \nleqslant Y$. Пусть i — такая координата, что $X_{s+1} = X_s + e_i$. Тогда $i \in \varphi_A(X_s)$ и $Y(i) = X_s(i)$. Так как $Y + e_i \notin \Im$, то существует такой цикл Z, что $Z \leqslant Y + e_i$ и $Z(i) = Y(i) + 1$. Согласно условию существует такой коцикл K, что $K + X_s \leqslant \sup \Im$ и $i \in I(K)$. Заметим, что $i \in I(Z) \cap I(K)$, $K \leqslant \sup \Im$ и $(K + Z)(i) = (K + X_s)(i) + 1 \leqslant (\sup \Im)(i) + 1$.

Предположим, что $I(Z) \cap I(K) \cap I(Y - X_s) = \varnothing$. Рассмотрим вектор $C = Z - e_i$. Заметим, что $(C + K)(i) = (Z + K)(i) - 1 \leqslant (\sup \Im)(i)$. При $j \neq i$ справедливо равенство $(C + K)(j) = (Z + K)(j)$. Если $j \in I(Y - X_s)$, то согласно сделанному предположению $j \notin I(Z) \cap I(K)$ и, следовательно, $(Z + K)(j) = \max\{Z(j), K(j)\} \leqslant \max\{Y(j), K(j)\} \leqslant (\sup \Im)(j)$. В противном случае $Y(j) = X_s(j)$ и, следовательно, $(Z + K)(j) \leqslant (Y + K)(j) = (X_s + K)(j) \leqslant (\sup \Im)(j)$. Таким образом, $C + K \leqslant \sup \Im$. С другой

стороны, так как Z — цикл, то $C \in \Im$. Отсюда и из леммы 2 получаем, что $C + e_i \in \Im$. Но $C + e_i = Z$, что противоречит определению цикла.

Следовательно, множество $I(Z) \cap I(K) \cap I(Y - X_s)$ содержит хотя бы одну координату j. Заметим, что $j \neq i$, поскольку $Y(i) = X_s(i)$. Покажем, что $Y + e_i - e_j \in \Im$. Так как $Z - e_j \in \Im$, то согласно свойствам полиматроида существует такой вектор $C \in \Im$, что $|C| = |Y|$ и $Z - e_j \leqslant C \leqslant Y \vee (Z - e_j) = Y + e_i$. Поскольку $|C| = |Y|$ и $C \leqslant Y + e_i$, получаем $C = Y + e_i - e_q$ при некотором $q \in I$. Согласно определению цикла имеем $Z \nleqslant C$. Поэтому $C(j) = Z(j) - 1$. Но $Z(j) \leqslant Y(j)$ и, следовательно, $C(j) \leqslant Y(j) - 1$. Поэтому $j = q$ и $C = Y + e_i - e_j \in \Im$.

Так как $j \in I(K)$ и $I(K) \subseteq \varphi_A(X_s)$, то $f(X_s+e_i) \geqslant f(X_s+e_j)$ согласно правилам алгоритма A. С другой стороны, $Y - e_j \geqslant X_s$ и $(Y - e_j)(i) = X_s(i)$. Отсюда согласно свойству (2) функции f, используя индукцию, получаем $f(Y + e_i - e_j) \geqslant f(Y)$. Но это противоречит выбору вектора Y.

Необходимость. Пусть X — минимальный по сумме координат достижимый вектор из $\Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$ такой, что множество $\varphi_A(X)$ не равно непустому объединению носителей некоторых таких коциклов K, что $K + X \leqslant \sup \Im$.

Сначала покажем, что $\varphi_A(X) \neq \varnothing$. Действительно, в противном случае при целевой функции $f(Y) = |Y|$, $Y \in N^I$, вектор X будет выходом алгоритма A. Но это противоречит точности алгоритма.

Далее из сделанного относительно X предположения получаем, что существует такая координата $i \in \varphi_A(X)$, что если K — коцикл, $K + X \leqslant \sup \Im$ и $i \in I(K)$, то $I(K) \nsubseteq \varphi_A(X)$.

Согласно лемме 1 для любого вектора $Y \in \Im \setminus \mathscr{B}(\Im)$ существует такой коцикл $K = K(Y)$, что $K(Y) + Y \leqslant \sup \Im$. Пусть B — алгоритм из семейства Π такой, что

$$\varphi_B(Y) = \begin{cases} \varphi_A(Y) & \text{при } |Y| < |X|, \\ I(K(Y)) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $f(Y) = \sum\limits_{j \in I} f_j(Y(j))$, где

$$f_j(n+1) - f_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n < |X| \text{ либо } j \notin \varphi_A(X), \\ \sqrt{1/2}, & \text{если } n \geqslant |X| \text{ и } j = i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция f обладает свойством (2) как вогнутая сепарабельная функция.

Пусть $X_0, X_1, \ldots, X_m$ и $Y_0, Y_1, \ldots, Y_\ell$ — такие последовательности векторов, построенные соответственно алгоритмами A и B, что $X_s = Y_s = X$, где $s = |X|$. Существование таких последовательностей следует

из определения f. Из минимальности X следует, что алгоритм B удовлетворяет условию теоремы 4. Поэтому согласно доказанному $f(Y_\ell) \geqslant f(X_m)$. При этом $f(X_m)$ — иррациональное число.

