ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2002. Серия 2. Том 9, № 1, 61–77

УДК 519.176

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЦЕНЫ

А. Н. Катулев, Ан. Н. Сотников

Изложен метод прогнозирования, основанный на вычислении условного апостериорного риска и частных его вариантов: максимума апостериорной вероятности, сводящегося к решению стохастического дифференциального уравнения и вычислению наилучшей оценки цены с применением модифицированного фильтра Калмана — Бьюси. Рассмотрен также вариант прогнозирования на основе разложения Карунена — Лоэва. Определены условия применения методов.

Введение

Необходимость в прогнозировании значений цены товара возникает во многих экономических моделях, особенно в тех, которые связаны с принципами принятия управленческих решений в процессе планирования оптимальных объемов производства и распределения продукции. Ценовое прогнозирование применяется и в теории полезности при формировании входной информации для построения косвенной функции полезности и выявления потребительских предпочтений в условиях изменяющейся ситуации на рынке.

Методы, используемые в настоящее время для прогнозирования цены в экономических задачах, широко представлены в пакетах программ обработки статистической информации. Основными из них считаются ARIMA — регрессионные, авторегрессионные и скользящего среднего модели и классические эконометрические модели, основанные на восстановлении условных распределений будущих значений процесса относительно прошлых [4]. Их класс достаточно широк и соответствует различным условиям. Однако он не обладает универсальностью по отношению к входной информации. Так, если число воздействующих факторов велико или они не наблюдаемы и имеет место существенно нестационарное (не сводимое к стационарному) изменение цен, то применение моделей из этого класса приводит к большим ошибкам в прогнозных значениях. Такого рода нестационарность вызвана влиянием внешних неподконтрольных факторов, и на определенных временных этапах она

играет доминирующую роль в формировании цены. Это особенно характерно для нестабильной экономики, в условиях которой цены претерпевают скачкообразное не убывающее изменение. Поэтому возникает объективная необходимость в разработке методов, позволяющих учитывать скачкообразное изменение цен при их прогнозировании для принятия управленческих решений.

Целью статьи является изложение нестационарной модели ценообразования и вытекающих из нее методов прогнозирования, расширяющих класс уже существующих методов.

Входными данными для прогнозирования является статистика значений цены, накопленная за предшествующие периоды. Основываясь на ней, а также на различных факторах, обусловливающих ценообразование, строится математическая модель динамики цены. На основании модели и введенного ниже критерия получены ее конкретизации и выполнено сравнение результатов прогнозирования.

1. Постановка задачи прогнозирования

Рассмотрим процесс изменения цены на рынке на какой-либо товар. На фиксированном временном отрезке его цена может быть постоянной, испытывать незначительные случайные колебания вокруг какого-либо значения, скачкообразно изменить свое значение на случайную величину.

Два первых вида поведения цены складываются в краткосрочном периоде на рынках, регулируемых государством, и чисто конкурентных рынках. В третьем случае рынок либо монополизирован, либо находится в сильной зависимости от внешних факторов, таких как процентная ставка, валютные котировки и (или) некоторые неэкономические факторы. Изменения цен будем рассматривать в краткосрочном (от нескольких недель до нескольких месяцев) и долгосрочном (год и выше) периодах.

Пусть для каждой производящей или реализующей товар фирмы процесс изменения цен во времени монотонная в общем случае негладкая функция времени t и избыточного спроса $z(t) = x(t) - y(t)$, где $y(t)$ — величина предложения, $x(t)$ — объем спроса. Тогда ценообразование зависит только от технологии производства, проявляющейся в величине предложения, а также от потребности покупателей в данном товаре и от инфляции, т. е. в дифференциальной форме имеем

$$dp(t) = f(t, p(t), z(t))dt, \quad p(\tau) = p_0, \tag{1}$$

где $f(t, p(t), z(t))$ — скорость изменения цен во времени — непрерывная функция по переменной t, определяющая тренд цены и восстанавливае-

мая по статистической информации [8, 9] для каждого товара по предлагаемой в п. 2.1 схеме.

Кроме того, для регулируемого процесса ценообразования, когда фирма в силу своего положения на рынке имеет возможность диктовать цену, в правую часть (1) может быть введен параметр управления $u(t)$. В рамки этой модели вмещается ряд параметров (в том числе и неэкономических), прямо влияющих на цену, значения которых могут быть получены из соответствующих источников [8, 9]. Здесь мы ограничимся только избыточным спросом.

