ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2002. Серия 2. Том 9, № 1, 21–32

УДК 519.8

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ В КРИТЕРИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*)

В. А. Емеличев, А. В. Пашкевич

Вводится принцип оптимальности (функция выбора) в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$, который задается парой целочисленных параметров (i, j), изменяющихся независимо друг от друга в пределах от 1 до n. При этом некоторым значениям этих параметров соответствуют такие известные принципы оптимальности, как паретовский, мажоритарный, слейтеровский и др. Исследован ряд свойств бинарного отношения, порожденного обобщенным принципом оптимальности.

Введение

Как обычно (см., например, [1, 6, 8]), под *принципом оптимальности* (в другой терминологии — *функцией выбора*) в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, будем понимать отображение

$$E : 2^{\mathbf{R}^n} \to 2^{\mathbf{R}^n},$$

по которому выделяется подмножество $E(Y)$ наиболее предпочтительных решений из множества возможных $Y \subseteq \mathbf{R}^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что рассматривается n-критериальная (векторная) задача минимизации на множестве решений Y:

$$y_i \to \min_{y \in Y}, \ i \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}, \ Y \subseteq \mathbf{R}^n,$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

В этом контексте такие широко известные принципы оптимальности, как паретовский, слейтеровский и мажоритарный, могут быть соответственно заданы путем введения традиционных множеств *эффективных* (*оптимальных по Парето*), *слабо эффективных* (*оптимальных*

*) Исследование выполнено в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры».

по Слейтеру) и *мажоритарно эффективных решений* (см., например, [2, 5, 12]):

$$P(Y) = \{y \in Y \mid \pi(y) = \varnothing\},$$
$$S(Y) = \{y \in Y \mid \sigma(y) = \varnothing\},$$
$$M(Y) = \{y \in Y \mid \mu(y) = \varnothing\},$$

где

$$\pi(y) = \{y' \in Y \mid y \geqslant y' \;\&\; y \neq y'\},$$
$$\sigma(y) = \{y' \in Y \mid \forall i \in N_n \; (y_i > y'_i)\},$$
$$\mu(y) = \Big\{y' \in Y \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n}(y_i - y'_i) > 0\Big\}.$$

Введем также множества *идеальных* и *псевдоэффективных решений* соответственно:

$$I(Y) = \{y \in Y \mid \nu(y) = \varnothing\},$$
$$Q(Y) = \{y \in Y \mid \varsigma(y) = \varnothing\},$$

где

$$\nu(y) = \{y' \in Y \mid \exists i \in N_n \; (y_i > y'_i)\},$$
$$\varsigma(y) = \{y' \in Y \mid \forall k \in N_n \; (y_k \neq y'_k) \;\&\; \exists i \in N_n \; (y_i > y'_i)\}.$$

В настоящей статье вводится двухпараметрическое семейство принципов оптимальности в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, включающее перечисленные выше принципы оптимальности, а также ряд других. Проведен анализ свойств бинарных отношений, индуцируемых указанным семейством.

1. Множество (i,j)-эффективных решений

Для любых двух векторов $y, y' \in \mathbf{R}^n$ положим

$$[y, y']^- = |\{i \in N_n \mid y_i < y'_i\}|,$$
$$[y, y']^+ = |\{i \in N_n \mid y_i > y'_i\}|,$$
$$[y, y']^0 = |\{i \in N_n \mid y_i = y'_i\}|.$$

Для любого непустого множества $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ и любой пары индексов $(i, j) \in N_n \times N_n$ введем множество (i,j)-*эффективных решений*

$$E_{ij}(Y) = \{y \in Y \mid \varepsilon_{ij}(y) = \varnothing\},$$

где
$$\varepsilon_{ij}(y) = \{y' \in Y \mid [y,y']^+ > (i-1)[y,y']^0 + (j-1)[y,y']^-\}.$$

