ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2002. Серия 1. Том 9, № 4, 82–105

УДК 519.95

СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ СВОЙСТВ ПОРЯДКОВЫХ ОТНОШЕНИЙ В n-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. А. Шоломов

Рассматриваются бинарные отношения в n-мерном пространстве, являющиеся порядковыми, т. е. зависящими для каждой пары точек пространства лишь от соотношений (больше, меньше, равно) одноименных компонент. Они могут быть представлены булевыми функциями от покомпонентных соотношений. Исследуются на NP-трудность и полиномиальность задачи распознавания по представляющим булевым функциям, являются ли отношения транзитивными, ацикличными, полными и др. Получено решение этих задач для всех основных свойств отношений при задании представляющих функций посредством дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

Введение

Исследуются бинарные отношения в n-мерном действительном пространстве $\mathbf{R}^n$. Отношения предполагаются порядковыми, т. е. такими, что для каждой пары точек из $\mathbf{R}^n$ они однозначно определяются соотношениями (больше, меньше, равно) одноименных компонент. Такие отношения часто используются в задачах многокритериального выбора вариантов, где точки пространства $\mathbf{R}^n$ интерпретируются как наборы оценок вариантов по n заданным критериям.

В статье рассматриваются наиболее известные свойства бинарных отношений — рефлексивность, иррефлексивность, асимметрия, антисимметрия, полнота, связность, транзитивность, негатранзитивность и ацикличность. Эти свойства чаще всего присутствуют в описаниях содержательных классов отношений. Они играют важную роль и в моделях выбора: предпочтения обычно транзитивны, ацикличность гарантирует непустоту выбора, полнота означает попарную сравнимость вариантов и т. д. Задачи распознавания по порядковым отношениям, обладают ли они заданными свойствами, представляют значительный интерес для анализа моделей выбора.

Для некоторых свойств эта задача рассматривались в [1, 3], но из-за принятого там способа представления отношений посредством 2^n булевых функций от n переменных не могли возникнуть эффективные алгоритмы. В данной статье принят другой достаточно естественный способ описания порядкового отношения — булевой функцией от $2n$ переменных. Проведено полное исследование на NP-трудность и полиномиальность задач распознавания перечисленных выше свойств порядковых отношений при задании представляющих их булевых функций дизъюнктивными и конъюнктивными нормальными формами (ДНФ и КНФ). Отдельно рассмотрен случай порядковых отношений с некоторым свойством монотонности (правильных отношений в терминологии [1]). Полученные результаты приведены в таблице (см. ниже).

Используемый в работе подход базируется на возможности сведения операций над отношениями (теоретико-множественных, обращения, произведения и др.) к преобразованию представляющих функций отношений. Наиболее нетривиальна операция композиции функций, соответствующая произведению отношений.

Данная статья написана на основе работ [4–6] и содержит полное изложение результатов по распознаванию свойств порядковых отношений. Большая часть из них получена в [4], в [5] найдено явное условие транзитивности правильных отношений в КНФ (см. теорему 5), NP-трудность ряда задач для правильных отношений (теорема 7) доказана методом, развитым в [6]. Внесен ряд методологических упрощений: задание порядковых отношений не использует функций (3,2)-значной логики, операция композиции представлена как верхняя грань в некоторой простой решетке (вместо достаточно громоздкого табличного описания). Промежуточные результаты сформулированы и доказаны в минимально достаточной форме, менее общей, чем в исходных работах.

1. Постановка задач и результаты

1.1. Порядковые отношения

Рассматривается n-мерное действительное пространство $\mathbf{R}^n$, точки которого будем обозначать через $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ и т. д. Бинарное отношение ρ на $\mathbf{R}^n$ называется *порядковым*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$

$$(\operatorname{sgn}(x_i - y_i) = \operatorname{sgn}(u_i - v_i),\ 1 \leqslant i \leqslant n) \Longrightarrow \mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{u}\rho\mathbf{v},$$

где $\operatorname{sgn}(z)$ равен -1, 0 и 1 при $z < 0$, $z = 0$ и $z > 0$ соответственно. Порядковое отношение ρ называется *правильным*, если $\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} \geqslant \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{z}\rho\mathbf{y}$, где $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{x}$ означает, что $z_i \geqslant x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Примерами правильных отношений являются *отношение Парето*

$$\mathbf{x}\pi\mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

и *лексикография*

$$\mathbf{x}\lambda\mathbf{y} \Longleftrightarrow x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee \ldots \vee (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} = y_{k-1} \wedge x_k > y_k)$$

при некотором k, $k \leqslant n$. Здесь указана лексикография, соответствующая упорядочению переменных (по старшинству) $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Можно рассматривать более общие упорядочения $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. В этом случае будем говорить, что лексикография λ *порождена упорядочением* $\mathbf{I} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Порядковые отношения (обычно правильные) часто используются в задачах многокритериального выбора [1], где точки пространства $\mathbf{R}^n$ интерпретируются как наборы оценок вариантов по n заданным критериям.

1.2. Представляющие функции

Порядковые отношения определены на бесконечном множестве $\mathbf{R}^n$, и для решения связанных с ними конструктивных задач необходимо условиться о конечном способе их задания.

Введем бинарные отношения p_i и p_i' ($1 \leqslant i \leqslant n$) на $\mathbf{R}^n$, положив $\mathbf{x}p_i\mathbf{y} \Leftrightarrow x_i > y_i$, $\mathbf{x}p_i'\mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i$. Эти отношения будем называть *примитивными*. Соотношения $x_i > y_i$, $x_i < y_i$ и $x_i = y_i$ выразимы через примитивные отношения:

$$x_i > y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}p_i\mathbf{y}, \quad x_i < y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}\bar{p}_i'\mathbf{y}, \quad x_i = y_i \Leftrightarrow \mathbf{x}(p_i' \wedge \bar{p}_i)\mathbf{y}. \qquad (1)$$

Поскольку порядковое отношение ρ однозначно определяется соотношениями (больше, меньше, равно) одноименных компонент x_i и y_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, оно может быть представлено в виде

$$\rho = g_\rho(p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n'), \qquad (2)$$

где g_ρ — булева функция, называемая *представляющей функцией* отношения ρ. Равенство (2) означает, что

$$\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow g_\rho(\mathbf{x}p_1\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p_n\mathbf{y}, \mathbf{x}p_1'\mathbf{y}, \ldots, \mathbf{x}p_n'\mathbf{y}).$$

Переменные функции g_ρ удовлетворяют неравенству $p_i \leqslant p_i'$, поскольку $\mathbf{x}p_i\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}p_i'\mathbf{y}$. Набор

$$(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_1', \ldots, \sigma_n') \qquad (3)$$

значений переменных назовем *реализуемым*, если $\sigma_i \leqslant \sigma_i'$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Множество всех реализуемых наборов обозначим через Σ (оно содержит

3^n наборов из 4^n возможных). Булевы функции $g_1(P,P')$ и $g_2(P,P')$, $(P,P') = (p_1,\dots,p_n,p'_1,\dots,p'_n)$ будем считать равными и записывать $g_1 = g_2$, если они совпадают на реализуемых наборах: $g_1(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') = g_2(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}')$, $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \in \Sigma$. Аналогично запись $g_1 \geqslant g_2$ будет означать, что $g_1(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \geqslant g_2(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}')$, $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \in \Sigma$. Скажем, что формула $F = F(P,P')$ *реализует* функцию g, если значения формулы F и функции g на множестве Σ совпадают. В том же смысле понимается *эквивалентность* формул F_1 и F_2.

С учетом эквивалентных соотношений $p_i \wedge p'_i = p_i$ и $\bar{p}'_i \wedge \bar{p}_i = \bar{p}'_i$ любая конъюнкция $K \not\equiv 0$ от переменных из (P,P') может быть приведена к виду $K = q_1q_2\dots q_n$ (значки $\wedge$ конъюнкции опущены), где $q_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p'_i\bar{p}_i, 1\}$ ($q_i = 1$ означает отсутствие соответствующего сомножителя). Такие конъюнкции будем называть *элементарными конъюнкциями*, а сомножители q_i — *элементарными сомножителями.* Дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ). Всякая функция $g \not\equiv 0$ представима в виде ДНФ, а ДНФ функции $g \equiv 0$ считаем равной 0.

Функцию $g(P,P')$ назовем *монотонной*, если для любых $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}')$, $(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') \in \Sigma$ неравенство $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \geqslant (\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}')$ влечет неравенство $g(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \geqslant g(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}')$. Легко видеть, что отношение ρ правильно тогда и только тогда, когда функция g_ρ монотонна. С набором $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \in \Sigma$ свяжем конъюнкцию $K_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}'} = q_1\dots q_n$, где

$$q_i = \begin{cases} p_i, & \text{если } \sigma_i = \sigma'_i = 1,\\ p'_i, & \text{если } \sigma_i = 0,\ \sigma'_i = 1,\\ 1, & \text{если } \sigma_i = \sigma'_i = 0.\end{cases}$$

Монотонной функции $g(P,P') \not\equiv 0$ поставим в соответствие ДНФ, равную дизъюнкции всех конъюнкций $K_{\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}'}$, соответствующих таким $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') \in \Sigma$, что $g(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') = 1$ и $g(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') = 0$ для всех $(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') \in \Sigma$, удовлетворяющих условиям $(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') \leqslant (\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}')$, $(\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}') \neq (\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}')$. Легко видеть, что эта ДНФ реализует g. Она является *приведенной*, т. е. не содержит отрицаний переменных и поглощаемых с учетом соотношений $p_i \leqslant p'_i$ конъюнкций (K_1 поглощает K_2 , если $K_1 \geqslant K_2$). Нетрудно убедиться, что для всякой монотонной функции реализующая ее приведенная ДНФ единственна.