Теперь рассмотрим случай, когда цены постоянно колеблются около своего тренда вследствие аддитивного воздействия на них случайных факторов, и будем считать, что приращения цены — независимые величины. На цену отдельного товара влияет множество таких случайных факторов: изменение оптовых цен на сырье, перенос торговой точки в другой район, появление новых или уход с рынка старых конкурентов и т. д. Как следствие, на цену по региону оказывает влияние число факторов, пропорциональное числу фирм-продавцов. Воздействие каждого отдельного фактора невелико, и они, как правило, не зависят друг от друга. В результате на основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что в краткосрочном периоде закон распределения приращений процесса изменения цен близок к нормальному. Будем считать, что трендовая составляющая не оказывает влияния на случайную и, наоборот, случайные изменения не влияют на характер тренда. Тогда выражение для цены можно записать в разностной форме

$$p(t + \Delta t) - p(t) \approx f(t, p(t), z(t))\Delta t + \xi(t, p(t), \Delta t),$$

где $z(t)$ — параметр, а $\xi(t, p(t), \Delta t)$ — флуктуационная составляющая из-за влияния большого числа независимых факторов.

Так как при небольших изменениях t незначительно изменяется $p(t)$, то в малом флуктуационную составляющую будем считать однородным случайным процессом

$$\xi(t, p(t), \Delta t) = F(t, p(t))(\omega(t + \Delta t) - \omega(t)),$$

где $F(t, p(t))$ — среднее квадратическое отклонение, $\omega(t + \Delta t) - \omega(t)$ — приращения винеровского процесса. При этом приращение цены можно записать в виде

$$p(t + \Delta t) - p(t) = f(t, p(t), z(t))\Delta t + F(t, p(t))\Delta\omega(t) \tag{2}$$

или в виде уравнения в дифференциальной форме

$$dp(t) = f(t, p(t), z(t))dt + F(t, p(t))d\omega(t). \tag{3}$$

Уравнение (3) обычно записывается в интегральной форме

$$p(t) = p_0 + \int_{\tau}^{t} f(t, p(t), z(t))dt + \int_{\tau}^{t} F(t, p(t))d\omega(t),$$

где интеграл по случайному процессу $d\omega(t)$ является стохастическим.

На практике время от времени приходится наблюдать резкие изменения цен — скачки. Их появление свидетельствует о нестабильности рынка или экономики в целом или о ее зависимости от внешних факторов: политических, спекулятивных и др. Причем появление таких скачков не связано с чисто сезонными колебаниями цены.

Как правило [8, 9], скачки цен происходят относительно редко, а промежутки между ними — независимые случайные величины. Пусть величины скачков будут всюду положительными, т. е. цены имеют тенденцию к росту во времени. Тогда подобную ситуацию можно моделировать с помощью пуассоновского случайного процесса, при условии вычисления параметра $\lambda = \lambda(t)$ — среднего числа скачков в единицу времени — по статистическим данным [8, 9] с учетом того, что амплитуды скачков случайны и закон распределения их вероятности может быть восстановлен по тем же статистическим данным. Отсюда следует, что промежутки между скачками характеризуются показательным распределением с параметром $\alpha(t) = \psi(\lambda(t))$.

Итак, в уравнение динамики цены необходимо добавить еще одно слагаемое, т. е. (2) преобразуется к виду

$$p(t + \Delta t) - p(t) = f(t, p(t), z(t))\Delta t + F(t, p(t))\Delta\omega + c(v)\nu(\Delta t, \Delta v),$$

а уравнение (3) — к виду

$$dp(t) = f(t, p(t), z(t))dt + F(t, p(t))d\omega(t) + \int_{V} c(v)\nu(dt, dv), \tag{4}$$

где $\nu(\Delta t, A)$ — случайная пуассоновская мера с параметром $\lambda(t)$, v — случайная величина, вызывающая случайное приращение цены согласно закону $P(c(v))$. Далее будем исходить из закона $P(c(v)) = \delta(v - a)$, $a > 0$, так как цена есть возрастающий процесс.