Нетрудно убедиться, что при любой паре $(i,j) \in N_n \times N_n$ множество $E_{ij}(Y)$ может быть задано следующим эквивалентным способом:
$$E_{ij}(Y) = \left\{ y \in Y \mid \forall y' \in Y \ \left([y,y']^+ \leqslant (i-1)[y,y']^0 + (j-1)[y,y']^-\right) \right\}. \tag{1}$$

Теорема 1. *При любом натуральном числе* $n \geqslant 2$ *справедливы следующие включения*:
$$\begin{array}{cccc}
E_{11}(Y) \subseteq & E_{12}(Y) \subseteq & \ldots \subseteq & E_{1n}(Y) \\
\shortmid\!\cap & \shortmid\!\cap & & \shortmid\!\cap \\
E_{21}(Y) \subseteq & E_{22}(Y) \subseteq & \ldots \subseteq & E_{2n}(Y) \\
\shortmid\!\cap & \shortmid\!\cap & & \shortmid\!\cap \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\shortmid\!\cap & \shortmid\!\cap & & \shortmid\!\cap \\
E_{n1}(Y) \subseteq & E_{n2}(Y) \subseteq & \ldots \subseteq & E_{nn}(Y),
\end{array} \tag{2}$$
при этом
$$P(Y) = E_{1n}(Y), \quad S(Y) = E_{nn}(Y), \quad M(Y) = E_{12}(Y),$$
$$I(Y) = E_{11}(Y), \quad Q(Y) = E_{n1}(Y).$$

Доказательство. Справедливость включений (2) с очевидностью следует из (1). Далее без особого труда проверяются следующие эквивалентности:
$$y \geqslant y' \ \& \ y \neq y' \iff [y,y']^+ > (n-1)[y,y']^-,$$
$$\forall i \in N_n \ (y_i > y'_i) \iff [y,y']^+ = n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y'_i) > 0 \iff [y,y']^+ > [y,y']^-,$$
$$\exists i \in N_n \ (y_i > y'_i) \iff [y,y']^+ > 0,$$
$$\forall i \in N_n \ (y_i \neq y'_i) \ \& \ \exists k \in N_n \ (y_k > y'_k) \iff [y,y']^+ > 0 \ \& \ [y,y']^0 = 0.$$

Поэтому легко убеждаемся в справедливости равенств
$$P(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ ([y,y']^+ > (n-1)[y,y']^-)\}$$
$$= \{y \in Y \mid \varepsilon_{1n}(y) = \varnothing\} = E_{1n}(Y),$$
$$S(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ ([y,y']^+ = n)\} = \{y \in Y \mid \varepsilon_{nn}(y) = \varnothing\} = E_{nn}(Y),$$
$$M(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ ([y,y']^+ > [y,y']^-)\}$$
$$= \{y \in Y \mid \varepsilon_{12}(y) = \varnothing\} = E_{12}(Y),$$

$$I(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ ([y,y']^+ > 0)\} = \{y \in Y \mid \varepsilon_{11}(y) = \varnothing\} = E_{11}(Y),$$

$$Q(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ ([y,y']^+ > 0 \ \& \ [y,y']^0 = 0)\} \\ = \{y \in Y \mid \varepsilon_{n1}(y) = \varnothing\} = E_{n1}(Y).$$

Теорема 1 доказана.

Отметим, что цепочка включений

$$M(Y) = E_{12}(Y) \subseteq E_{13}(Y) \subseteq \ldots \subseteq E_{1n}(Y) = P(Y)$$

была ранее установлена в [3, 11]. Здесь следует также отметить, что для случая упорядоченных по важности критериев в [2] предложено аналогичное однопараметрическое семейство принципов оптимальности.

Приведем некоторые очевидные свойства множеств $E_{ij}(Y)$, $(i,j) \in N_n \times N_n$.

Свойство 1. Выполняется одна из альтернатив: $|E_{11}(Y)| = 1$ или $E_{11}(Y) = \varnothing$.

Свойство 2. Если $|E_{11}(Y)| = 1$, то $E_{11}(Y) = E_{12}(Y) = \ldots = E_{1n}(Y)$.