Двойственным образом вводится понятие *элементарной дизъюнкции* $D = d_1 \vee \dots \vee d_n$, где $d_i \in \{p_i, p'_i, \bar{p}_i, \bar{p}'_i, p_i \vee \bar{p}'_i, 0\}$ называется *элементарным слагаемым.* Всякая функция $g(P,P') \not\equiv 1$ представима *конъюнктивной нормальной формой* — конъюнкцией элементарных дизъюнкций, а всякая монотонная функция $g(P,P') \not\equiv 1$ единственным образом представима *приведенной* КНФ, т. е. КНФ, не содержащей отрицаний переменных и поглощаемых дизъюнкций (D_1 поглощает D_2, если $D_1 \leqslant D_2$).

Приведенные ДНФ и КНФ функции $g(P, P') \equiv \mathrm{const}$ считаются совпадающими с этой константой.

В дальнейшем понадобится явный вид приведенных ДНФ и КНФ представляющей функции отношения лексикографии:

$$g_\lambda = p_1 \vee p_1' p_2 \vee p_1' p_2' p_3 \vee \ldots \vee p_1' \ldots p_{k-1}' p_k, \tag{4}$$

$$g_\lambda = p_1'(p_1 \vee p_2')(p_1 \vee p_2 \vee p_3') \ldots (p_1 \vee \ldots \vee p_{k-2} \vee p_{k-1}')(p_1 \vee \ldots \vee p_k). \tag{5}$$

1.3. Свойства бинарных отношений

Пусть r — бинарное отношение на заданном множестве A, элементы которого будем обозначать через $x, y, \ldots$ Отношение r называется

1°) *рефлексивным*, если xrx;

2°) *иррефлексивным*, если $x\bar{r}x$;

3°) *асимметричным*, если $xry \Rightarrow y\bar{r}x$;

4°) *полным*, если $xry \vee yrx$;

5°) *транзитивным*, если $xry \wedge yrz \Rightarrow xrz$;

6°) *негатранзитивным*, если $x\bar{r}y \wedge y\bar{r}z \Rightarrow x\bar{r}z$;

7°) *ацикличным*, если для любого $s \geqslant 1$

$$x_1 r x_2 \wedge x_2 r x_3 \wedge \ldots \wedge x_{s-1} r x_s \Rightarrow x_s \bar{r} x_1.$$

Часто (например, в определениях нестрогих частичных и строгих линейных порядков) используются близкие к 3° и 4° свойства 3′ *антисимметрии* $x \neq y \wedge xry \Rightarrow y\bar{r}x$ и 4′ *связности* $x \neq y \Rightarrow xry \vee yrx$. В качестве основных будем рассматривать свойства 1°–7°. Результаты, полученные в статье для свойств 3° и 4°, переносятся на антисимметрию и связность (см. п. 2.3).

Двойственным к r назовем отношение $r^* = \overline{(r^{-1})} = A^2 \setminus r^{-1}$. Операции обращения и взятия дополнения отношений перестановочны. Поэтому можно писать $r^* = \bar{r}^{-1}$, не указывая порядка операций. Очевидно, что $(r^*)^* = r$. Легко видеть, что переход от r к двойственному отношению r^* может быть осуществлен

(1) удалением всех имеющихся в r противоположных пар (x, y) и (y, x) и диагональных пар (x, x),

(2) добавлением противоположных пар (x, y) и (y, x), соответствующих элементам x и y, не связанным в r (т. е. таким, что $x\bar{r}y \wedge y\bar{r}x$), и диагональных пар (x, x), отсутствующих в r.

С учетом этого легко видеть, что пары свойств 1°–2°, 3°–4°, 5°–6° (а также 3′–4′) двойственны друг другу в том смысле, что если одно из отношений r и r^* обладает одним из этих свойств, то второе обладает другим свойством.

Свойства 1°–7° будем рассматривать применительно к порядковым отношениям. В этом случае $A = \mathbf{R}^n$.

1.4. Основные результаты

В статье проведено исследование на полиномиальность и NP-трудность задач проверки свойств 1°–7° для порядковых отношений ρ, заданных представляющими функциями g_ρ. Основные определения и факты, относящиеся к полиномиальности и NP-трудности, предполагаются известными (см., например, [2]). Рассматривается задание функций g_ρ в виде ДНФ и КНФ. В случае произвольных порядковых отношений ДНФ и КНФ могут быть любыми. Для правильных отношений ДНФ и КНФ предполагаются приведенными (напомним, эти представления единственны).

Свойство	Тип отношений			
	Произвольные		Правильные	
	Вид задания			
	ДНФ	КНФ	ДНФ	КНФ
Рефлексивность, иррефлексивность	P	P	P	P
Асимметрия	P	NP	P	NP
Полнота	NP	P	NP	P
Транзитивность	NP	NP	P	P
Негатранзитивность	NP	NP	P	P
Ацикличность	P	NP	P	P

Полученные результаты сведены в таблицу, где NP означает NP-трудность задач, P — полиномиальность. Отметим, что присутствующие в таблице NP-трудные задачи принадлежат классу NP либо co-NP.

2. Операции над отношениями и представляющими функциями

2.1. Теоретико-множественные операции и обращение отношений

Операции над порядковыми отношениями могут быть описаны в терминах преобразования представляющих функций.

Под k-местной теоретико-множественной операцией на заданном множестве A, как обычно, будем понимать такое отображение $F : (2^A)^k \to 2^A$, что для всех $x, y \in A$ и $X_1, Y_1, \ldots, X_k, Y_k \subseteq A$ выполнено соотношение

$$(x \in X_1 \Leftrightarrow y \in Y_1, \ldots, x \in X_k \Leftrightarrow y \in Y_k) \\ \Longrightarrow x \in F(X_1, \ldots, X_k) \Leftrightarrow y \in F(Y_1, \ldots, Y_k).$$

Операции F соответствует булева функция $\varphi_F : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$,

$$\varphi_F(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \sigma \iff ((x \in X_1)^{\sigma_1}, \dots, (x \in X_k)^{\sigma_k} \Rightarrow (x \in F(X_1, \dots, X_k))^{\sigma}),$$

где $(x \in X)^\sigma$ означает $x \in X$ и $x \notin X$ при $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ соответственно. Следующий факт очевиден.

Утверждение 1. *Если $\rho = F(\rho_1, \dots, \rho_k)$, где $\rho_1, \dots, \rho_k$ — порядковые отношения, а F — теоретико-множественная операция, то ρ — порядковое отношение и*

$$g_\rho(P, P') = \varphi_F(g_{\rho_1}(P, P'), \dots, g_{\rho_k}(P, P')),$$

где φ_F — булева функция, соответствующая операции F.

Для $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}_{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, точку $(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Скажем, что отношение ρ' получено из ρ *инвертированием оси* i, если $\mathbf{x}\rho'\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{-i}\rho\mathbf{y}_{-i}$.

Утверждение 2. *Если ρ' образовано из порядкового отношения ρ инвертированием оси i, то его представляющая функция $g_{\rho'}$ может быть получена из g_ρ заменой p_i и p'_i на $\bar{p}'_i$ и $\bar{p}_i$ соответственно, т. е. при $i = 1$, например, $g_{\rho'}$ имеет вид*

$$g_{\rho'}(p_1, \dots, p_n, p'_1, \dots, p'_n) = g_\rho(\bar{p}'_1, p_2, \dots, p_n, \bar{p}_1, p'_2, \dots, p'_n).$$

Этот факт вытекает из того, что при инвертировании оси i соотношения $x_i > y_i$ и $x_i \geqslant y_i$ заменяются соотношениями $x_i < y_i$ и $x_i \leqslant y_i$ соответственно, которые могут быть выражены в виде $\mathbf{x}\bar{p}'_i\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}\bar{p}_i\mathbf{y}$.

Утверждение 3. *Представляющая функция отношения ρ^{-1}, обратного к порядковому отношению ρ, может быть записана в виде*

$$g_{\rho^{-1}}(P, P') = g_\rho(\bar{P}', \bar{P}),$$

где $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ и $\bar{P}' = (\bar{p}'_1, \dots, \bar{p}'_n)$.

Действительно, поскольку $\mathbf{x}\rho^{-1}\mathbf{y}$ совпадает с $\mathbf{y}\rho\mathbf{x}$, при переходе от ρ к ρ^{-1} все соотношения $x_i > y_i$ и $x_i \geqslant y_i$ нужно заменить на $y_i > x_i$ и $y_i \geqslant x_i$, что равносильно инвертированию всех осей. Остается воспользоваться утверждением 2.

Двойственной к булевой функции $f(u_1, \dots, u_m)$ называется функция $f^*(u_1, \dots, u_m) = \bar{f}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$. Известно, что если f представлена формулой Φ в базисе $\{\wedge, \vee, ^-\}$, то f^* реализуется двойственной формулой Φ^*, полученной из Φ заменой всех конъюнкций дизъюнкциями, а дизъюнкций конъюнкциями.

Утверждение 4. *Представляющая функция отношения ρ^*, двойственного порядковому отношению ρ, имеет вид*

$$g_{\rho^*}(P, P') = g_\rho^*(P', P),$$

где g_ρ^* — булева функция, двойственная к g_ρ.

