ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2002. Серия 2. Том 9, № 1, 3–20

УДК 519.865

ЕВРОПЕЙСКИЙ ОПЦИОН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ РИСКОВЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ В СЛУЧАЕ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Н. С. Дёмин, М. Ю. Шиширин

На основе комбинаторного метода рассматривается задача нахождения стоимости опциона, портфеля и капитала для дискретного (B, S)-рынка ценных бумаг в случае рисковых активов нескольких типов. Проводится исследование свойств решения в случае платежных функций общего вида и конкретизация результатов для стандартного европейского опциона.

Введение

Современный этап исследования рынка ценных бумаг берет начало с работ [10, 12, 15], в которых в рамках модели (B, S)-рынка была сформулирована и решена задача расчета справедливой цены производной ценной бумаги типа опциона, портфеля и капитала. При этом в [10] и [15] рассматривается случай непрерывного времени, а в [12] — дискретного времени, причем для случая дискретного времени сформировались два основных метода исследования — статистический [7, 8] и комбинаторный [3, 5, 12]. В дальнейшем исследования были сосредоточены на изучении вопросов всевозможных способов хеджирования (страхования) опционов [2, 4, 13, 14, 16], расчета цен опционов с учетом моделей жизненного цикла продукта [11], взаимосвязи моделей с непрерывным и дискретным временем [6]. Естественным обобщением задачи является случай с рисковыми ценными бумагами нескольких типов.

В настоящее время ввиду сложности проблемы существенных продвижений в решении этой общей задачи нет. Укажем, например, на работу [1], где дана достаточно общая постановка задачи управления портфелем ценных бумаг, но решение получено не в виде расчетных формул, а в виде численного алгоритма. В данной статье для опционов европейского типа в одной частной постановке, допускающей разрешимость задачи, на основе комбинаторного подхода рассматривается случай рисковых ценных бумаг нескольких типов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим финансовый (B, S)-рынок, на котором обращаются ценные бумаги двух видов: безрисковые (банковский счет, облигации) и рисковые (акции), причем имеется M типов акций. Пусть $\{B_0, B_1, \ldots, B_N\}$ и $\{S_0^i, S_1^i, \ldots, S_N^i\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, — эволюции цен соответственно безрискового и рисковых активов в промежутке времени $[0, N]$, причем

$$B_{n+1} = \rho B_n, S_{n+1}^i = \xi_{n+1}^i S_n^i, \quad 0 \leqslant i \leqslant N, \tag{1.1}$$

где $\rho > 1$ — некоторая постоянная, а величины ξ_k^i могут соответственно принимать только значения u_i и d_i. Очевидно, что если $\rho = 1 + r$, $r > 0$, то r — постоянная процентная ставка. Пусть для i-го типа акции $u_i > 1$ — сдвиг цены акции вверх от текущей цены, а d_i, $0 < d_i < 1$,— сдвиг вниз. При введенных обозначениях цена i-го типа акции в момент $n + 1$ может быть $S_{n+1}^i = S_n^i u_i$ либо $S_{n+1}^i = S_n^i d_i$. Будем предполагать, что $d_i < \rho < u_i$. Это необходимо для предотвращения арбитража, т. е. получения прибыли без риска [5, 7]. Таким образом, имеем единственную траекторию возрастания цены безрискового актива $\{B_0, B_0\rho, \ldots, B_0\rho^N\}$ и 2^N возможных эволюций цены каждого типа акций $\{S_0^i, S_0^i\xi_1^i, \ldots, S_0^i\xi_1^i\xi_2^i, \ldots, \xi_N^i\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$. Так как будет использоваться комбинаторный подход для решения поставленной задачи, то на множестве траекторий $\{S_0^i, S_1^i, \ldots, S_N^i\}$ не задается никакой вероятностной меры, т. е. процесс изменения цен акций может быть любым.

Сценарий игры на финансовом рынке заключается в следующем. Обладая капиталом X_n в момент n, инвестор может распределить его между бумагами указанных типов. Пусть β_n и γ_n^i — соответственно количество безрисковых активов и акций i-го типа, суммарная стоимость которых (капитал) равна

$$X_n = \beta_n B_n + \sum_{i=1}^{M} \gamma_n^i S_n^i. \tag{1.2}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче в момент n портфель ценных бумаг — это набор $\{\beta_n, \gamma_n^1, \ldots, \gamma_n^M\}$. Можно перераспределить X_n, образовав новый портфель $\{\beta_{n+1}, \gamma_{n+1}^1, \ldots, \gamma_{n+1}^M\}$ при том же капитале

$$X_n = \beta_{n+1} B_n + \sum_{i=1}^{M} \gamma_{n+1}^i S_n^i. \tag{1.3}$$

В следующий момент $n+1$ за счет изменения цен активов цена этого портфеля становится равной

$$X_{n+1} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \sum_{i=1}^{M} \gamma_{n+1}^i S_{n+1}^i. \tag{1.4}$$

Далее процесс формирования капитала повторяется аналогично. Целью игры на финансовом рынке является достижение неравенства $X_N \geqslant f(S_N^1, \ldots, S_N^M)$ за счет перераспределения портфеля, где N — срок исполнения опциона, а $f(\cdot) \geqslant 0$ — функция выплат. Инвестор (владелец портфеля), являющийся продавцом опциона, взимая за него определенную плату в начальный момент, в момент N предъявления опциона обязуется выплатить сумму, не меньшую $f(\cdot)$. Чтобы обеспечить эту выплату, он должен играть на рынке, меняя содержание портфеля в зависимости от эволюции цен.

Определение 1. Справедливой ценой опциона C_N называется минимальный начальный капитал X_0, который позволяет продавцу добиться равенства

$$X_N = f(S_N^1, \ldots, S_N^M), \tag{1.5}$$

если он следует оптимальной стратегии игры.