Два вектора $y, y' \in \mathbf{R}^n$ будем называть *строго различными*, если $[y,y']^0 = 0$. Тогда очевидно следующее

Свойство 3. Если векторы множества $Y \subset \mathbf{R}^n$ попарно строго различны, то при любом индексе $j \in N_n$ верны равенства

$$E_{1j}(Y) = E_{2j}(Y) = \ldots = E_{nj}(Y). \tag{3}$$

Для любого решения $y \in Y$ и любой пары индексов $(i,j) \in N_n \times N_n$ определим величину

$$e_{ij}(y) = \min\{i[y,y']^0 + j[y,y']^- \mid y' \in Y\}.$$

Теорема 2. *Пусть $(i,j) \in N_n \times N_n$. Решение y является (i,j)-эффективным тогда и только тогда, когда*

$$e_{ij}(y) \geqslant n. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y \in E_{ij}(Y)$. Тогда согласно (1) при любом решении $y' \in Y$ верно неравенство

$$[y,y']^+ \leqslant (i-1)[y,y']^0 + (j-1)[y,y']^-. \tag{5}$$

Отсюда с учетом очевидного равенства

$$[y,y']^+ = n - [y,y']^0 - [y,y']^- \tag{6}$$

следует, что

$$i[y,y']^0 + j[y,y']^- \geqslant n \tag{7}$$

при любом решении $y' \in Y$. Поэтому справедливо (4).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $y \in Y$ и $e_{ij}(y) \geqslant n$. Тогда при любом решении $y' \in Y$ верно неравенство (7). Откуда, вновь применяя (6), получаем, что при любом $y' \in Y$ справедливо неравенство (5), что и доказывает включение $y \in E_{ij}(Y)$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 вытекает

Свойство 4. Если $|Y| < \infty$, то при любом индексе $i \in N_n$ множество $E_{in}(Y)$ непусто.

Приведем пример, свидетельствующий о том, что все множества $E_{11}(Y)$, $E_{12}(Y), \ldots, E_{1n}(Y)$ могут быть попарно различны при любом $n \geqslant 3$, т. е. при каждом индексе $j \in N_{n-1}$ множество $E_{1j}(Y)$ является собственным подмножеством множества $E_{1j+1}(Y)$.

Пример 1. Пусть $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-1)}\} \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, где

$$y^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots, 0),$$
$$y^{(k)} = (0, 0, .., 0, \underbrace{n-k, n-k, \ldots, n-k}_{k \text{ раз}}), \quad k = 2, 3, \ldots, n-1,$$

т. е. решением $y^{(k)}$ является k-я строка следующей матрицы размера $(n-1) \times n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-3 & n-3 & n-3 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Прежде всего, очевидно, что

$$E_{11}(Y) = \varnothing. \tag{8}$$

Далее покажем, что верны равенства

$$E_{1j}(Y) = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(j-1)}\}, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{9}$$

Вместе с (8) это будет означать, что справедлива цепочка строгих включений

$$E_{11}(Y) \subset E_{12}(Y) \subset \ldots \subset E_{1n}(Y).$$

Воспользуемся методом индукции. Легко проверить, что при любом индексе $j = 2, 3, \ldots, n$ имеют место соотношения

$$y^{(1)} \in E_{1j}(Y), \quad y^{(j)} \notin E_{12}(Y).$$

Поэтому $E_{12}(Y) = \{y^{(1)}\}$.

Пусть равенство (9) верно при $j = k \geqslant 2$. Покажем, что тогда

$$E_{1k+1}(Y) = \{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}\} = E_{1k}(Y) \cup \{y^{(k)}\}.$$

Прежде всего заметим, что согласно теореме 1 верно включение $E_{1k}(Y) \subseteq E_{1k+1}(Y)$. Поэтому в силу индуктивного предположения имеем

$$\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k-1)}\} \subseteq E_{1k+1}(Y).$$

Теперь покажем, что $y^{(k)} \in E_{1k+1}(Y)$. Для этого, учитывая определение (1), достаточно убедиться, что при любом индексе $i \in N_{n-1}$ верно неравенство

$$[y^{(k)}, y^{(i)}]^+ \leqslant k[y^{(k)}, y^{(i)}]^-. \tag{10}$$

При $i = k$ утверждение очевидно. Разберем два оставшихся случая.