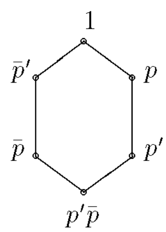
Этот факт получается применением утверждений 1 и 3

$$g_{\rho^*}(P, P') = \bar{g}_{\rho^{-1}}(P, P') = \bar{g}_\rho(\bar{P}', \bar{P}) = g_\rho^*(P', P).$$

Нетрудно убедиться, что если функция $g_\rho(P, P')$ задана посредством ДНФ (КНФ), то выражение $g_\rho^*(P', P)$ для представляющей функции отношения ρ^* при использовании двойственной формулы для g_ρ^* имеет вид КНФ (соответственно ДНФ), а если ρ — правильное отношение, то из приведенной ДНФ (КНФ) получается приведенная КНФ (ДНФ). Здесь существенно, что наборы P и P' при подстановке в g_ρ^* меняются местами. Именно благодаря этому элементарные конъюнкции переходят в элементарные дизъюнкции (и наоборот) и сохраняется свойство отсутствия поглощений. При исследовании сложности задач распознавания свойств отношений достаточно из каждой пары двойственных свойств (например, асимметрия–полнота) рассмотреть одно. На двойственное свойство результаты переносятся при изменении способа задания на двойственное (ДНФ на КНФ и наоборот).

2.2. Произведение отношений

Произведением отношений ρ_1 и ρ_2 называется такое отношение $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$, что $\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Leftrightarrow \exists\mathbf{z}(\mathbf{x}\rho_1\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}\rho_2\mathbf{y})$. Нетрудно видеть, что произведение порядковых отношений является порядковым отношением, а правильных отношений — правильным отношением.



Введем операцию *композиции* $g \circ \hat{g}$ функций $g = g(P, P')$ и $\hat{g} = \hat{g}(P, P')$, которая позволит найти представляющую функцию произведения отношений. Функции g и $\hat{g}$ будем считать заданными в виде ДНФ. Некоторое обоснование, почему при описании операции используются ДНФ, будет дано ниже (см. утверждение 10). Операцию композиции определим вначале для элементарных сомножителей, затем для элементарных конъюнкций и, наконец, — для ДНФ.

Операция композиции $q_i \circ \hat{q}_i$ элементарных сомножителей будет выполняться одинаково при всех i, поэтому номер i будем опускать и считать $q, \hat{q} \in Q = \{p, p', \bar{p}, \bar{p}', p'\bar{p}, 1\}$. На множестве Q зададим решетку, изображенную на рисунке, и положим $q \circ \hat{q}$ равным верхней грани $\sup(q, \hat{q})$

элементов q и $\hat{q}$ в этой решетке. *Композицией* элементарных конъюнкций $K = q_1 \dots q_n$ и $\widehat{K} = \hat{q}_1 \dots \hat{q}_n$ назовем элементарную конъюнкцию $K \circ \widehat{K} = \dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$, где $\dot{q}_i = q_i \circ \hat{q}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, а *композицией* функций $g, \hat{g} \not\equiv 0$, заданных в форме ДНФ $g = K_1 \vee \dots \vee K_s$ и $\hat{g} = \widehat{K}_1 \vee \dots \vee \widehat{K}_t$, — функцию

$$g \circ \hat{g} = \bigvee_{1 \leqslant u \leqslant s, 1 \leqslant v \leqslant t} K_u \circ \widehat{K}_v. \tag{6}$$

Если функция g или $\hat{g}$ тождественно равна 1, считаем ее приведенной ДНФ, состоящей из единственной конъюнкции, равной 1. При этом в соответствии с указанным правилом нахождения композиции получаем $g \circ \hat{g} \equiv 1$, если вторая функция не равна 0 тождественно. В случае $g \equiv 0$ или $\hat{g} \equiv 0$ полагаем $g \circ \hat{g} \equiv 0$ по определению.

Теорема 1. *Представляющая функция произведения отношений $\rho_1 \cdot \rho_2$ является композицией представляющих функций для ρ_1 и ρ_2, т. е.*

$$g_{\rho_1 \cdot \rho_2}(P, P') = g_{\rho_1}(P, P') \circ g_{\rho_2}(P, P').$$

Доказательство. При $g_{\rho_1} \equiv 0$ или $g_{\rho_2} \equiv 0$ указанный факт очевиден. Поэтому будем считать $g_{\rho_1}, g_{\rho_2} \not\equiv 0$.

Введем множество $\Delta = \{>, \geqslant, \leqslant, <, =, \#\}$. Для чисел x, y и элемента $\delta \in \Delta \setminus \{\#\}$ соотношение $x \delta y$ будем понимать обычным образом, а $x \# y$ будет означать, что соотношение между x и y произвольно. Зададим биекцию $\nu : Q \to \Delta$, положив $\nu(q) = \delta$ в соответствии с порядком перечисления элементов q и δ в множествах Q и Δ (т. е. $\nu(p)$ есть $>$ и т. д.). Легко проверить непосредственно, что биекция ν обладает свойством: $\mathbf{x} q_i \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \nu(q_i) y_i$.

Используя определение операции $q \circ \hat{q}$, для любых q и $\hat{q}$ можно проверить, что если числа x, y и z удовлетворяют соотношениям $x\nu(q)z$ и $z\nu(\hat{q})y$, то $x\nu(q \circ \hat{q})y$. Например, при $q = p$ и $\hat{q} = p'$ имеем

$$x\nu(q)z \wedge z\nu(\hat{q})y \Rightarrow (x > z \wedge z \geqslant y) \Rightarrow x > y \Rightarrow x\nu(p)y \Rightarrow x\nu(q \circ \hat{q})y.$$

Можно убедиться также и в обратном, что из $x\nu(q \circ \hat{q})y$ следует существование такого z, что $x\nu(q)z$ и $z\nu(\hat{q})y$.

Если $K = q_1 \dots q_n$, $\widehat{K} = \hat{q}_1 \dots \hat{q}_n$ — элементарные конъюнкции и для $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ выполнено $\mathbf{x} K \mathbf{z}$ (т. е. $\mathbf{x} q_i \mathbf{z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$) и $\mathbf{z} K \mathbf{y}$, то имеем $x_i \nu(q_i) z_i$ и $z_i \nu(\hat{q}_i) y_i$, что приводит к $x_i \nu(q_i \circ \hat{q}_i) y_i$ и означает $\mathbf{x}(K \circ \widehat{K})\mathbf{y}$. Аналогично можно убедиться в обратном: из $\mathbf{x}(K \circ \widehat{K})\mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} K \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \widehat{K} \mathbf{y}$ при некотором $\mathbf{z}$.

Обозначим через ρ отношение с представляющей функцией $g_\rho = g_{\rho_1} \circ g_{\rho_2}$. Если для некоторых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ имеет место $\mathbf{x} \rho_1 \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \rho_2 \mathbf{y}$, то в ДНФ функций g_{ρ_1} и g_{ρ_2} найдутся конъюнкции K_u и $\widehat{K}_v$ такие, что $\mathbf{x} K_u \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \widehat{K}_v \mathbf{y}$.

Но тогда $\mathbf{x}(K_u \circ \widehat{K}_v)\mathbf{y}$ и, поскольку $K_u \circ \widehat{K}_v$ присутствует в ДНФ из (6) функции g_ρ, выполнено $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$. Следовательно, $\rho_1 \cdot \rho_2 \subseteq \rho$. Обратно, из $\mathbf{x}\rho\mathbf{y}$ следует существование в ДНФ из (6) функции g_ρ конъюнкции $K_u \circ \widehat{K}_v$ такой, что $\mathbf{x}(K_u \circ \widehat{K}_v)\mathbf{y}$. Тогда при некотором $\mathbf{z}$ имеем $xK_u\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}\widehat{K}_v\mathbf{y}$, что приводит к $\mathbf{x}\rho_1\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}\rho_2\mathbf{y}$ и означает $\mathbf{x}(\rho_1 \cdot \rho_2)\mathbf{y}$. Поэтому $\rho \subseteq \rho_1 \cdot \rho_2$. В итоге получаем $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Результат операции композиции не зависит от используемых* ДНФ: *разные* ДНФ *функций g_1 и g_2 приводят к разным* ДНФ *одной и той же функции $g_1 \circ g_2$.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть отношения ρ_1 и ρ_2 с $g_{\rho_1} = g_1$ и $g_{\rho_2} = g_2$. Функция $g_1 \circ g_2 = g_{\rho_1 \cdot \rho_2}$ однозначно определяется отношением $\rho_1 \cdot \rho_2$.

Утверждение 5. *Операция композиции функций g_1, g_2 и g_3*

a) *коммутативна, т. е.* $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$,

b) *ассоциативна, т. е.* $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$,

c) *монотонна, т. е.* $g_1 \geqslant g_2 \Rightarrow g_1 \circ g_3 \geqslant g_2 \circ g_3$.

Свойства a) и b) легко доказываются, исходя из того, что ими обладает операция композиции элементарных сомножителей, в чем можно убедиться непосредственно. Свойство c) вытекает из монотонности операции произведения отношений.

Из свойства b) следует, что можно рассматривать многоместную операцию $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_k$ и степени $g^k = g \circ g \circ \ldots \circ g$ (k раз).

Утверждение 6. *Для любых k и l, $1 \leqslant k < l$, выполнено неравенство $g^k \leqslant g^l$, а если K — конъюнкция, то $K^l = K$.*

Равенство $K^2 = K$ (приводящее к $K^l = K$) следует из идемпотентности операции композиции элементарных сомножителей.

Неравенство $g^{k+1} \geqslant g^k$ доказывается индукцией по k. При $k = 1$ для функции $g = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ имеем

$$g^2 = (K_1 \vee \ldots \vee K_s)^2 \geqslant K_1^2 \vee \ldots \vee K_s^2 = K_1 \vee \ldots \vee K_s = g.$$

Предположив $g^k \geqslant g^{k-1}$ и учитывая монотонность операции композиции, получаем $g^{k+1} = g^k \circ g \geqslant g^{k-1} \circ g = g^k$. Утверждение доказано.