Задача состоит в том, чтобы сделать расчет справедливой цены опциона с рисковыми ценными бумагами M типов, оптимального портфеля ценных бумаг и капитала для этой модели, исследовать свойства этого портфеля и конкретизировать результаты для стандартного европейского опциона. Так как для однозначного решения задачи требуется $M+1$ уравнений для нахождения $M+1$ неизвестных $\{\beta_k, \gamma_k^i\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, то необходимо доопределить 1) постановку задачи и 2) сценарий игры с ценными бумагами. Первое требование заключается в том, что функция выплат берется как аддитивная функция вида

$$f(S_N^1, \ldots, S_N^M) = \sum_{i=1}^{M} f^i(S_N^i), \tag{1.6}$$

причем $f^i(S) \geqslant 0$ и $f^i(0) = 0$. Второе требование заключается в том, что i-я локальная платежная функция $f^i(S_N^i)$ при $2 \leqslant i \leqslant M$ обеспечивается только i-м типом рискового актива, а $f^1(S_N^1)$ обеспечивается безрисковым активом и первым типом рискового актива.

Замечание 1. Подобное доопределение постановки задачи и сценария игры с ценными бумагами, по-видимому, не является единственным. Другие условия, обеспечивающие разрешимость задачи, могут привести к другим решениям.

2. Расчет портфеля, капитала и справедливой цены опциона

Лемма 1. *Для того чтобы обеспечить равенство*

$$X_N = f(S_N^1, \ldots, S_N^M), \tag{2.1}$$

в предшествующий момент необходимо иметь капитал

$$X_{N-1} = \rho^{-1}(pf^1(S^1_{N-1}u_1) + qf^1(S^1_{N-1}d_1)) + \sum_{i=2}^{M} \frac{f^i(S^i_{N-1}u_i)}{u_i}, \tag{2.2}$$

где

$$p = (\rho - d_1)/(u_1 - d_1), q = 1 - p = (u_1 - \rho)/(u_1 - d_1), \tag{2.3}$$

и этот капитал нужно распределить между безрисковым и рисковыми активами в соответствии с портфелем

$$\beta_N = \frac{\left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M} \dfrac{f^i(S^i_{N-1}u_i)}{u_i}\right)u_1 - f^1(S^1_{N-1}u_1)}{B_{N-1}(u_1 - \rho)}, \tag{2.4}$$

$$\gamma^1_N = \frac{f^1(S^1_{N-1}u_1) - \left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M} \dfrac{f^i(S^i_{N-1}u_i)}{u_i}\right)\rho}{S^1_{N-1}(u_1 - \rho)}, \tag{2.5}$$

$$\gamma^i_N = \frac{f^i(S^i_{N-1}u_i)}{S^i_{N-1}u_i}, \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из (1.1)–(1.5) следует, что

$$X_{N-1} = \beta_N B_{N-1} + \sum_{i=1}^{M} \gamma^i_N S^i_{N-1}, \tag{2.7}$$

$$X_N = f(S^1_N, \dots, S^M_N) = \beta_N B_{N-1}\rho + \sum_{i=1}^{M} \gamma^i_N S^i_{N-1}\xi^i_N. \tag{2.8}$$

В соответствии с произведенными доопределениями вида платежной функции (1.6) и сценария игры с ценными бумагами полагаем

$$f^1(S^1_{N-1}\xi^1_N) = \beta_N B_{N-1}\rho + \gamma^1_N S^1_{N-1}\xi^1_N, \tag{2.9}$$

$$f^i(S^i_{N-1}\xi^i_N) = \gamma^i_N S^i_{N-1}\xi^i_N, \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \tag{2.10}$$

Из (2.7)–(2.10) для портфеля $(\beta_N, \gamma^1_N, \dots, \gamma^M_N)$ следует система уравнений

$$B_{N-1}\beta_N + \sum_{i=1}^{M} S^i_{N-1}\gamma^i_N = X_{N-1}, \tag{2.11}$$

$$\rho B_{N-1}\beta_N + S^1_{N-1}\xi^1_N\gamma^1_N = f^1(S^1_{N-1}\xi^1_N), \tag{2.12}$$

$$S^i_{N-1}\xi^i_N\gamma^i_N = f^i(S^i_{N-1}\xi^i_N), \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \tag{2.13}$$

Из (2.13) получаем

$$\gamma^i_N = f^i(S^i_{N-1}\xi^i_N)/S^i_{N-1}\xi^i_N, \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) в (2.11), получаем систему уравнений для нахождения β_N, γ_N^1:

$$B_{N-1}\beta_N + S_{N-1}^1\gamma_N^1 = X_{N-1} - \sum_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^i\xi_N^i)}{\xi_N^i}, \tag{2.15}$$

$$\rho B_{N-1}\beta_N + S_{N-1}^1\xi_N^1\gamma_N^1 = f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1), \tag{2.16}$$

решение которой имеет вид

$$\beta_N = \frac{\left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^i\xi_N^i)}{\xi_N^i}\right)\xi_N^1 - f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1)}{B_{N-1}(\xi_N^1-\rho)}, \tag{2.17}$$

$$\gamma_N^1 = \frac{f^1(S_{N-1}^1\xi_N^1) - \left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^i\xi_N^i)}{\xi_N^i}\right)\rho}{S_{N-1}^1(\xi_N^1-\rho)}. \tag{2.18}$$

Согласно (2.14), (2.17) и (2.18) условия независимости портфеля от будущих значений цен акций имеют вид

$$\frac{\left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^iu_i)}{u_i}\right)u_1 - f^1(S_{N-1}^1u_1)}{B_{N-1}(u_1-\rho)} = \frac{\left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^id_i)}{d_i}\right)d_1 - f^1(S_{N-1}^1d_1)}{B_{N-1}(d_1-\rho)}, \tag{2.19}$$

$$\frac{f^1(S_{N-1}^1u_1) - \left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^iu_i)}{u_i}\right)\rho}{S_{N-1}^1(u_1-\rho)} = \frac{f^1(S_{N-1}^1d_1) - \left(X_{N-1} - \sum\limits_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^id_i)}{d_i}\right)\rho}{S_{N-1}^1(d_1-\rho)}, \tag{2.20}$$

$$f^i(S_{N-1}^iu_i)/u_i = f^i(S_{N-1}^id_i)/d_i. \tag{2.21}$$

Соотношения (2.19), (2.20) с учетом (2.21) дают одно и то же выражение

$$X_{N-1} - \sum_{i=2}^{M}\frac{f^i(S_{N-1}^iu_i)}{u_i} = \rho^{-1}\Big(\frac{\rho-d_1}{u_1-d_1}f^1(S_{N-1}^1u_1) + \frac{u_1-\rho}{u_1-d_1}f^1(S_{N-1}^1d_1)\Big). \tag{2.22}$$