Случай 1. $i > k$. Тогда легко видеть, что

$$[y^{(k)}, y^{(i)}]^+ = k, \quad [y^{(k)}, y^{(i)}]^- = i - k,$$

т. е. справедливо неравенство (10).

Случай 2. $i < k$. Если $i = 1$, то

$$[y^{(k)}, y^{(1)}]^+ = k, \quad [y^{(k)}, y^{(1)}]^- = 1.$$

Поэтому неравенство (10) верно. Если $1 < i < k$, то имеем

$$[y^{(k)}, y^{(i)}]^+ = k - i, \quad [y^{(k)}, y^{(i)}]^- = i.$$

Следовательно, неравенство (10) верно, а поэтому доказано, что $y^{(k)} \in E_{1k+1}(Y)$.

Наконец, осталось показать, что при любом индексе $j \in N_{n-k}$ решение $y^{(k+j)} \notin E_{1k+1}(Y)$. Нетрудно убедиться, что это равносильно существованию такого решения $y \in Y$, что

$$[y^{(k+j)}, y]^+ > k[y^{(k+j)}, y]^-.$$

Понятно, что таким решением является вектор $y = y^{(1)}$, так как

$$[y^{(k+j)}, y^{(1)}]^+ = k + j, \quad [y^{(k+j)}, y^{(1)}]^- = 1$$

при любом индексе $j \in N_{n-k}$. Итак, справедливость равенств (9) доказана. Кроме того, нетрудно убедиться, что в данном примере

$$E_{n1}(Y) = Y \setminus \{y^{(1)}, y^{(n-1)}\},$$
$$E_{nj}(Y) = Y \setminus \{y^{(n-1)}\}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \quad E_{nn}(Y) = Y.$$

2. Свойства двухпараметрического семейства бинарных отношений

В моделях многокритериального выбора широко используется язык бинарных отношений (см., например, [1, 2, 4–8]). В общем случае вопрос о введении бинарного отношения предпочтения по заданному принципу оптимальности оказывается достаточно сложным [5]. В нашем случае множество (i,j)-эффективных решений $E_{ij}(Y)$ при любой паре $(i,j) \in N_n \times N_n$ может быть задано путем введения бинарного отношения строгого предпочтения $\succ_{ij}$ на $Y \subseteq \mathbf{R}^n$, определяемого следующим образом:

$$y \succ_{ij} y' \iff [y,y']^+ > (i-1)[y,y']^0 + (j-1)[y,y']^-.$$

Действительно, очевидно, что

$$E_{ij}(Y) = \{y \in Y \mid \nexists y' \in Y \ (y \succ_{ij} y')\},$$

т. е. $E_{ij}(Y)$ — множество минимальных элементов в Y по отношению к $\succ_{ij}$.

Непосредственно из определения введенного отношения вытекает

Свойство 5. При любых парах (i,j) и (k,s) таких, что $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant s \leqslant n$, справедлива импликация

$$y \succ_{ks} y' \Longrightarrow y \succ_{ij} y'.$$

Методом от противного несложно доказать

Свойство 6. Если $y \succ_{in} y'$, $i \in N_n$, то $[y,y']^- = 0$.

Свойство 7. При любых индексах $i,k \in N_n$ верна импликация

$$y \succ_{in} y' \succ_{kn} y'' \Longrightarrow y \succ_{kn} y''.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют такие векторы $y, y', y'' \in \mathbf{R}^n$, что

$$y \succ_{in} y' \succ_{kn} y'' \& \ y \overline{\succ}_{kn} y''.$$

Тогда

$$[y',y'']^+ > (k-1)[y',y'']^0,$$
$$[y,y'']^+ \leqslant (k-1)[y,y'']^0,$$

поскольку согласно свойству 6 верны равенства $[y,y']^- = [y',y'']^- = 0$, а следовательно, справедливо равенство $[y,y'']^- = 0$. Поэтому, полагая

$$m_1 = |\{l \in N_n \mid y_l > y'_l > y''_l\}|,$$
$$m_2 = |\{l \in N_n \mid y_l > y'_l = y''_l\}|,$$
$$m_3 = |\{l \in N_n \mid y_l = y'_l > y''_l\}|,$$
$$m_4 = |\{l \in N_n \mid y_l = y'_l = y''_l\}|,$$