Результат стабилизации неубывающей ограниченной последовательности $g \leqslant g^2 \leqslant \ldots \leqslant g^k \leqslant \ldots$ обозначим через $[g]$.

Определим *степени отношения* ρ, положив $\rho^1 = \rho$, $\rho^k = \rho^{k-1} \cdot \rho$, $k \geqslant 2$. Из теоремы 1 и утверждения 6 следует $\rho \subseteq \rho^2 \subseteq \ldots \subseteq \rho^k \subseteq \ldots$ Результат стабилизации этой неубывающей ограниченной последовательности, который обозначим через $[\rho]$, является транзитивным замыканием отношения ρ. Легко видеть, что оно является порядковым отношением (а для правильного отношения ρ — правильным) и функция $g_{[\rho]}$ совпадает с $[g_\rho]$.

Замечание. Произведение порядковых отношений обладает рядом свойств, не имеющих места для произвольных отношений. В их числе коммутативность $\rho_1\cdot\rho_2 = \rho_2\cdot\rho_1$, вытекающая из коммутативности операции композиции, и свойство неубывания степеней $\rho \subseteq \rho^2 \subseteq \ldots \subseteq \rho^k \subseteq \ldots$

2.3. Свойства отношений в терминах представляющих функций

Следующая теорема связывает свойства 1°–7° порядковых отношений со свойствами представляющих функций. Пусть $\tilde{0} = (0,\ldots,0)$ и $\tilde{1} = (1,\ldots,1)$ — наборы длины n.

Теорема 2. *Порядковое отношение ρ 1) рефлексивно, 2) иррефлексивно, 3) асимметрично, 4) полно, 5) транзитивно, 6) негатранзитивно и 7) ациклично тогда и только тогда, когда* 1) $g_\rho(\tilde{0},\tilde{1}) = 1$, 2) $g_\rho(\tilde{0},\tilde{1}) = 0$, 3) $g_\rho(P,P') \leqslant g^*_\rho(P',P)$, 4) $g_\rho(P,P') \geqslant g^*_\rho(P',P)$, 5) $g_\rho(P,P') \circ g_\rho(P,P') \leqslant g_\rho(P,P')$, 6) $g^*_\rho(P',P) \circ g^*_\rho(P',P) \leqslant g^*_\rho(P',P)$, 7) $[g_\rho](\tilde{0},\tilde{1}) = 0$.

Доказательство. Результаты пп. 1 и 2 следуют из $\mathbf{x}p_i\mathbf{x} = 0$, $\mathbf{x}p'_i\mathbf{x} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Далее, для асимметричного отношения ρ имеет место

$$\mathbf{x}\rho\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{y}\bar{\rho}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}(\bar{\rho})^{-1}\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}\rho^*\mathbf{y} \Rightarrow \rho \subseteq \rho^*.$$

Эти выкладки могут быть обращены, поэтому асимметрия отношения ρ эквивалентна включению $\rho \subseteq \rho^*$. Записав его в терминах представляющих функций с учетом утверждения 4, придем к п. 3 теоремы. П. 4 получается из него по двойственности; п. 5 вытекает из условия транзитивности в форме $\rho^2 \subseteq \rho$ и теоремы 1; п. 6 двойствен ему; п. 7 следует из того, что ацикличность отношения ρ эквивалентна иррефлексивности транзитивного замыкания $[\rho]$. Теорема 2 доказана.

Поскольку значение формулы на любом наборе вычислимо с полиномиальной сложностью, из пп. 1 и 2 теоремы 2 вытекает

Утверждение 7. *Задачи распознавания свойств рефлексивности и иррефлексивности отношения ρ по представляющей функции g_ρ, заданной формулой произвольного вида, полиномиальны.*

Покажем, что задачи распознавания антисимметрии (по ДНФ и КНФ, произвольных порядковых отношений и правильных) полиномиально эквивалентны соответствующим задачам для свойства асимметрии. По двойственности этот результат переносится на связность и полноту.

Положим $D_0 = p_1 \vee \bar{p}'_1 \vee \ldots \vee p_n \vee \bar{p}'_n$, $D_0^+ = p_1 \vee \ldots \vee p_n$. Легко видеть, что представляющая функция отношения, полученного из ρ удалением всех диагональных пар $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, может быть записана в виде $D_0 \wedge g_\rho$ ($D_0^+ \wedge g_\rho$ для правильных отношений), и поэтому отношение ρ антисимметрично тогда и только тогда, когда отношение с представляющей функцией $D_0 \wedge g_\rho$ (либо $D_0^+ \wedge g_\rho$) асимметрично. Поскольку ДНФ и КНФ функции $D_0 \wedge g_\rho$ (и приведенные ДНФ и КНФ функции $D_0^+ \wedge g_\rho$) строятся по ДНФ и КНФ (приведенным ДНФ и КНФ) функции g_ρ с полиномиальной сложностью, задачи распознавания антисимметрии полиномиально сводятся к соответствующим задачам для асимметрии. Обратная сводимость вытекает в силу утверждения 7, поскольку отношение асимметрично тогда и только тогда, когда оно антисимметрично и иррефлексивно.

Таким образом, результаты работы, относящиеся к распознаванию свойств асимметрии и полноты, распространяются на антисимметрию и связность.

3. Полиномиально распознаваемые свойства отношений

3.1. Асимметрия, полнота, ацикличность

Следующий факт справедлив для произвольных, и в частности для правильных, порядковых отношений.

Утверждение 8. *Задачи распознавания свойства асимметрии порядковых отношений по представляющей функции в* ДНФ *и свойства полноты по представляющей функции в* КНФ *полиномиальны.*

Достаточно рассмотреть случай асимметрии; на полноту утверждение распространяется по двойственности. В соответствии с п. 3 теоремы 2 асимметрия отношения ρ эквивалентна условию $g_\rho(P, P') \leqslant g_\rho^*(P', P)$. Если функция $g_\rho(P, P')$ представлена в ДНФ, то $g_\rho^*(P', P)$ является КНФ, а поскольку

$$(K_1 \vee \ldots \vee K_s \leqslant D_1 \ldots D_t) \Leftrightarrow (K_i \leqslant D_j,\ 1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant t),$$

условие асимметрии допускает полиномиальную проверку.

Следующий результат также относится к произвольным порядковым отношениям (в том числе — правильным).

Теорема 3. *Задача распознавания ацикличности порядковых отношений по представляющей функции в* ДНФ *полиномиальна.*

Доказательство. Случай $g_\rho \equiv 0$ тривиален. Будем считать, что $g_\rho \not\equiv 0$ и задано представление $g_\rho = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ в ДНФ.

Пусть отношение ρ ациклично. Тогда согласно п. 7 теоремы 2 имеем $[g_\rho](\tilde{0}, \tilde{1}) = 0$. Положим $K = K_1 \circ \ldots \circ K_s$. Из $K \leqslant [g_\rho]$ следует $K(\tilde{0}, \tilde{1}) = 0$.

В K найдется элементарный сомножитель q_{i_1}, совпадающий с p_{i_1} или $\bar{p}'_{i_1}$, поскольку на наборе $(\tilde{0},\tilde{1})$ сомножители всех других типов обращаются в 1. По определению композиции i_1-е элементарные сомножители конъюнкций $K_1,\ldots,K_s$ содержатся в множестве $\{p_{i_1},p'_{i_1},p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с p_{i_1} либо в множестве $\{\bar{p}_{i_1},\bar{p}'_{i_1},p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}\}$ и хотя бы один совпадает с $\bar{p}'_{i_1}$. Эти случаи сводятся друг к другу инвертированием оси i, а поскольку инвертирование не влияет на ацикличность, можно считать, что имеет место первый случай. Тогда при некоторых g_1, g_2, g_3 выполнено соотношение

$$g_\rho = p_{i_1}g_1 \vee p'_{i_1}g_2 \vee p'_{i_1}\bar{p}_{i_1}g_3 \leqslant p_{i_1} \vee p'_{i_1}g^{(1)}, \tag{7}$$

где $g^{(1)} = g_2 \vee g_3$. Функция $g^{(1)}$ может быть получена из g_ρ подстановкой $p_{i_1}=0$, $p'_{i_1}=1$.

Если $g^{(1)} \not\equiv 0$, введем отношение ρ_1 на $\mathbf{R}^{n-1}$, положив $g_{\rho_1}=g^{(1)}$. Покажем, что отношение ρ_1 ациклично. Для простоты будем считать, что $i_1=1$. Допустим, что в ρ_1 имеется цикл $\mathbf{x}'_1\rho_1\mathbf{x}'_2\rho_1\ldots\rho_1\mathbf{x}'_t\rho_1\mathbf{x}'_1$. Возьмем произвольное число a и образуем наборы $\mathbf{x}_i=(a,\mathbf{x}'_i)\in\mathbf{R}^n$, $1\leqslant i\leqslant t$. Тогда для $j=i+1 \pmod t$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_i\rho_1\mathbf{x}'_j &\Rightarrow g_{\rho_1}(\mathbf{x}'_ip_2\mathbf{x}'_j,\ldots,\mathbf{x}'_ip_n\mathbf{x}'_j,\mathbf{x}'_ip'_2\mathbf{x}'{}_j,\ldots,\mathbf{x}'_ip'_n\mathbf{x}'_j)=1\\ &\Rightarrow g_\rho(0,\mathbf{x}'_ip_2\mathbf{x}'_j,\ldots,\mathbf{x}'_ip_n\mathbf{x}'_j,1,\mathbf{x}'_ip'_2\mathbf{x}'_j,\ldots,\mathbf{x}'_ip'_n\mathbf{x}'_j)=1\Rightarrow\mathbf{x}_i\rho\mathbf{x}_j.\end{aligned}$$

Это означает существование в ρ цикла $\mathbf{x}_1\rho\mathbf{x}_2\rho\ldots\rho\mathbf{x}_t\rho\mathbf{x}_1$ и противоречит ацикличности ρ.