Тем самым (2.2) следует из (2.22) и (2.3). С учетом независимости портфеля от будущих цен акций из (2.14), (2.17) и (2.18) при $\xi_N^i = u_i$, $1 \leqslant i \leqslant M$, получаем требуемый вид (2.4)–(2.6) оптимального портфеля в конечный момент N. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Стоимость опциона C_N и портфель $(\beta_{k+1}, \gamma_{k+1}^1, \dots, \gamma_{k+1}^M)$ определяются формулами*

$$C_N = C_N^1 + \sum_{i=2}^M C_N^i = f_0^1(S_0^1) + \sum_{i=2}^M f_0^i(S_0^i), \tag{2.23}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\left(X_k - \sum\limits_{i=2}^M \dfrac{f_{k+1}^i(S_k^i u_i)}{u_i}\right) u_1 - f_{k+1}^1(S_k^1 u_1)}{B_k(u_1 - \rho)}, \tag{2.24}$$

$$\gamma_{k+1}^1 = \frac{f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) - \left(X_k - \sum\limits_{i=2}^M \dfrac{f_{k+1}^i(S_k^i u_i)}{u_i}\right)\rho}{S_k^1(u_1 - \rho)}, \tag{2.25}$$

$$\gamma_{k+1}^i = f_{k+1}^i(S_k^i u_i)/S_k^i u_i, \tag{2.26}$$

$$f_k^1(S) = \rho^{-(N-k)} \sum_{j=0}^{N-k} \binom{N-k}{j} p^j q^{N-k-j} f^1(S u_1^j d_1^{N-k-j}), \tag{2.27}$$

$$f_k^i(S) = f^i(S u_i^{N-k})/u_i^{N-k}, \quad 2 \leqslant i \leqslant M, \tag{2.28}$$

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} f_{N-1}(S^1, \dots, S^M) &= \rho^{-1}(p f^1(S^1 u_1) + q f^1(S^1 d_1)) + \sum_{i=2}^M \frac{f^i(S^i u_i)}{u_i} \\ &= f_{N-1}^1(S^1) + \sum_{i=2}^M f_{N-1}^i(S^i), \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$f_{N-1}^1(S^1) = \rho^{-1}(p f^1(S^1 u_1) + q f^1(S^1 d_1)), \tag{2.30}$$

$$f_{N-1}^i(S^i) = f^i(S^i u_i)/u_i, \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \tag{2.31}$$

Из (2.22), (2.29)–(2.31) с учетом (2.3) получаем

$$X_{N-1} = f_{N-1}(S_{N-1}^1, \dots, S_{N-1}^M) = \sum_{i=1}^M f_{N-1}^i(S_{N-1}^i). \tag{2.32}$$

Тем самым формула (2.32) определяет функцию выплат с момента предъявления $N-1$. Чтобы обеспечить (2.32), согласно лемме 1 в момент $N-2$

надо иметь капитал

$$X_{N-2} = \rho^{-1}(pf^1_{N-1}(S^1_{N-2}u_1) + qf^1_{N-1}(S^1_{N-2}d_1)) + \sum_{i=2}^{M} \frac{f^i_{N-1}(S^i_{N-2}u_i)}{u_i}. \quad (2.33)$$

Используя выражения для f^1_{N-1}, f^i_{N-1} через f^1, f^i из (2.30), (2.31), получаем

$$X_{N-2} = f_{N-2}(S^1_{N-2}, \ldots, S^M_{N-2}) = \sum_{i=1}^{M} f^i_{N-2}(S^i_{N-2}), \quad (2.34)$$

где

$$f^1_{N-2}(S^1_{N-2}) = \rho^{-2}(p^2 f^1(S^1_{N-2}u_1^2) + 2pqf^1(S^1_{N-2}u_1d_1) + q^2 f^1(S^1_{N-2}d_1^2)) = \rho^{-2}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}p^j q^{2-j} f^1(S^1_{N-2}u_1^j d_1^{2-j}), \quad (2.35)$$

$$f^i_{N-2}(S^i_{N-2}) = f^i(S^i_{N-2}u_i^2)/u_i^2, \quad 2 \leqslant i \leqslant M. \quad (2.36)$$

Тем самым формула (2.34) вместе с (2.35), (2.36) определяет функцию выплат с момента предъявления $N-2$.

Дальнейшие рассуждения по индукции в соответствии с (2.34)–(2.36) показывают, что для обеспечения выплат в момент окончания контракта в момент k надо иметь капитал

$$X_k = f_k(S^1_k, \ldots, S^M_k) = \sum_{i=1}^{M} f^i_k(S^i_k), \quad (2.37)$$

где $f^1_k(S^1_k)$, $f^i_k(S^i_k)$, $2 \leqslant i \leqslant M$, определяются формулами (2.27), (2.28), который аналогично (2.33) представим в виде

$$X_k = \rho^{-1}[pf^1_{k+1}(S^1_k u_1) + qf^1_{k+1}(S^1_k d_1)] + \sum_{i=2}^{M}\frac{f^i_{k+1}(S^i_k u_i)}{u_i}. \quad (2.38)$$

Тогда для нахождения портфеля $\{\beta_{k+1}, \gamma^i_{k+1}\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, аналогично (2.11)–(2.13) из (2.37) следует система уравнений

$$B_k\beta_{k+1} + \sum_{i=1}^{M} S^i_k\gamma^i_{k+1} = X_k, \quad (2.39)$$

$$\rho B_k\beta_{k+1} + S^1_k\xi^1_{k+1}\gamma^1_{k+1} = f^1_{k+1}(S^1_k\xi^1_{k+1}), \quad (2.40)$$

$$S^i_k\xi^i_{k+1}\gamma^i_{k+1} = f^i_{k+1}(S^i_k\xi^i_{k+1}). \quad (2.41)$$

Аналогично тому, как решение системы (2.11)–(2.13) имело вид (2.4)–(2.6), получаем, что решение системы (2.39)–(2.41) имеет вид (2.24)–(2.26). Так как согласно определению $C_N = X_0$, то (2.23) следует из (2.37) с учетом (2.27) и (2.28). Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Отметим, что при доказательстве теоремы 1 реализован формализм принципа динамического программирования [9]: в какой бы точке траектории система не находилась, дальнейшее движение происходит оптимальным образом, если под оптимальностью понимать выполнение соотношения (1.5).