имеем

$$[y', y'']^+ = m_1 + m_3, \quad [y', y'']^0 = m_2 + m_4,$$
$$[y, y'']^+ = m_1 + m_2 + m_3, \quad [y, y'']^0 = m_4,$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = n.$$

Тем самым для неотрицательных целых чисел m_l, $l \in N_4$, должны одновременно выполняться неравенства

$$m_1 + m_3 > (k-1)(m_2 + m_4), \quad m_1 + m_2 + m_3 \leqslant (k-1)m_4,$$

приводящие к противоречию

$$k(m_2 + m_4) < n \leqslant km_4,$$

из которого следует свойство 7.

Пусть y, y', y'' — произвольные элементы из Y, а $\succ$ — некоторое бинарное отношение на Y. Запись $y \bar{\succ} y'$ будет обозначать, что отношение $y \succ y'$ не выполняется.

Напомним, что бинарное отношение $\succ$ называется

антирефлексивным, если $y \bar{\succ} y$,

асимметричным, если верна импликация $y \succ y' \Longrightarrow y' \bar{\succ} y$,

транзитивным, если $y \succ y'$ & $y' \succ y'' \Longrightarrow y \succ y''$,

циклическим, если в Y существуют циклы $y^{(1)} \succ y^{(2)} \succ \ldots \succ y^{(k)} \succ y^{(1)}$, $k \geqslant 2$,

ациклическим, если циклов нет, т. е. при любом $k \geqslant 1$ имеем $y^{(1)} \succ y^{(2)} \succ \ldots \succ y^{(k)} \Longrightarrow y^{(k)} \bar{\succ} y^{(1)}$.

Учитывая в дальнейшем то, что бинарное отношение $\succ$ обладает некоторым свойством, будем считать, что на любом множестве $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ это отношение обладает указанным свойством.

Очевидно следующее

Свойство 8. При любой паре $(i, j) \in N_n \times N_n$ бинарное отношение $\succ_{ij}$ антирефлексивно.

Свойство 9. Если $i \in N_n$ и $2 \leqslant j \leqslant n$, то бинарное отношение $\succ_{ij}$ асимметрично.

Доказательство. Предположим противное, т. е. $y \succ_{ij} y'$ и $y' \succ_{ij} y$. Тогда должны одновременно выполняться неравенства

$$[y, y']^+ > (i-1)[y, y']^0 + (j-1)[y, y']^-,$$
$$[y', y]^+ > (i-1)[y', y]^0 + (j-1)[y', y]^-.$$

Отсюда с учетом равенств $[y, y']^+ = [y', y]^-$ и $[y, y']^0 = [y', y]^0$ следует, что

$$(i-1)[y, y']^0 + (j-1)[y, y']^- < \frac{1}{j-1}[y, y']^- - \frac{i-1}{j-1}[y, y']^0.$$

Поэтому с учетом неравенств $i \geqslant 1$ и $j \geqslant 2$ имеем

$$0 \leqslant j(i-1)[y,y']^0 + j(j-2)[y,y']^- < 0.$$

Полученное противоречие доказывает свойство 9.

Очевидным следствием свойства 7 (при $i = k$) является

Свойство 10. При любом индексе $i \in N_n$ бинарное отношение $\succ_{in}$ транзитивно.

Выполнимость свойств 8 и 10 для любого бинарного отношения $\succ_{in}$, $i \in N_n$, свидетельствует о том, что это отношение является частичным порядком.

Из свойств 9 и 10 вытекает

Свойство 11. Любое бинарное отношение $\succ_{in}$, где $i \in N_n$, ациклично.