Применяя к ацикличному отношению ρ_1 те же рассуждения, что и к ρ, получаем (с точностью до инвертирования осей) $g_{\rho_1}\leqslant p_{i_2}\vee p'_{i_2}g^{(2)}$. Подставляя это неравенство в (7), имеем

$$g_\rho \leqslant p_{i_1}\vee p'_{i_1}(p_{i_2}\vee p'_{i_2}g^{(2)}) = p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee p'_{i_1}p'_{i_2}g^{(2)}.$$

Если $g^{(2)}\not\equiv 0$, эту цепочку можно продолжить. После того как при некотором k окажется $g^{(k)}\equiv 0$, получим

$$g_\rho\leqslant p_{i_1}\vee p'_{i_1}p_{i_2}\vee\ldots\vee p'_{i_1}p'_{i_2}\ldots p'_{i_{k-1}}p_{i_k}.$$

Согласно (4) выражение в правой части задает лексикографию. Поскольку рассуждения велись с точностью до инвертирования осей, всякое ацикличное отношение может быть дополнено до отношения $\hat{\lambda}$, полученного из лексикографии инвертированием некоторых осей.

Верно и обратное: всякое отношение ρ, дополнимое до отношения $\hat{\lambda}$ указанного вида, ациклично. Действительно, легко непосредственно проверить, что представляющая функция (4) удовлетворяет условиям $g_\lambda(\tilde{0},\tilde{1})=0$ и $g_\lambda\circ g_\lambda\leqslant g_\lambda$. По теореме 2 отношение λ иррефлексивно и транзитивно и поэтому является строгим частичным порядком. Следовательно, лексикография ациклична. То же справедливо для отношения $\hat{\lambda}$, полученного инвертированием осей, и отношения $\rho \subseteq \hat{\lambda}$.

Таким образом, отношение λ ациклично тогда и только тогда, когда в применении к нему описанная процедура может быть доведена до конца (находит $\hat{\lambda}$). Поскольку процедура полиномиальна, теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Задача распознавания ацикличности правильного отношения по представляющей функции в* КНФ *полиномиальна.*

Доказательство. Пусть приведенная КНФ монотонной функции g имеет вид $\hat{p}_{j_1} \ldots \hat{p}_{j_t} D_1 \ldots D_m$, где $\hat{p}_{j_u} \in \{p_{j_u}, p'_{j_u}\}$, $1 \leqslant u \leqslant t$, — все ее одноэлементные дизъюнкции. Положим $J(g) = \{j_1, \ldots, j_t\}$ (это множество может быть пустым).

Алгоритм распознавания ацикличности правильного отношения ρ состоит из шагов i, на каждом из которых строится приведенная КНФ некоторой функции $g^{(i)}$.

Шаг 0. Полагаем $g^{(0)} = g_\rho$.

Шаг i. Если (a) $g^{(i-1)} \equiv 0$, (b) $g^{(i-1)} \equiv 1$ или (c) $g^{(i-1)} \not\equiv \mathrm{const}$ и $J(g^{(i-1)}) = \varnothing$, то алгоритм завершен. Иначе путем подстановки в приведенную КНФ $g^{(i-1)}$ значений $p_j = 0$ и $p'_j = 1$ для всех $j \in J(g^{(i-1)})$ находится КНФ функции $g^{(i)}$ и осуществляется ее приведение. Шаг i завершен.

Если остановка произойдет по условию (a), то отношение ρ ациклично, если по условию (b) или (c), то ρ циклично. Докажем корректность алгоритма.

Для монотонной функции g, приведенная ДНФ которой имеет вид $K_1 \vee \ldots \vee K_s$, обозначим через $I(g)$ множество индексов переменных, входящих в конъюнкцию $K_g = K_1 \circ \ldots \circ K_s$. Нетрудно видеть, что $j \in I(g)$ тогда и только тогда, когда при подстановке в g значений $p_j = p'_j = 0$ и $p_i = p'_i = 1$ для $i \neq j$ она принимает значение 0. Условие вхождения j в множество $J(g)$ имеет тот же вид, поэтому $I(g) = J(g)$.

Рассмотрим последовательно шаги $1, 2, \ldots$ алгоритма.

На шаге 1, если остановка произошла по условию (a), то $g_\rho = g^{(0)} \equiv 0$ и ρ ациклично. В случае (b) выполнено $g_\rho \equiv 1$ и поэтому ρ содержит циклы. Если имеет место условие (c), то $I(g_\rho) = J(g_\rho) = \varnothing$ и $K_{g_\rho} \equiv 1$. В силу $[g_\rho] \geqslant K_{g_\rho}$ отношение $[\rho]$ рефлексивно и, следовательно, ρ циклично.

Если на шаге 1 алгоритм не завершился, то при $g^{(1)} \not\equiv \mathrm{const}$ введем отношение ρ_1, положив $g_{\rho_1} = g^{(1)}$ (оно правильно). Покажем, что ρ ациклично тогда и только тогда, когда $g^{(1)} \equiv 0$, либо ρ_1 ациклично.

Пусть ρ ациклично. Тогда, если ρ_1 определено, его ацикличность следует из доказательства теоремы 3, ибо g_{ρ_1} — результат подстановки в g_ρ значений $p_j = 0$, $p'_j = 1$ для некоторых j. Если ρ_1 не определено, то $g^{(1)} \equiv 0$, ибо при $g^{(1)} \equiv 1$ имеет место $g_\rho(\tilde{0}, \tilde{1}) = g^{(1)}(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$ и отношение ρ рефлексивно, что противоречит его ацикличности.

Обратно, пусть ρ_1 определено и ациклично либо выполнено $g^{(1)} \equiv 0$. Пусть для определенности $J(g_\rho) = \{1, \dots, k\}$. Из $I(g_\rho) = J(g_\rho)$ следует, что каждая конъюнкция в приведенной ДНФ функции g_ρ содержит сомножители $q_j \in \{p_j, p'_j\}$ для всех $j \in J(g_\rho)$. Путем группировки членов и вынесения за скобки представим g_ρ в виде

$$g_\rho = g' \vee p'_1 \dots p'_k g^{(1)}, \tag{8}$$

где функция g' при подстановке $p_j = 0$, $p'_j = 1$ для всех $j \in J(g_\rho)$ обращается в 0, а $g^{(1)} = g_{\rho_1}$. Из сказанного следует, что

$$\begin{aligned} g' \leqslant p_1 p'_2 \dots p'_k \vee p'_1 p_2 p'_3 \dots p'_k \vee \dots \vee p'_1 \dots p'_{k-1} p_k \\ \leqslant p_1 \vee p'_1 p_2 \vee \dots \vee p'_1 \dots p'_{k-1} p_k. \end{aligned} \tag{9}$$

Если $g^{(1)} \equiv 0$, то $g_\rho = g'$. Поскольку правая часть в (9) задает лексикографию, которая ациклична, отношение ρ ациклично. Если $g^{(1)} \equiv 1$, то $g_\rho = p'_1 \dots p'_k$. Это отношение не является ацикличным, поскольку рефлексивно. Осталось рассмотреть случай $g^{(1)} \not\equiv \mathrm{const}$, т. е. когда ρ_1 определено. Из доказательства теоремы 3 следует, что ацикличное отношение ρ_1 дополнимо до некоторой лексикографии; пусть

$$g^{(1)} = g_{\rho_1} \leqslant p_{k+1} \vee p'_{k+1} p_{k+2} \vee \dots \vee p'_{k+1} \dots p'_{n'-1} p_{n'}.$$

Подстановка (9) и этого неравенства в (8) дает

$$g_\rho \leqslant p_1 \vee p'_1 p_2 \vee \dots \vee p'_1 \dots p'_{k-1} p_k \vee p'_1 \dots p'_k (p_{k+1} \vee p'_{k+1} p_{k+2} \vee \dots \vee p'_{k+1} \dots p'_{n'-1} p_{n'}).$$

Правая часть задает лексикографию, поэтому ρ ациклично.

На шаге 2, если $g^{(1)} \equiv 0$, то, как было показано, ρ ациклично, а если $g^{(1)} \equiv 1$, то ρ циклично. При $g^{(1)} \not\equiv \mathrm{const}$ ацикличность отношения ρ эквивалентна ацикличности ρ_1. Поэтому в предыдущих рассуждениях нужно заменить ρ на ρ_1 (т. е. $g^{(0)} = g_\rho$ на $g^{(1)} = g_{\rho_1}$) и поступать подобным образом, пока алгоритм не завершится. Это обязательно произойдет, поскольку на каждом шаге число переменных функции $g^{(i)}$ уменьшается. Теорема 4 доказана.

3.2. Транзитивность и негатранзитивность

Из пп. 5 и 6 теоремы 2 вытекает

Утверждение 9. *Задачи распознавания для правильных отношений по представляющим функциям в ДНФ свойства транзитивности и в КНФ свойства негатранзитивности полиномиальны.*

Действительно, если $g_\rho = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ — приведенная ДНФ, то условие $g_\rho \circ g_\rho \leqslant g_\rho$ выполнено тогда и только тогда, когда для любых ее конъюнкций K_i и K_j в g_ρ найдется такая K_l, что $K_i \circ K_j \leqslant K_l$. Результат для негатранзитивности получается по двойственности.