Следствие 1. *Капитал X_k и составляющие β_{k+1} и γ^1_{k+1} портфеля имеют представление*

$$X_k = X^1_k + \sum_{i=2}^{M} X^i_k, \tag{2.42}$$

$$X^1_k = \rho^{-1}(pf^1_{k+1}(S^1_k u_1) + qf^1_{k+1}(S^1_k d_1)), \tag{2.43}$$

$$X^i_k = f^i_{k+1}(S^i_k u_i)/u_i, \tag{2.44}$$

$$\beta_{k+1} = \frac{u_1 f^1_{k+1}(S^1_k d_1) - d_1 f^1_{k+1}(S^1_k u_1)}{\rho B_k(u_1 - d_1)}, \tag{2.45}$$

$$\gamma^1_{k+1} = \frac{f^1_{k+1}(S^1_k u_1) - f^1_{k+1}(S^1_k d_1)}{S^1_k(u_1 - d_1)}, \tag{2.46}$$

эквивалентное представлению (2.24) и (2.25).

Формулы (2.42)–(2.44) следуют из формулы (2.38) как сумма M локальных капиталов X^i_k, $1 \leqslant i \leqslant M$, а (2.45) и (2.46) получаются в результате подстановки (2.42) в (2.24), (2.25) с использованием (2.3).

Анализ структуры решения. Согласно теореме 1 и следствию 1 структура решения такова, что

1) первая составляющая цены опциона C^1_N (см. (2.23)), капитала X^1_N (см. (2.27), (2.43)), а также безрисковая β_{k+1} и первая рисковая γ^1_{k+1} составляющие портфеля (см. (2.45), (2.46)) непосредственно зависят от сдвигов цены рискового актива первого типа как вверх u_1, так и вниз d_1;

2) i-я составляющая цены опциона C^i_N (см. (2.23)), капитала (см. (2.28), (2.44)), а также i-я рисковая составляющая портфеля γ^i_{k+1} (см. (2.26)) для каждого $2 \leqslant i \leqslant M$ непосредственно зависят только от сдвига цены i-го типа рискового актива вверх.

Первое объясняется тем, что согласно доопределению сценария игры с ценными бумагами первая локальная платежная функция обеспечивается безрисковым и первым типом рисковых активов. Поэтому в процессе изменения цен S^1_k как вверх на величину u_1, так и вниз на величину d_1 происходит перераспределение X^1_k между β_{k+1} и γ^1_{k+1}. Этот процесс отражается в достижении терминального равенства $X^1_N = f^1(S^1_N)$ и соответственно в значении первой составляющей начального капитала $X^1_0 = C^1_N$, обеспечивающего это равенство. Второе объясняется тем, что i-я локальная платежная функция обеспечивается только i-м

типом рисковых активов. Поэтому достижение терминального равенства $X_N^i = f^i(S_N^i)$ и значения i-й составляющей начального капитала $X_0^i = C_N^i$, обеспечивающего это равенство, определяется только значением сдвига цены вверх.

3. Исследование свойств решения

По определению функция $y = f(x)$ называется выпуклой (вниз) на интервале $[a, b]$, если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{3.1}$$

и вогнутой (выпуклой вверх), если

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{3.2}$$

где $\lambda \in [0, 1]$, $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ [9]. Если в (3.1) и (3.2) имеют место строгие неравенства, то $f(x)$ соответственно строго выпуклая и строго вогнутая функция. При этом $f''(x) > 0$ для выпуклой функции и $f''(x) < 0$ для вогнутой функции (здесь и далее штрихи означают производную соответствующего порядка).

Пусть функция $f^1(\cdot)$ выпуклая и $f^1(0) = 0$. Тогда согласно (2.27) функция $f_{k+1}^1(\cdot)$ также выпуклая, $f_{k+1}^1(0) = 0$ и из (3.1) для нее следует, что

$$f_{k+1}^1(\lambda y) \leqslant \lambda f_{k+1}^1(y). \tag{3.3}$$

Взяв $\lambda = d_1/u_1$ и $y = S_k^1 u_1$, из (3.3) получаем

$$d_1 f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) \geqslant u_1 f_{k+1}^1(S_k^1 d_1). \tag{3.4}$$

Пусть функция $f^1(\cdot)$ вогнутая и $f^1(0) = 0$. Тогда согласно (2.27) функция $f_{k+1}^1(\cdot)$ также вогнутая, $f_{k+1}^1(0) = 0$ и для нее аналогично (3.4) с использованием (3.2) получим

$$d_1 f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) \leqslant u_1 f_{k+1}^1(S_k^1 d_1). \tag{3.5}$$

Если $f^1(S)$ строго выпуклая или строго вогнутая функция, то в (3.4), (3.5) имеем строгие неравенства.

Теорема 2. *Для портфеля $\{\beta_{k+1}, \gamma_{k+1}^1, \gamma_{k+1}^i\}$, $2 \leqslant i \leqslant M$, составляющих X_k^1 и X_k^i капитала X_k и составляющих C_N^1, C_N^i стоимости опциона C_N, $2 \leqslant i \leqslant M$, справедливы следующие условия*:

1) $\gamma_{k+1}^i \geqslant 0$;

2) *если $f^1(S)$ неубывающая функция, то $\gamma_{k+1}^1 \geqslant 0$*;

3) *если $f^1(S)$ выпуклая функция, то $\beta_{k+1} \leqslant 0$, а если $f^1(S)$ вогнутая функция, то $\beta_{k+1} \geqslant 0$*;

4) $X_k^1 \geqslant 0$ *и* $X_k^i \geqslant 0$;

5) $C_N^1 \geqslant 0$ *и* $C_N^i \geqslant 0$.