Следуя [2, 6, 7], бинарное отношение $\succ$ на $\mathbf{R}^n$ назовем *правильным*, если выполняется следующее условие монотонности:

$$y \succ_{1n} y' \succ y'' \Longrightarrow y \succ y''.$$

Непосредственно из определения бинарного отношения $\succ_{ij}$ следует

Свойство 12. Если $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, то бинарное отношение $\succ_{ij}$ является правильным.

Следующий пример показывает, что при $j = 1$ свойство 9 перестает быть верным.

Пример 2. Пусть $y = (1,0,0,\ldots,0) \in \mathbf{R}^n$ и $y' = (0,1,1,\ldots,1) \in \mathbf{R}^n$. Тогда при любом индексе $i \in N_n$ имеем $y \succ_{i1} y'$, $y' \succ_{i1} y$.

Из свойства 9 с учетом этого примера следует

Теорема 3. *Бинарное отношение $\succ_{ij}$ асимметрично тогда и только тогда, когда $i \in N_n$ и $2 \leqslant j \leqslant n$.*

Следующий пример показывает, что при любой паре индексов $(i,j) \in N_n \times N_{n-1}$ существует множество $Y \subset \mathbf{R}^n$, на котором бинарное отношение $\succ_{ij}$ является циклическим.

Пример 3. Пусть $y^{(1)} = (n,n,\ldots,n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, а компоненты n-мерных векторов $y^{(2)}, y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$ задаются по формуле

$$y_k^{(s)} = \begin{cases} 2n - s + k & \text{при} \quad k \in \{1,2,\ldots,s-1\}, \\ n - s + 1 & \text{при} \quad k \in \{s, s+1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

где $s \in \{2,3,\ldots,n\}$.

Принимая во внимание свойство 5, нетрудно видеть, что из цикличности бинарного отношения $\succ_{nn-1}$ следует цикличность отношения $\succ_{ij}$

при любой паре $(i,j) \in N_n \times N_{n-1}$. Поэтому для доказательства цикличности бинарного отношения $\succ_{nn-1}$ достаточно убедиться в существовании цепочки

$$y^{(1)} \succ_{nn-1} y^{(2)} \succ_{nn-1} \ldots \succ_{nn-1} y^{(n)} \succ_{nn-1} y^{(1)}. \qquad (11)$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $n=2$. Тогда $Y=\{y^{(1)},y^{(2)}\}$, $y^{(1)}=(2,2)$, $y^{(2)}=(3,1)$, а бинарное отношение $\succ_{21}$ принимает вид

$$y \succ_{21} y' \Longleftrightarrow [y,y']^+ > [y,y']^0.$$

Поэтому

$$y^{(1)} \succ_{21} y^{(2)} \succ_{21} y^{(1)}.$$

Случай 2. $n \geqslant 3$. Покажем, что

$$y^{(n)} \succ_{nn-1} y^{(1)},\ y^{(s)} \succ_{nn-1} y^{(s+1)},\ s \in N_{n-1}.$$

Так как $y_n^{(n)} = 1 < n = y_n^{(1)}$ и для любого индекса $k \in N_{n-1}$ верны соотношения

$$y_k^{(n)} = n+k-1 > n = y_k^{(1)},$$

то

$$[y^{(n)},y^{(1)}]^+ = n-1,\ [y^{(n)},y^{(1)}]^- = 1,\ [y^{(n)},y^{(1)}]^0 = 0.$$

Отсюда видно, что

$$y^{(n)} \succ_{nn-1} y^{(1)}. \qquad (12)$$

Из соотношений

$$y_1^{(1)} = n < 2n-1 = y_1^{(2)},$$
$$y_k^{(1)} = n > n-1 = y_k^{(2)}, \quad k=2,3,\ldots,n,$$

следует, что

$$[y^{(1)},y^{(2)}]^+ = n-1, \quad [y^{(1)},y^{(2)}]^- = 1, \quad [y^{(1)},y^{(2)}]^0 = 0.$$