Представляется естественным распространить этот подход к проверке транзитивности правильных отношений на случай КНФ, попытавшись ввести для функций в КНФ операцию композиции, соответствующую произведению отношений. Для доказательства аналога утверждения 9 было бы достаточно определить операцию $g_1 \circ g_2$ для $g_1 = g_2$ и приведенных КНФ. Однако, как показывает следующее утверждение, по-видимому, эффективно это сделать невозможно.

Утверждение 10. *Задача нахождения по монотонной функции g в приведенной* КНФ *функции $g \circ g$ в виде какой-либо формулы является* NP-*трудной.*

Ясно, что отношение ρ асимметрично тогда и только тогда, когда ρ^2 иррефлексивно. Если бы существовал полиномиальный алгоритм нахождения по приведенной КНФ функции g_ρ какой-нибудь формулы для $g_\rho \circ g_\rho = g_{\rho^2}$, то согласно утверждению 7 существовал бы полиномиальный алгоритм распознавания асимметрии по приведенной КНФ, а эта задача NP-трудна (см. п. 4.2).

Таким образом, эффективная проверка для правильных отношений ρ в КНФ условия $\rho^2 \subseteq \rho$ транзитивности путем нахождения ρ^2, по-видимому, невозможна. Эффективный алгоритм проверки удается построить на основе некоторого представления транзитивных порядковых отношений, аналогичного представлению частичных порядков в виде пересечения линейных (см. леммы 1 и 2).

Теорема 5. *Задачи распознавания для правильных отношений по представляющим функциям в КНФ свойства транзитивности и в ДНФ свойства негатранзитивности полиномиальны.*

Можно ограничиться случаем транзитивности. Для него теорема доказана в [4] путем сведения к некоторым полиномиально решаемым задачам. Позже в [5] было найдено простое явное условие транзитивности (см. ниже свойство T).

Поскольку в данном пункте рассматриваются лишь правильные отношения ρ и монотонные функции g, под дизъюнкциями и КНФ будем понимать монотонные, т. е. не содержащие отрицаний переменных. Если G — некоторая КНФ, то через $\mathbf{D}_G$ будем обозначать множество ее дизъюнкций.

Для монотонной дизъюнкции $D = d_1 \vee \ldots \vee d_n$ положим $J_0(D) = \{j \mid d_j = p_j\}$, $J_1(D) = \{j \mid d_j = p'_j\}$, $J(D) = J_0(D) \cup J_1(D)$. Скажем, что КНФ обладает *свойством* T, если для каждой дизъюнкции $D \in \mathbf{D}_G$

множество $J_1(D)$ не более чем одноэлементно и $J(D)$ содержится не более одного элемента, не входящего в объединение множеств $J_1(D')$ для всех $D' \in \mathbf{D}_G$ таких, что $J_0(D') \subseteq J(D)$ и $D' \neq D$.

Доказательство того, что правильным транзитивным отношениям (и только им) соответствуют приведенные КНФ со свойством T, распадается на ряд лемм. Отношение ρ, для которого $g_\rho \equiv \mathrm{const}$, назовем *тривиальным*, а в противном случае — *нетривиальным.*

Лемма 1. *Нетривиальное правильное отношение ρ является частичным порядком (строгим) тогда и только тогда, когда его представляющая функция может быть преобразована к виду $g_\rho = g_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g_{\lambda_s}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — отношения лексикографии.*

Доказательство. 1. Вначале установим, что для правильного частичного порядка ρ функция g_ρ представима в указанном виде. Достаточно убедиться, что если $g_\rho(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 0$ для некоторого набора $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') \in \Sigma$, то ρ можно дополнить до некоторой лексикографии λ с сохранением свойства $g_\lambda(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1 (существует i такое, что $\sigma_i' = 0$). С набором $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}')$ свяжем конъюнкцию $\widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'} = q_1 \ldots q_n$, где для любого j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$q_j = \begin{cases} p_j, & \text{если } \sigma_j = \sigma_j' = 0, \\ p_j', & \text{если } \sigma_j = 0, \sigma_j' = 1, \\ 1, & \text{если } \sigma_j = \sigma_j' = 1. \end{cases}$$

Убедимся, что отношение ρ', задаваемое функцией $g_{\rho'} = g_\rho \vee \widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'}$, ациклично. Допустим противное. Тогда в силу транзитивности ρ найдется такая конъюнкция K из ДНФ функции g_ρ, что $(K \circ \widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'})(\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$. Покажем, что в этом случае $K(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 1$. Если $\sigma_j = \sigma_j' = 0$, то $q_j = p_j$ и в конъюнкции $K \circ \widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'}$ сомножитель с номером j отсутствует, поэтому он отсутствует и в K. При $\sigma_j = 0$ и $\sigma_j' = 1$ имеем $q_j = p_j'$ и j-й сомножитель в K может быть равным либо p_j', либо 1. Отсюда следует, что $K(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 1$; это приводит к противоречию $g_\rho(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 1$.

В соответствии с доказательством теоремы 3 ацикличное отношение ρ' дополним до лексикографии λ. Рассмотрим произвольные $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ такие, что $x_j > y_j$ при $\sigma_j = \sigma_j' = 0$, $x_j = y_j$ при $\sigma_j = 0$ и $\sigma_j' = 1$, $x_j < y_j$ при $\sigma_j = \sigma_j' = 1$. Из $\mathbf{x}\widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'}\mathbf{y}$ и $g_\lambda \geqslant \widehat{K}_{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'}$ следует $\mathbf{x}\lambda\mathbf{y}$. Так как λ асимметрично, то $\mathbf{y}\bar{\lambda}\mathbf{x}$, а это, как нетрудно видеть, означает, что $g_\lambda(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}') = 0$.

Случай 2 ($\widetilde{\sigma}' = \tilde{1}$). Положим $I = \{i \mid \sigma_i = 0\}$. Обозначим через $g_\rho \mid_I$ функцию, полученную из g_ρ подстановками $p_i = p_i' = 1$, $i \notin I$, а через ρ_I отношение на $\mathbf{R}^{|I|}$ с представляющей функцией $g_\rho \mid_I$. Отношение ρ_I

транзитивно, ибо транзитивно ρ, и иррефлексивно, ибо $g_\rho\mid_I(\tilde{0}_I,\tilde{1}_I) = g_\rho(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') = 0$. Поэтому ρ_I — частичный порядок. Дополним ацикличное отношение ρ_I до лексикографии λ_I на $\mathbf{R}^{|I|}$. Отношение λ на $\mathbf{R}^n$ такое, что $g_\lambda = g_{\lambda_I}$, является искомым, ибо $g_\lambda = g_\rho\mid_I \geqslant g$ и

$$g_\lambda(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') = g_{\lambda_I}(\tilde{0}_I,\tilde{1}_I) = g_\rho\mid_I(\tilde{0}_I,\tilde{1}_I) = g_\rho(\widetilde{\sigma},\widetilde{\sigma}') = 0.$$

Таким образом, п. 1 доказан.

2. Лексикография λ_I является частичным порядком (см. доказательство теоремы 3). Поэтому отношение ρ, представимое в виде $\rho = \lambda_1 \cap \ldots \cap \lambda_s$, также является частичным порядком. Лемма 1 доказана.

Дальше понадобится вид приведенных ДНФ и КНФ представляющей функции отношения λ^*, двойственного лексикографии. Они получаются из (5) и (4) применением утверждения 4:

$$g^*_\lambda = p_1 \vee p'_1p_2 \vee \ldots \vee p'_1\ldots p'_{k-2}p_{k-1} \vee p'_1\ldots p'_{k-1}p'_k, \tag{10}$$

$$g^*_\lambda = p'_1(p_1 \vee p'_2)(p_1 \vee p_2 \vee p'_3)\ldots(p_1 \vee \ldots \vee p_{k-1} \vee p'_k). \tag{11}$$

Лемма 2. *Нетривиальное правильное отношение ρ транзитивно и рефлексивно тогда и только тогда, когда его представляющая функция g_ρ может быть преобразована к виду $g_\rho = g^*_{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge g^*_{\lambda_s}$, где $\lambda^*_1,\ldots,\lambda^*_s$ — отношения, двойственные лексикографии.*

Доказательство. 1. Пусть отношение ρ рефлексивно. Обозначим через I множество номеров i переменных (p_i или p'_i), встречающихся в приведенной ДНФ функции g_ρ.

Скажем, что конъюнкция K имеет *тип* 0, если $K(\tilde{0},\tilde{1}) = 1$. Все (отличные от 1) элементарные сомножители конъюнкций типа 0 имеют вид p'_i. Поскольку ρ рефлексивно, в приведенной ДНФ функции g_ρ содержится некоторая конъюнкция типа 0. Такая конъюнкция (обозначим ее K_0) единственна, ибо при наличии двух конъюнкций K и K' типа 0 конъюнкция $K \circ K'$ также имеет тип 0 и поглощает каждую из них. В силу транзитивности ρ имеем $g_\rho \geqslant K \circ K'$ и конъюнкции K и K' не могут присутствовать в приведенной ДНФ. Конъюнкция K_0 состоит из всех сомножителей p'_i для $i \in I$, ибо если для некоторого $i \in I$ сомножитель отсутствует, то, взяв в ДНФ g_ρ конъюнкцию K, содержащую сомножитель p_i или p'_i, получим композицией конъюнкцию $K \circ K_0 \leqslant g$, поглощающую K, что противоречит приведенности ДНФ.