Доказательство. Неравенство $\gamma^i_{k+1} \geqslant 0$ следует непосредственно из (2.26). Так как $q > 0$, $S^1_k > 0$, $u_1 - \rho > 0$, $u_1 > d_1$ и $f^1_{k+1}(S^1_k u_1) \geqslant f^1_{k+1}(S^1_k d_1)$, что следует из (2.27) и неубывания $f^1(S)$, то неравенство $\gamma^1_{k+1} \geqslant 0$ справедливо согласно (2.46). Неравенства для $\beta_{k+1} \leqslant 0$ и $\beta_{k+1} \geqslant 0$ следуют непосредственно из (2.45), (3.4), (3.5). Свойства, касающиеся составляющих капитала и цены опциона, следуют непосредственно из (2.23), (2.27), (2.28), (2.43) и (2.44). Теорема 2 доказана.

Следствие 2. 1) *Если $f^i(S) > 0$ при $S > 0$, то $\gamma^i_{k+1} > 0$;*

2) *если $f^1(S)$ возрастающая функция, то $\gamma^1_{k+1} > 0$;*

3) *если $f^1(S)$ строго выпуклая функция, то $\beta_{k+1} < 0$, а если $f^1(S)$ строго вогнутая функция, то $\beta_{k+1} > 0$;*

4) *если $f^1(S) > 0$ при $S > 0$, то $X^1_k > 0$ и $C^1_N > 0$;*

5) *если $f^i(S) > 0$ при $S > 0$, то $X^i_k > 0$ и $C^i_N > 0$;*

6) *если $f^1(S)$ невозрастающая функция, то $\gamma^1_{k+1} \leqslant 0$, а если $f^1(S)$ убывающая функция, то $\gamma^1_{k+1} < 0$.*

Теорема 3. *Пусть $f^i(S)$, $2 \leqslant i \leqslant M$,— возрастающая функция, т. е. $[f^i(S)]' > 0$. Тогда i-е составляющие портфеля, функции стоимости опциона и капитала являются возрастающими функциями сдвига цены рискового актива вверх, если $f^i(S)$ — выпуклая, и убывающими функциями, если $f^i(S)$ — вогнутая функция.*

Доказательство. Так как согласно (2.26) и (2.28)

$$\gamma^i_{k+1} = f^i(S^i_k u_i^{N-k})/S^i_k u_i^{N-k}, \tag{3.6}$$

то

$$\frac{\partial \gamma^i_{k+1}}{\partial u_i} = \frac{(N-k)}{u_i}\Big[[f^i(S^i_k u_i^{N-k})]' - \frac{f^i(S^i_k u_i^{N-k})}{S^i_k u_i^{N-k}}\Big]. \tag{3.7}$$

Таким образом, исследование неравенств $\partial\gamma^i_{k+1}/\partial u_i \gtrless 0$ свелось к исследованию неравенств $S[f^i(S)]' \gtrless f^i(S)$. Пусть $f^i(S)$ — выпуклая функция, т. е. $[f^i(S)]'' > 0$. Поскольку в этом случае $[f^i(S)]'$ — возрастающая функция, имеем

$$f^i(S) = \int\limits_0^S [f^i(x)]'dx < \int\limits_0^S [f^i(S)]'dx = S[f^i(S)]'. \tag{3.8}$$

Воспользовавшись (3.8), из (3.7) получаем, что $\partial\gamma^i_{k+1}/\partial u_i > 0$, т. е. γ^i_{k+1} — возрастающая функция от u_i. Поскольку согласно (2.23)

$$C^i_N = f^i(S^i_0 u_i^N)/u_i^N, \tag{3.9}$$

имеем

$$\frac{\partial C^i_N}{\partial u_i} = \frac{N}{u_i}\Big[S^i_0[f^i(S^i_0 u_i^N)]' - \frac{f^i(S^i_0 u_i^N)}{u_i^N}\Big]. \tag{3.10}$$

Воспользовавшись (3.8), из (3.10) получаем, что $\partial C_N^i/\partial u_i > 0$, т. е. C_N^i — возрастающая функция от u_i. Так как согласно (2.28) и (2.44)

$$X_k^i = f^i(S_k^i u_i^{N-k})/u_i^{N-k}, \tag{3.11}$$

то

$$\frac{\partial X_k^i}{\partial u_i} = \frac{(N-k)}{u_i}\Big[S_k^i[f^i(S_k^i u_i^{N-k})]' - \frac{f^i(S_k^i u_i^{N-k})}{u_i^{N-k}}\Big]. \tag{3.12}$$

Воспользовавшись (3.8), из (3.12) получаем, что $\partial X_k^i/\partial u_i > 0$, т. е. X_N^i — возрастающая функция от u_i.

Пусть $f^i(S)$ — вогнутая функция, т. е. $[f^i(S)]'' < 0$. Поскольку в этом случае $[f^i(S)]'$ — убывающая функция, имеем

$$f^i(S) = \int\limits_0^S [f^i(x)]'dx > \int\limits_0^S [f^i(S)]'dx = S[f^i(S)]'. \tag{3.13}$$

Воспользовавшись (3.13), из (3.7), (3.10) и (3.12) получаем, что функции γ_{k+1}^i, C_N^i и X_k^i убывают по u_i. Теорема 3 доказана.

Анализ свойств решения. Дадим комментарии к теоремам 2, 3 и следствию 2.

1. Краткосрочная продажа, т. е. взятие актива в долг, возможна только относительно безрискового актива B_n при строго выпуклой функции $f^1(S)$, когда $\beta_{k+1} < 0$. Это объясняется тем, что в случае возрастающей выпуклой функции $f^1(S)$ скорость ее возрастания является возрастающей функцией ($[f^1(S)]'' > 0$), и при таких свойствах платежной функции $f^1(S)$ ее обеспечение может успешнее (с меньшим риском) осуществляться взятием безрискового актива в долг и перераспределением этого капитала в рисковый актив первого типа S_n^1.

2. Неравенство $\gamma_{k+1}^i > 0$ объясняется тем, что поскольку согласно постановке задачи i-я платежная функция при любом i, $2 \leqslant i \leqslant M$, обеспечивается только i-м типом S_n^i рисковых активов, этот тип акций должен присутствовать в портфеле.

3. Краткосрочная продажа по первому типу S_n^i рисковых активов, когда $\gamma_{k+1}^1 < 0$, возможна только при убывающей функции $f^1(S)$. Однако это неравенство для платежной функции не имеет экономического смысла.