Поэтому

$$y^{(1)} \succ_{nn-1} y^{(2)}. \qquad (13)$$

Далее пусть $s \in \{2,3,\ldots,n-1\}$. Тогда в соответствии с определением векторов $y^{(s)}$ и $y^{(s+1)}$ будем иметь

$$y_k^{(s)} = 2n-s+k > 2n-(s+1)+k = y_k^{(s+1)}, \quad k \in N_{s-1},$$
$$y_s^{(s)} = n-s+1 < 2n-s+1 = y_s^{(s+1)},$$
$$y_k^{(s)} = n-s+1 > n-(s+1)+1 = y_k^{(s+1)}, \quad k=s+1,s+2\ldots,n.$$

Следовательно,

$$[y^{(s)}, y^{(s+1)}]^+ = n-1, \quad [y^{(s)}, y^{(s+1)}]^- = 1, \quad [y^{(s)}, y^{(s+1)}]^0 = 0,$$

т. е.

$$y^{(s)} \succ_{nn-1} y^{(s+1)}, \quad s = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Следовательно, с учетом (12) и (13) верна цепочка (11).

Пример 3 свидетельствует о том, что известный парадокс голосования Борда — Кондорсе [9, 10], состоящий в нетранзитивности предпочтения, устанавливаемого с помощью мажоритарного принципа, т. е. механизма голосования по принципу большинства, распространяется на любое бинарное отношение $\succ_{ij}$, где $(i, j) \in N_n \times N_{n-1}$. Тем самым всякое такое бинарное отношение не является транзитивным на $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Учитывая свойства 8 и 10, а также пример 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Бинарное отношение $\succ_{ij}$ транзитивно тогда и только тогда, когда $i \in N_n$ и $j = n$.*

Непосредственно из свойства 11 и примера 3 следует

Теорема 5. *Бинарное отношение $\succ_{ij}$ ациклично тогда и только тогда, когда $i \in N_n$ и $j = n$.*

Как обычно (см., например, [5]), множество $E_{ij}(Y)$ назовем *внешне устойчивым*, если для каждого $y \in Y \setminus E_{ij}(Y)$ существует такое решение $y' \in E_{ij}(Y)$, что $y \succ_{ij} y'$.

Используя свойство 7, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть $1 \leqslant i < k \leqslant n$. Если множество $E_{in}(Y)$ внешне устойчиво, то внешне устойчивым является и множество $E_{kn}(Y)$.*

Частным случаем теоремы 6 (при $i = 1$ и $k = n$) является следующий известный результат (см. теорему 1, с. 35 в [5]): из внешней устойчивости множества эффективных решений $P(Y)$ следует внешняя устойчивость множества слабо эффективных решений $S(Y)$.

В заключение заметим, что в [7] имеется исследование бинарных отношений в критериальном пространстве в связи с задачей синтеза операторов, агрегирующих индивидуальные отношения в групповое (коллективное) отношение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзерман М. А., Алексеров Ф. Т.** Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.

2. **Березовский Б. А., Борзенко В. И., Кемпнер Л. Н.** Бинарные отношения в многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1981.
3. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, вып. 4. С. 43–51.
4. **Миркин Б. Г.** Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
5. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
6. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989.
7. **Шоломов Л. А.** Исследование отношений в критериальных пространствах и синтез операторов группового выбора // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1994. Вып. 5. С. 109–143.
8. **Юдин Д. Б.** Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989.
9. **Borda J. C.** Memoires sur les elections au scrutin. Histoires de l'academi royal des sciences. Paris, 1781.
10. **Condorset M.** Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.
11. **Emelichev V. A., Pashkevich A. V.** Vector discrete problems: parametrization of an optimality principle and conditions of solvability in the class of algorithms involving linear convolution of criteria // Computer Science Journal of Moldova. 2000. V. 8, N 3. P. 260–269.
12. **Modern mathematical methods of optimization /** Ed. K.-H. Elster. Berlin: Akad. Verl., 1993.

Адрес авторов:

Белорусский
государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: emelichev@bsu.by

Статья поступила
3 января 2002 г.,
переработанный вариант —
8 апреля 2002 г.