Запишем g_ρ в виде $g_\rho = g \vee K_0$, где g — дизъюнкция всех конъюнкций из ДНФ функции g_ρ, отличных от K_0. Введем отношение ρ', положив $g_{\rho'} = g$. Отношение ρ' транзитивно, поскольку для любых конъюнкций K и K' из ДНФ функции g композиция $K \circ K'$ не может поглощаться конъюнкцией K_0, имеющей большую длину, и в силу транзитивности ρ имеем $g_\rho \geqslant K \circ K'$. Так как g не содержит конъюнкций типа 0, ρ' иррефлексивно и, следовательно, представляет собой частичный порядок.

Представив $g_{\rho'}$ по лемме 2, получим

$$g_\rho = g_{\lambda_1} \dots g_{\lambda_s} \vee K_0 = (g_{\lambda_1} \vee K_0) \dots (g_{\lambda_s} \vee K_0). \tag{12}$$

Рассмотрим произвольный сомножитель $g_{\lambda_i} \vee K_0$ этого представления. Путем перенумерации переменных в соответствии с (4) он может быть записан в виде

$$g_{\lambda_i} \vee K_0 = p_1 \vee p_1' p_2 \vee \dots \vee p_1' \dots p_{u-1}' p_u \vee p_1' \dots p_v', \quad v = |I| \geqslant u,$$

где $|\cdot|$ означает мощность множества. Если $v > u$, введем отношения $\lambda_{i,j}^*$, $1 \leqslant j \leqslant v-u$, функцией

$$g_{\lambda_{i,j}^*} = p_1 \vee p_1' p_2 \vee \dots \vee p_1' \dots p_{u-1}' p_u \vee p_1' \dots p_u' p_{u+j}'.$$

Тогда $g_{\lambda_i} \vee K_0 = g_{\lambda_{i,1}^*} \dots g_{\lambda_{i,v-u}^*}$. Если же $v = u$, то $g_{\lambda_i} \vee K_0 = g_{\lambda_i^*}$. Подстановкой полученных выражений для $g_{\lambda_i} \vee K_0$ в (12) получаем нужное представление функции g_ρ.

2. Пользуясь теоремой 2, легко проверить, что отношения λ_i^* рефлексивны и транзитивны. Поэтому и отношение ρ, являющееся их пересечением, обладает этими свойствами. Лемма 2 доказана.

Для дизъюнкции D номера из множества $J_1(D)$ будем называть *основными*. Величину $\tau(D) = |J_1(D)|$ назовем *типом* дизъюнкции D. Отметим, что если КНФ G обладает свойством T, то для $D \in \mathbf{D}_G$ имеем $\tau(D) \in \{0, 1\}$. Если $\tau(D) = 1$, то единственный основной номер дизъюнкции D будем обозначать через $i(D)$. Будем говорить, что дизъюнкция D' *подчинена* дизъюнкции D, и записывать $D \succ D'$, если $J_0(D') \subseteq J(D)$ и $D' \neq D$. Величину $l(D) = |J(D)|$ будем называть *длиной* дизъюнкции D.

Лемма 3. *Если* КНФ G *обладает свойством* T *и* КНФ G' *получена из* G *приведением, то* G' *также обладает свойством* T.

Доказательство. Пусть $D \in \mathbf{D}_{G'}$, $i \in J_0(D)$ и D' — дизъюнкция из $\mathbf{D}_G$ такая, что $D \succ D'$, $i(D') = i$. Если $D' \notin \mathbf{D}_{G'}$, то найдется $D'' \in \mathbf{D}_{G'}$, $D' \geqslant D''$. Дизъюнкция D'' не может иметь тип 0, ибо тогда $D'' \leqslant D$, что противоречит приведенности G'. Из $\tau(D'') = 1$ и $D \succ D' \geqslant D''$ следует $D \succ D''$ и $i(D'') = i$, т. е. роль дизъюнкции D', устраненной в результате приведения, играет $D'' \in \mathbf{D}_{G'}$. Лемма 2 доказана.

Введем общее обозначение λ' для λ и λ^*. Отношение λ будем называть *строгой лексикографией*, а λ^* — *нестрогой лексикографией*. Дизъюнкцию, совпадающую с последней дизъюнкцией в разложении (5) или (11) функции $g_{\lambda'}$, будем называть *завершающей* в λ'. Если λ' порождено упорядочением $\mathbf{I} = (i_1, \dots, i_k)$, то завершающая дизъюнкция имеет вид $p_{i_1} \vee \dots \vee p_{i_k}$ или $p_{i_1} \vee \dots \vee p_{i_{k-1}} \vee p_{i_k}'$.

Лемма 4. *Если приведенная* КНФ G *обладает свойством* T, *то для любой дизъюнкции* $D \in \mathbf{D}_G$ *существует лексикография* λ'_D *такая, что* $g_{\lambda'_D} \geqslant G$ *и дизъюнкция* D *является завершающей в* λ'_D.

Доказательство будем вести индукцией по длине k дизъюнкций из $\mathbf{D}_G$.

Основание индукции. Пусть k_0 — наименьшая длина дизъюнкций из G. Убедимся, что $k_0 = 1$. Предположим, что это не так и $k_0 \geqslant 2$. Рассмотрим дизъюнкцию $D \in \mathbf{D}_G$ с $l(D) = k_0$. Для нее $|J_0(D)| \geqslant k_0 - 1$, т. е. $J_0(D) \neq \varnothing$. По свойству T в G имеется дизъюнкция D', подчиненная дизъюнкции D. Но поскольку $l(D') \geqslant k_0$, это может иметь место лишь тогда, когда $\tau(D) = 0$ и $J(D) = J_0(D) = J(D')$. Но тогда D поглощает D', что противоречит приведенности G. Таким образом, $k_0 = 1$ и D имеет вид p_j или p'_j. В качестве λ'_D можно взять лексикографию, совпадающую с p_j или p'_j.

Индуктивный шаг. Предположим, что утверждение справедливо для всех дизъюнкций из G, длина которых не больше $k-1$, $k \geqslant 2$, и пусть $l(D) = k$. Рассмотрим отдельно случаи $\tau(D) = 1$ и $\tau(D) = 0$.

Случай 1: $D = p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_{k-1}} \vee p'_{i_k}$. Здесь $J_0(D) = \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ и по свойству T в G имеются такие дизъюнкции D_r $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$, подчиненные D, что $i_r = i(D_r)$. В силу предположения индукции найдутся лексикографии $\lambda'_r = \lambda^*_r$ такие, что $g_{\lambda^*_r} \geqslant G$ и дизъюнкция D_r является завершающей в λ^*_r. Пусть лексикография λ^*_r порождается упорядочением $\mathbf{j}_r$. Образуем последовательность $\mathbf{j}_1 \ldots \mathbf{j}_{k-1}$ путем приписывания $\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_{k-1}$ друг к другу и вычеркнем из нее повторяющиеся элементы, оставив каждый элемент лишь в том месте, где он встретился впервые. Полученную последовательность обозначим через $\mathbf{j}$. Все ее элементы входят в множества $J(D_r)$ и, по определению подчиненности, — в множество $J_0(D)$. С другой стороны, каждое $j_r \in J_0(D)$ присутствует в $\mathbf{j}$. Поэтому $\mathbf{j}$ представляет собой перестановку множества $J_0(D)$. Образуем последовательность $\mathbf{j}'$ дописыванием к $\mathbf{j}$ элемента i_k и обозначим через λ^*_D нестрогую лексикографию, порождаемую последовательностью $\mathbf{j}'$.

Убедимся, что λ^*_D удовлетворяет требуемым условиям. Последняя дизъюнкция в разложении (11) для λ^*_D совпадает с D. Рассмотрим произвольную дизъюнкцию $D' \neq D$ из (11). Пусть $i(D') = j_t$ и этот номер возник в $\mathbf{j}$ из последовательности $\mathbf{j}_r$. Обозначим через D'' дизъюнкцию из разложения (11) для λ^*_D, в которой $i(D'') = j_t$. Каждый элемент, предшествующий j_t в $\mathbf{j}_r$, предшествует j_t в $\mathbf{j}$. Поэтому $J_0(D'') \subseteq J_0(D')$. Отсюда с учетом $i(D') = i(D'')$ получаем $D'' \leqslant D'$. В силу предположения индукции это дает $D' \geqslant D'' \geqslant g_{\lambda^*_r} \geqslant G$. Таким образом, всякая дизъюнкция $D' \neq D$ из разложения (11) для λ^*_D удовлетворяет неравенству

$D' \geqslant G$, а для D такое неравенство вытекает из $D \in \mathbf{D}_G$. В результате получаем $g_{\lambda_D^*} \geqslant G$.

Случай 2: $D = p_{i_1} \vee \ldots \vee p_{i_k}$. По свойству T в КНФ G имеются такие дизъюнкции D_r ($1 \leqslant r \leqslant k'$, где $k' = k - 1$ или $k' = k$), подчиненные D, что $i_r = i(D_r)$. Далее аналогично доказательству случая 1 образуем последовательность $\mathbf{j}$ путем устранения из $\mathbf{j}_1 \ldots \mathbf{j}_{k'}$ повторяющихся элементов. Обозначим через $\mathbf{j}'$ последовательность, совпадающую с $\mathbf{j}$, если длина $\mathbf{j}$ равна k, и полученную из $\mathbf{j}$ приписыванием недостающего элемента из $\{i_1, \ldots, i_k\}$, если длина $\mathbf{j}$ равна $k - 1$. Строгую лексикографию, порождаемую упорядочением $\mathbf{j}'$, обозначим через λ_D. Дизъюнкция D является для нее завершающей. Неравенство $g_{\lambda_D} \geqslant G$ доказывается аналогично случаю 1. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если ρ — правильное отношение и $g_\rho \neq \mathrm{const}$, то ρ транзитивно тогда и только тогда, когда приведенная* КНФ *функции g_ρ обладает свойством T.*

Доказательство. 1. Пусть правильное отношение ρ транзитивно. Тогда по леммам 1 и 2 функция g_ρ представима в виде $g_\rho = g_{\lambda'_1} \ldots g_{\lambda'_s}$, где λ'_i означает λ_i или λ_i^*. Заменив каждый сомножитель $g_{\lambda'_i}$ по одной из формул (5) или (11), придем к некоторой КНФ G функции g_ρ. Поскольку КНФ (5) и (11) обладают свойством T, это справедливо и для G. В силу леммы 3 КНФ G_ρ, полученная из G приведением, также обладает свойством T.