4. При вогнутой функции $f^i(S)$, $2 \leqslant i \leqslant M$, с ростом сдвига вверх цены i-го рискового актива уменьшаются i-е составляющие цены опциона C_N^i, портфеля γ_{k+1}^i и капитала X_k^i. Это объясняется тем, что при свойстве вогнутости функции $f^i(S)$ требуется меньший вклад со стороны i-го рискового актива в обеспечение равенства $X_N^i = f^i(S_N^i)$ и соответственно меньший вклад в начальный капитал $X_0^i = C_N^i$. При

выпуклости функции $f^i(S)$ требуется больший вклад со стороны S^i_n в обеспечение равенства $X^i_N = f^i(S^i_N)$, что и обеспечивает противоположные свойства γ^i_{k+1}, C^i_N, X^i_k. Таким образом, заключать контракты на классе вогнутых платежных функций $f^i(S)$ выгодно для покупателя опциона, а на классе выпуклых $f^i(S)$ — для продавца опциона.

Замечание 3. Поскольку зависимость β_{k+1}, γ^1_{k+1}, X^1_k, C^1_N от u_1 и d_1 носит достаточно сложный характер, доказательство для них свойств того же порядка, что и свойства для i-й составляющей, $2 \leqslant i \leqslant M$, портфеля, опциона и капитала, доказанные в теореме 3, требует отдельного исследования.

4. Стандартный европейский опцион

На (B, S)-рынке для модели с M-рисковыми активами рассматривается опцион купли европейского типа с функцией выплаты (1.6), где согласно [5, 7, 8, 12]

$$f^i(S^i_N) = (S^i_N - K_i)^+ = \max(0, S^i_N - K_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant M, \tag{4.1}$$

а $K_i > 0$ — оговариваемые в момент заключения контракта стоимости i-го типа рискового актива в момент исполнения N.

Пусть

$$\widetilde{p} = pu_1/\rho, \tag{4.2}$$

$$\mathbb{B}\,(i, N, p) = \sum_{j=i}^{N} \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}, \tag{4.3}$$

$$j_k = \Big\lfloor \ln \frac{K_1}{S^1_k d_1^{N-k}} \Big/ \ln \frac{u_1}{d_1} \Big\rfloor, \quad 0 \leqslant k \leqslant N, \tag{4.4}$$

где $\lfloor D \rfloor$ — целая часть числа D.

Лемма 2. *Функция*

$$f^1_{k+1}(S) = \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=0}^{N-k-1} \binom{N-k-1}{j} p^j q^{N-k-1-j} \times (S u_1^j d_1^{N-k-1-j} - K_1)^+ \tag{4.5}$$

является такой, что

1)

$$f^1_{k+1}(S) \geqslant 0 \text{ при } S > 0; \tag{4.6}$$

2) $f^1_{k+1}(S)$ — *неубывающая функция;*

3) *если* $\widetilde{S}$ *таково, что* $f^1_{k+1}(S) > 0$ *при* $S > \widetilde{S}$, *то* $f^1_{k+1}(S)$ — *возрастающая функция при* $S > \widetilde{S}$, *т. е.*

$$f^1_{k+1}(S_2) > f^1_{k+1}(S_1) \tag{4.7}$$

при $S_2 > S_1 > \widetilde{S}$;

4) *если*

$$K_1 < S u_1^{N-k-1}, \tag{4.8}$$

то

$$f^1_{k+1}(S) > 0, \tag{4.9}$$

если $K_1 > S u_1^{N-k-1}$, *то* $f^1_{k+1}(S) = 0$.

Доказательство. Функция (4.5) получается из функции (2.27) при замене k на $k+1$, когда $f^1(S)$ имеет вид (4.1). Неравенство из (4.6) и неубывание функции $f^1_{k+1}(S)$ непосредственно следуют из (4.5). Пусть $\widetilde{j}_k$ — наименьшее целое такое, что

$$S u_1^{\widetilde{j}_k} d_1^{N-k-1-\widetilde{j}_k} - K_1 > 0. \tag{4.10}$$

Так как при каждом $\widetilde{j}_k$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{\widetilde{j}_k} > \frac{K_1}{S d_1^{N-k-1}}, \tag{4.11}$$

то

$$\widetilde{j}_k = 1 + \left\lfloor \ln \frac{K_1}{S d_1^{N-k}} \Big/ \ln \frac{u_1}{d_1} \right\rfloor \tag{4.12}$$

и $f^1_{k+1}(S)$ принимает вид

$$f^1_{k+1}(S) = \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}_k}^{N-k-1} \binom{N-k-1}{j} p^j q^{N-k-1-j} \times (S u_1^j d_1^{N-k-1-j} - K_1). \tag{4.13}$$

Неравенство (4.7) непосредственно следует из (4.13). Согласно (4.13) неравенство (4.9) выполняется, если $\widetilde{j}_k < N-k$. Наконец, согласно (4.12) $\widetilde{j}_k < N-k$, если

$$\ln \frac{K_1}{S d_1^{N-k-1}} < (N-k-1) \ln \frac{u_1}{d_1}. \tag{4.14}$$

Отсюда следует (4.8). Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Составляющие* C_N^1, β_{k+1}, γ_{k+1}^1, X_k^1 *опциона, портфеля и капитала определяются по формуле*

$$C_N^1 = S_0^1 \mathbb{B}\,(j_0+1, N; \widetilde{p}) - K_1 \rho^{-N} \mathbb{B}\,(j_0+1, N; p) \tag{4.15}$$

и по формулам (2.43), (2.45), (2.46), *где*

$$f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) = S_k^1 u_1 \mathbb{B}\,(j_k, N-k-1; \widetilde{p}) \\ - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \mathbb{B}\,(j_k, N-k-1; p), \tag{4.16}$$

$$f_{k+1}^1(S_k^1 d_1) = S_k^1 d_1 \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; \widetilde{p}) \\ - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; p), \tag{4.17}$$