Покажем, что $f(Y_\ell)$ — целое число. Допустим, что $f(Y_{n+1}) - f(Y_n) = \sqrt{1/2}$. Тогда $n \geqslant |X|$ и $i \in \varphi_B(Y_n) = I(K(Y_n))$, где $K(Y_n)$ — такой коцикл, что $K(Y_n) + Y_n \leqslant \sup \Im$. Так как $Y_n \geqslant X$, то $K(Y_n) + X \leqslant \sup \Im$. Отсюда и из сделанного относительно X предположения получаем, что $I(K(Y_n)) \nsubseteq \varphi_A(X)$. Следовательно, согласно определению функции f множество $\varphi_B(Y_n)$ содержит хотя бы одну такую координату j, что $f_j(n+1) - f_j(n) = 1$. Но это противоречит правилам алгоритма B. Таким образом, $f(Y_\ell)$ — целое число. Следовательно, $f(X_m) < f(Y_\ell)$, что противоречит точности алгоритма A. Теорема 4 доказана.

§ 3. Следствие для жадного алгоритма

Теорема 4 имеет одно важное следствие в случае жадного алгоритма. Напомним, что под жадным алгоритмом в статье понимается такой алгоритм покоординатного подъема, что $\varphi_A(X) = J_\Im(X)$ при любом $X \in N^I$.

Введем следующие определения. Пусть $\Im$ — произвольное конечное подмножество N^I (не обязательно монотонное вниз). *Наследственным замыканием* множества $\Im$ будем называть множество $\mathscr{H}(\Im) = \{X \in N^I \mid X \leqslant Y$ для некоторого $Y \in \Im\}$. *Достижимым ядром* множества $\Im$ будем называть множество $\mathscr{A}(\Im)$, состоящее из векторов вида $\sum\limits_{m=1}^{n} e_{i(m)}$, где $\sum\limits_{m=1}^{s} e_{i(m)} \in \Im$ при любом $s = 1, \ldots, n$. Другими словами, достижимым ядром $\Im$ является множество векторов, достижимых для жадного алгоритма. *Коциклами* множества $\Im$ будем называть минимальные векторы $K \in N^I$ такие, что $K + X \nleqslant \sup \Im$ для всех $X \in \mathscr{B}(\Im)$. Другими словами, коциклами $\Im$ являются коциклы $\mathscr{H}(\Im)$.

Теорема 5. *Пусть $\Im$ — конечное подмножество N^I. Тогда жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи (1) при любой функции f, обладающей свойством (2), тогда и только тогда, когда множество $\mathscr{H}(\Im)$ является целочисленным полиматроидом и для любого вектора $X \in \mathscr{A}(\Im) \setminus \mathscr{B}(\Im)$ множество $J_\Im(X)$ является непустым объединением носителей некоторых коциклов K таких, что $K + X \leqslant \sup \Im$.*

Данное утверждение справедливо также в классе вогнутых сепарабельных функций f.

Доказательство. Достаточность. Заметим, что множество $\mathscr{H}(\Im)$ и жадный алгоритм, рассматриваемый как алгоритм для задачи (1) на множестве $\mathscr{H}(\Im)$, удовлетворяют условиям теоремы 4. Следовательно,

алгоритм находит оптимальное решение на множестве $\mathscr{B}(H(\Im))$. Остается заметить, что $\mathscr{B}(H(\Im)) = B(\Im)$.

Необходимость. Покажем, что множество $\mathscr{H}(\Im)$ является целочисленным полиматроидом. Пусть при некотором $C \in N^I$ существуют такие векторы X, Y, что $|X| < |Y|$ и X, Y являются максимальными векторами из $\mathscr{H}(\Im)$, покоординатно меньшими вектора C. Рассмотрим такую целевую функцию f^p, что

$$f^p(Z) = (1-p)\,|Z \wedge X| + p\,|Z \wedge C|, \quad Z \in N^I.$$

Пусть B — вектор из $\mathscr{B}(\Im)$, полученный по правилам жадного алгоритма при $p = 1/2$. Тогда B также может быть получен по правилам алгоритма при $p = 0$ и при $p = 1$. При этом $f^0(Z) = |Z \wedge X|$ и $f^1(Z) = |Z \wedge C|$. Отсюда и из условия точности алгоритма следует, что

$$|B \wedge X| = \max\{|Z \wedge X| \; |Z \in \Im|\} = |X|;$$
$$|B \wedge C| = \max\{|Z \wedge C| \; |Y \in \Im|\} \geqslant |Y| \geqslant |X| + 1.$$

Следовательно, $B \geqslant X$ и $B \geqslant X + e_i$ для некоторого i такого, что $X + e_i \leqslant C$. Но это противоречит максимальности вектора X. Отсюда получаем, что $\mathscr{H}(\Im)$ — целочисленный полиматроид.

Таким образом, множество $\mathscr{H}(\Im)$ и жадный алгоритм, рассматриваемый как алгоритм для задачи (1) на множестве $\mathscr{H}(\Im)$, удовлетворяют условиям теоремы 4. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 11. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. С. 38–42.
2. **Колмычевская Н. В.** Некоторые обобщения алгоритма покоординатного спуска для матроида // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 21. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 13–17.
3. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.
4. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300–320.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: shenmaier@mail.ru

Статья поступила
26 августа 2002 г.