2. Обратно, пусть приведенная КНФ функции g_ρ обладает свойством T. Согласно лемме 4 для каждой ее дизъюнкции D существует такая λ'_D, что $D \geqslant g_{\lambda'_D} \geqslant g_\rho$. Отсюда следует, что функция g_ρ представима конъюнкцией всех $g_{\lambda'_D}$. Каждая функция $g_{\lambda'_D}$ удовлетворяет условию п. 5 теоремы 2. Поэтому отношения λ'_D транзитивны и, следовательно, транзитивно их пересечение ρ. Лемма 5 доказана.

Поскольку условие T может быть проверено с полиномиальной сложностью, из нее следует теорема 5.

4. NP-трудные задачи проверки свойств отношений

4.1. Транзитивность, негатранзитивность и ацикличность

Теорема 6. *Задачи проверки свойств транзитивности и негатранзитивности порядковых отношений по представляющим функциям в* ДНФ *и* КНФ *и свойства ацикличности по представляющей функции в* КНФ NP-*трудны.*

Доказательство. Укажем полиномиальное сведение (по Тьюрингу) к каждой из этих задач задачи выполнимости КНФ. Рассмотрим произвольную КНФ $G = D_1 D_2 \ldots D_s$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$.

1. *Распознавание транзитивности по* ДНФ. Если все дизъюнкции КНФ G содержат некоторую переменную p_i, причем в одной и той же форме (p_i или $\bar{p}_i$), то КНФ выполнима. Поэтому достаточно ограничиться случаем, когда этого нет. Введем новую переменную p_0 и зададим порядковое отношение ρ функцией $g_\rho = p_0\overline{G} = p_0\overline{D}_1 \vee \ldots \vee p_0\overline{D}_s$ в форме ДНФ. Так как $g_\rho \leqslant p_0$ и

$$[g_\rho] \geqslant p_0\overline{D}_1 \circ \ldots \circ p_0\overline{D}_s = p_0(\overline{D}_1 \circ \ldots \circ \overline{D}_s) = p_0,$$

то транзитивность $\rho = [\rho]$ имеет место тогда и только тогда, когда $g_\rho = p_0$, т. е. когда КНФ G невыполнима.

2. *Распознавание транзитивности и ацикличности по* КНФ. Введем новую переменную p_0 и зададим порядковое отношение ρ функцией $g_\rho = p_0 \vee G = (p_0 \vee D_1)\ldots(p_0 \vee D_s)$. Если $G \not\equiv 0$, то, поскольку функция f_G, реализуемая КНФ G, не зависит от p_0 и p_0', композиция p_0 с любой конъюнкцией из ДНФ функции f_G образует пустую (т. е. тождественно равную 1) конъюнкцию. Это означает, что $[g_\rho] \equiv 1 \neq g_\rho$, и поэтому ρ нетранзитивно. Кроме того, $[g_\rho](\tilde{0}, \tilde{1}) = 1$ и по теореме 2 (п. 7) отношение ρ неациклично. Если же $G \equiv 0$, то $g_\rho = p_0$ и ρ транзитивно и ациклично. Таким образом, КНФ G невыполнима тогда и только тогда, когда ρ транзитивно (ациклично).

Результаты для негатранзитивности двойственны результатам для транзитивности. Теорема 6 доказана.

4.2. Асимметрия и полнота

Следующий результат, справедливый для правильных отношений, очевидным образом переносится на произвольные отношения.

Теорема 7. *Задачи распознавания для правильных порядковых отношений свойства асимметрии по представляющей функции в приведенной* КНФ *и свойства полноты по представляющей функции в приведенной* ДНФ NP-*трудны.*

В силу двойственности утверждений ограничимся асимметрией. Доказательство основано на следующем факте.

Лемма 6. *Задача о выполнении неравенства $f \leqslant f^*$ для монотонной булевой функции f, заданной приведенной* КНФ, NP-*трудна.*

Доказательство. 1. Вначале установим NP-трудность задачи о выполнении неравенства $f_1 \leqslant f_2^*$ для монотонных булевых функций

f_1 и f_2, заданных приведенными КНФ. Осуществим сведение к ней (по Тьюрингу) задачи о выполнимости КНФ.

Если заданная КНФ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ содержит дизъюнкцию $x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_p} \vee \bar{x}_{j_1} \vee \ldots \vee \bar{x}_{j_q}$, включающую переменные без отрицаний и с отрицаниями, то, введя новую переменную u, заменим эту дизъюнкцию произведением дизъюнкций

$$(u \vee x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_p})(\bar{u} \vee \bar{x}_{j_1} \vee \ldots \vee \bar{x}_{j_q}).$$

Осуществив все такие замены (для разных дизъюнкций переменные u различны), получим КНФ, в которой каждая дизъюнкция содержит либо только переменные, либо только их отрицания. Эта КНФ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима исходная КНФ.

Представим новую КНФ в виде $D_1 \ldots D_s D_{s+1} \ldots D_t$, где первые s дизъюнкций содержат переменные без отрицаний, а последние $t - s$ — с отрицаниями. Введем монотонные функции f_1 и f_2 в КНФ, положив $f_1 = D_1 \ldots D_s$ и $f_2 = (\overline{D}_{s+1} \vee \ldots \vee \overline{D}_t)^*$. Тогда КНФ может быть представлена как $f_1 \overline{f_2^*}$. Она невыполнима тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $f_1 \leqslant f_2^*$.

2. Укажем сведение NP-трудной задачи из п. 1 к задаче из формулировки леммы. Рассмотрим функцию $h(x, y, z) = (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$. Введя новые переменные u и v, зададим монотонную функцию

$$g = h(u, v \vee f_1, v f_2) = (u \vee v)(v \vee f_1)(u \vee f_2)$$

и преобразуем это представление к приведенной КНФ (с полиномиальной сложностью). Пользуясь самодвойственностью и симметрией функции h, находим

$$g^* = h(u, v f_1^*, v \vee f_2^*) = h(u, v \vee f_2^*, v f_1^*).$$

Покажем, что неравенство $f_1 \leqslant f_2^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $g \leqslant g^*$. Если выполнено неравенство $f_1 \leqslant f_2^*$, то $f_2 \leqslant f_1^*$, и из представлений функций g и g^*, используя монотонность h, получаем $g \leqslant g^*$. Обратно, если $g \leqslant g^*$, то $f_1 = g(u = 1, v = 0) \leqslant g^*(u = 1, v = 0) = f_2^*$. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Укажем сведение NP-трудной задачи из леммы 6 к задаче распознавания асимметричности правильного отношения ρ по приведенной КНФ функции g_ρ.

Пусть для монотонной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ в форме приведенной КНФ требуется проверить соотношение $f \leqslant f^*$. Введем правильное отношение ρ функцией $g_\rho = f(p_1, \ldots, p_n)$. Для него неравенство из п. 3 теоремы 2 приобретает вид

$$f(p_1, \ldots, p_n) \leqslant f^*(p_1', \ldots, p_n'). \tag{13}$$

Если неравенство $f \leqslant f^*$ для булевых функций выполнено, то в силу монотонности f^* (вытекающей из монотонности f) и неравенств $p_i \leqslant p'_i$ получаем

$$f(p_1, \dots, p_n) \leqslant f^*(p_1, \dots, p_n) \leqslant f^*(p'_1, \dots, p'_n).$$

Отсюда следует (13) и асимметрия отношения ρ.

Обратно, пусть ρ асимметрично, т. е. выполнено (13). Взяв произвольный булев набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ точки $\mathbf{x} = (2\alpha_1-1, \dots, 2\alpha_n-1)$ и $\mathbf{y} = (0, \dots, 0)$. Легко видеть, что $\mathbf{x}p_i\mathbf{y} = \mathbf{x}p'_i\mathbf{y} = \alpha_i$, (13) приобретает вид $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leqslant f^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Отсюда с учетом произвольности $\widetilde{\alpha}$ следует, что $f \leqslant f^*$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Березовский Б. А., Барышников Ю. М., Борзенко В. И., Кемпнер Л. М.** Многокритериальная оптимизация: математические аспекты. М.: Наука, 1989.
2. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. **Макаров И. М., Виноградская Т. М., Рубчинский А. М., Соколов В. Б.** Теория выбора и принятия решений. М.: Наука, 1982.
4. **Шоломов Л. А.** Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. Вып. 5. М.: Физматлит, 1994. С. 109–143.
5. **Шоломов Л. А.** Конъюнктивные представления транзитивных порядковых отношений // Проблемы выбора: теория и приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1998. С. 63–98.
6. **Шоломов Л. А.** Разделительная декомпозиция отношений в задачах многокритериального выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 63–89.

Адрес автора:

Институт системного анализа РАН,
пр. 60-летия Октября, 9,
117312 Москва, Россия.
E-mail: sholomov@cs.isa.ac.ru

Статья поступила
24 июня 2002 г.