а C_N^i, γ_{k+1}^i, X_k^i *при* $2 \leqslant i \leqslant M$ *имеют вид*

$$C_N^i = (S_0^i u_i^N - K_i)^+ / u_i^N, \tag{4.18}$$

$$\gamma_{k+1}^i = (S_k^i u_i^{N-k} - K_i)^+ / S_k^i u_i^{N-k}, \tag{4.19}$$

$$X_k^i = (S_k^i u_i^{N-k} - K_i)^+ / u_i^{N-k}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Формула (4.13) принимает вид

$$f_{k+1}^1(S) = S \sum_{j=\widetilde{j}_k}^{N-k-1} \binom{N-k-1}{j} \left(\frac{pu_1}{\rho}\right)^j \left(\frac{(1-p)d_1}{\rho}\right)^{N-k-1-j} \\ - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \sum_{j=\widetilde{j}_k}^{N-k-1} \binom{N-k-1}{j} p^j (1-p)^{N-k-1-j}. \tag{4.21}$$

Из (2.3) и (4.2) следует, что

$$(1-p)d_1/\rho = (1-\widetilde{p}). \tag{4.22}$$

Воспользовавшись (4.2), (4.3), (4.22), из (4.21) получаем представление $f_{k+1}^1(S)$ в виде

$$f_{k+1}^1(S) = S\mathbb{B}\,(\widetilde{j}_k, N-k-1; \widetilde{p}) - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \mathbb{B}\,(\widetilde{j}_k, N-k-1; p). \tag{4.23}$$

Из (4.12) с учетом (4.4) следует, что

$$\widetilde{j}_{k|S=S_k^1 u_1} = j_k, \widetilde{j}_{k|S=S_k^1 d_1} = j_k + 1. \tag{4.24}$$

Так как

$$f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) = f_{k+1}^1(S)_{|S=S_k^1 u_1}, f_{k+1}^1(S_k^1 d_1) = f_{k+1}^1(S)_{|S=S_k^1 d_1}, \tag{4.25}$$

то (4.16) и (4.17) следуют из (4.23)–(4.25). Согласно (2.23) и (4.16) имеем

$$C_N^1 = f_0^1(S_0^1) = S_0^1 \mathbb{B}\,(\widetilde{j}_{(-1)}, N; \widetilde{p}) - K_1 \rho^{-N} \mathbb{B}\,(\widetilde{j}_{(-1)}, N; p). \tag{4.26}$$

Из (4.12) получаем, что $\widetilde{j}_{(-1)} = j_0 + 1$, где j_0 берется из (4.4) при $k = 0$. Тогда (4.15) следует из (4.26), а (4.18)–(4.20) непосредственно следуют из (2.23), (2.26), (2.44) с учетом (2.28) и (4.1). Теорема 4 доказана.

Следствие 3. *Для составляющих γ_{k+1}^1, β_{k+1}, X_k^1 портфеля и капитала справедливы представления*

$$\gamma_{k+1}^1 = \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; \widetilde{p}) + \binom{N-k-1}{j_k} p^{j_k}(1-p)^{N-k-1-j_k} \times \frac{d_1^{N-k}}{(u_1-d_1)\rho^{N-k-1}} \left[\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{j_k+1} - \frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}} \right], \tag{4.27}$$

$$\beta_{k+1} = -\frac{K_1}{B_k \rho^{N-k}} \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; p) - \binom{N-k-1}{j_k} p^{j_k}(1-p)^{N-k-1-j_k} \times \frac{S_k^1 d_1^{N-k+1}}{(u_1-d_1)B_k\rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{j_k+1} - \frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}} \right], \tag{4.28}$$

$$X_k^1 = S_k^1 \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; \widetilde{p}) - \frac{K_1}{\rho^{N-k}} \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; p) + \binom{N-k-1}{j_k} \times p^{j_k}(1-p)^{N-k-1-j_k} \frac{(\rho-d_1)S_k^1 d_1^{N-k}}{(u_1-d_1)\rho^{N-k}} \left[\left(\frac{u_1}{d_1}\right)^{j_k+1} - \frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}} \right]. \tag{4.29}$$

Доказательство. Так как

$$\mathbb{B}\,(i, N; p) = \mathbb{B}\,(i+1, N; p) + \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}, \tag{4.30}$$

то, воспользовавшись (4.30), из (4.16) получаем

$$f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) = S_k^1 u_1 \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; \widetilde{p}) - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \mathbb{B}\,(j_k+1, N-k-1; p) + S_k^1 u_1 \binom{N-k-1}{j_k} \widetilde{p}^{j_k}(1-\widetilde{p})^{N-k-1-j_k} - K_1 \rho^{-(N-k-1)} \binom{N-k-1}{j_k} p^{j_k}(1-p)^{N-k-1-j_k}. \tag{4.31}$$

Использование (4.17), (4.31) в (2.43), (2.45), (2.46) с учетом (2.3), (4.2), (4.22) приводит к (4.27)–(4.29). Следствие 3 доказано.

Теорема 5. *При любом i, $1 \leqslant i \leqslant M$, составляющие опциона, капитала и портфеля удовлетворяют следующим условиям:*

1) $C_N^i \geqslant 0$, $X_k^i \geqslant 0$, $\gamma_{k+1}^i \geqslant 0$, $\beta_{k+1} \leqslant 0$;

2) *если*

$$K_i < S_0^i u_i^N, \tag{4.32}$$

то $C_N^i > 0$;

3) *если*

$$K_i < S_k^i u_i^{N-k}, \tag{4.33}$$

то $X_k^i > 0$, $\gamma_{k+1}^i > 0$, $\beta_{k+1} < 0$.

Доказательство. Так как $C_N^1 = f_0^1(S_0^1)$, то неравенство $C_N^1 \geqslant 0$ следует из (4.5). Из (4.15) получаем, что неравенство $C_N^1 > 0$ выполняется при условии $j_0 < N$, которое с использованием (4.4) при $k = 0$ приводит к (4.32).

Неравенство $\gamma_{k+1}^1 \geqslant 0$ следует из (2.46) с учетом утверждений 1 и 2 леммы 2. Из (4.8) и (4.9) следует, что если

$$K_1 < S_k^1 u_1^{N-k}, \tag{4.34}$$

то

$$f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) > 0, \tag{4.35}$$

а если $K_1 \geqslant S_k^1 u_1^{N-k}$, то $f_{k+1}^1(S_k^1 u_1) = 0$.

Аналогично если

$$K_1 < S_k^1\Big(\frac{d_1}{u_1}\Big)u_1^{N-k}, \tag{4.36}$$

то

$$f_{k+1}^1(S_k^1 d_1) > 0, \tag{4.37}$$

если $K_1 \geqslant S_k^1\Big(\frac{d_1}{u_1}\Big)u_1^{N-k}$, то $f_{k+1}^1(S_k^1 d_1) = 0$. Использование (4.34)–(4.37) в (2.46) с учетом свойства 3 леммы 2 приводит к свойству 3 для γ_{k+1}^1.

Пусть

$$\Phi_k = \Big(\frac{u_1}{d_1}\Big)^{j_k+1} - \frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}}. \tag{4.38}$$

Из (4.4) следует, что

$$j_k + 1 > \ln\frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}}\Big/\ln\frac{u_1}{d_1}. \tag{4.39}$$

Поэтому

$$\ln\Big(\frac{u_1}{d_1}\Big)^{j_k+1} > \ln\frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}},$$

т. е.

$$\Big(\frac{u_1}{d_1}\Big)^{j_k+1} > \frac{K_1}{S_k^1 d_1^{N-k}}. \tag{4.40}$$

Из (4.38)–(4.40) следует, что для j_k из (4.4) $\Phi_k > 0$. Тогда неравенство $\beta_{k+1} \leqslant 0$ следует из (4.28). Очевидно, что $B(j_k+1, N-k-1; p) > 0$ при $j_k < N-k-1$, т. е. если выполняется условие (4.36). Поскольку $\Phi_k > 0$, то второе слагаемое в правой части (4.28) больше нуля при $j_k < N-k$, т. е. если выполняется условие (4.34). Поскольку

$$S_k^1\Big(\frac{d_1}{u_1}\Big)u_1^{N-k} < S_k^1 u_1^{N-k}, \tag{4.41}$$

то неравенство $\beta_{k+1} < 0$ следует из (4.28).

Свойство 1 для X_k^1 следует из (2.43) с учетом свойств 1 и 2 леммы 2. Неравенство $X_k^1 > 0$ следует из (2.43) с учетом (4.34)–(4.37) и (4.41).

Все неравенства для C_N^i, X_k^i, γ_{k+1}^i при любом i, $2 \leqslant i \leqslant M$, следуют непосредственно из (4.18)–(4.20). Теорема 5 доказана.

Анализ результатов.

1. В случае неубывающих выпуклых платежных функций общего вида неравенства из условия 1 теоремы 5 совпадают с неравенствами для этих величин из теоремы 2. Объяснение этому факту, видимо, заключается в том, что платежные функции (4.1) могут служить простейшей кусочно-линейной аппроксимацией упомянутых платежных функций.

2. Если сдвиги цены i-го типа рисковых активов происходили только вверх, то $S_0^i u_i^N$ будет являться стоимостью S_N^i этого актива в конечный момент времени. Таким образом, условие (4.32) является условием заключения контракта по данному активу. Действительно, при $K_i > S_0^i u_i^N$ стоимость этого актива в конечный момент времени ни при каких условиях не превысит договорной цены K_i и в этом случае для покупателя опциона нет смысла заключать контракт. Заметим, что это условие остается одним и тем же как для хеджируемого первого типа, так и для нехеджируемого i-типа, $2 \leqslant i \leqslant M$, рисковых активов.

3. Аналогично $S_k^i u_i^{N-k}$ будет являться стоимостью i-го типа рисковых активов в конечный момент времени, если сдвиги его цены, начиная с момента k, происходили только вверх. Таким образом, условие (4.33) может интерпретироваться как фиктивное условие заключения контракта в произвольный момент k и экономическая интерпретация условия 3 теоремы 5 в связи с этим становится очевидной.

4. По всем рисковым активам краткосрочная продажа невозможна ($\gamma_{k+1}^i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant M$). Безрисковый актив либо отсутствует в портфеле ($\beta_{k+1} = 0$), либо по нему реализуется краткосрочная продажа ($\beta_{k+1} < 0$), когда выполняется условие (4.33).

5. Формула (4.15) является формулой Кокса — Росса — Рубинштейна и получена при решении задачи с произвольным числом рисковых активов по методу, отличному от [5, 8, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Голембиовский Д. Ю., Долматов А. С.** Управление портфелем производных финансовых инструментов. I // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 4. С. 95–103.
2. **Губерниев В. А., Кибзун А. И.** Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 113–125.

3. **Нагаев А. В.** К вопросу о вычислении справедливой цены опциона // Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34, № 1. С. 166–171.
4. **Новиков А. А.** Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применения. 1998. Т. 43, вып. 1. С. 152–161.
5. **О'Брайен Д., Шривастава С.** Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. М.: Дело ЛТД, 1995.
6. **Рачев С. Т., Рушендорф Л.** Модели и расчеты контрактов с опционами // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 150–190.
7. **Ширяев А. Н.** Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1, 2.
8. **Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М., Крамков Д. О., Мельников А. В.** К теории расчетов опционов европейского и американского типов // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 23–79.
9. **Исследование операций /** Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. М.: Мир, 1981. Т. 1.
10. **Black F., Scholes M.** The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. 1973. V. 81, N 3. P. 637–657.
11. **Bollen N. P. B.** Real options and product life cycles // Management Sci. 1999. V. 45, N 5. P. 670–684.
12. **Cox J. C., Ross R. A., Rubinstein M.** Option pricing: a simplified approach // J. of Financial Economics. 1976. V. 7. P. 229–263.
13. **Jamshidian F.** Hedging quantos, differential swaps and ratios // Applied Mathematical Finance. 1994. V. 1. P. 1–20.
14. **Mello A. S., Neuhaus H. J.** A portfolio approach to risk reduction in discretely rebalanced option hedges // Management Sci. 1998. V. 44, N 7. P. 921–934.
15. **Merton R. C.** Theory of rational option pricing // Bell J. Economics and Management Sci. 1973. V. 4. P. 141–183.
16. **Mohamed B.** Simulation of transactions cost and optimal rehedging // Applied Mathematical Finance. 1994. V. 1. P. 49–62.

Адрес авторов:

Томский государственный
университет, ФПМиК,
пр. Ленина, 36,
634050 Томск, Россия.
E-mail: shmih@mail.ru

Статья поступила
10 сентября 2001 г.