Уравнение (4) назовем стохастической нестационарной моделью, описывающей процесс изменения цены. В математическом плане такая модель подтверждается известным [1] утверждением, что всякий стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями можно представить суммой независимых пуассоновских и винеровских

процессов. Любая реализация цены есть решение уравнения (4) и имеет вид

$$p(t) = p_0 + \int\limits_{\tau}^{t} f(t, p(t), z(t))dt + \int\limits_{\tau}^{t} F(t, p(t))d\omega(t) + \int\limits_{\tau}^{t} \int c(v)\nu(dt, dv), \quad (5)$$

где интеграл от пуассоновской меры

$$\int\limits_{\tau}^{t} \int c(v)\nu(dt, dv) = \int\limits_{\tau}^{t} \sum_{l} c(v_l)\delta(t - t_l)dt \qquad (6)$$

и

$$\delta(t_l - t) = \begin{cases} 0, & t \neq t_l, \\ 1, & t = t_l. \end{cases}$$

Интеграл (6) представляет собой скачкообразное изменение цены в случайные моменты времени $t_1, \ldots, t_l$. Видно, что со случайным изменением амплитуд скачков $c(v_l)$ решение (5) представимо в виде

$$p(t) = p_0 + \int\limits_{\tau}^{t} f(t, p(t), z(t))dt + \int\limits_{\tau}^{t} F(t, p(t))d\omega(t) + \int\limits_{\tau}^{t} \sum_{l} c(v_l)\delta(t - t_l)dt \quad (7)$$

и составляет реализацию случайного процесса. Поэтому для вычисления прогнозных значений необходимо воспользоваться законом распределения этого процесса [2] либо его первыми моментами как числовыми характеристиками. Однако такой подход будет неполным, так как прогнозирование связано с ошибками, для учета которых целесообразно воспользоваться характеристикой риска принятия прогнозного решения. В качестве такого риска как критерия качества прогнозирования примем условный апостериорный риск, накопленный к текущему моменту времени. Его выражение запишем в виде

$$J(w(p(t), t; p(\tau), \tau) = M\left[\int\limits_{\tau}^{T} L(t, p(t), p^*(t))dt \mid p(\tau)\right], \qquad (8)$$

где $L(t, p(t), p^*(t))$ — ограниченная функция потерь. Процесс $p(t)$ задается распределением вероятности $w(p(t), t; p(\tau), \tau)$ перехода в состояние $(p(t), t)$ из состояния $(p(\tau), \tau)$, $\tau \leqslant t$. Это распределение находится из обратного уравнения Колмогорова, записываемого с учетом уравнения

(4) в виде

$$-\frac{\partial w(p(t),t;p(\tau),\tau)}{\partial\tau}=f(t,p(t),z(t))\frac{\partial w(p(t),t;p(\tau),\tau)}{\partial p}$$
$$+\frac{1}{2}F^2(t,p(t))\frac{\partial^2 w(p(t),t;p(\tau),\tau)}{\partial p^2}$$
$$+\int\Big[w(p(t)+c(v),t;p(\tau),\tau)-w(p(t),t;p(\tau),\tau)\Big]\delta(v-a)dv. \quad (9)$$

Очевидно, что решение относительно прогнозного значения цены следует отыскивать путем минимизации критерия (8) на множестве допустимых значений D, совпадающем с положительным ортантом R^n_+, где n — размерность вектора цен:

$$S(w(p(t),t;p(\tau),\tau))=\min_{p^*(t)\in D}M\Big[\int\limits_0^\tau L(t,p(t),p^*(t))\mid p(\tau)\Big]. \quad (10)$$

В результате стандартных [6] преобразований (10) с учетом (9) получим дифференциальное уравнение для $S(w(p(t),t;p(\tau),\tau),\tau,p^*(t))$ и последующего вычисления прогнозного значения цены

$$-\frac{\partial S}{\partial\tau}=\min_{p\in D}\Big[f(t,p(t),z(t))\frac{\partial S}{\partial p}+\frac{1}{2}F^2(t,p(t))\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}$$
$$+\int\Big[S(p(t)+c(v),t)-S(p(t),t)\Big]\delta(v-a)dv+L(t,p(t),p^*(t))\Big] \quad (11)$$

с граничным условием $S(w,p(T),T)=0$.

Если функция потерь в (8) имеет вид

$$L(p_t,p^*_t)=\begin{cases}0, & |p_t-p^*_t|\leqslant k,\\ 1, & |p_t-p^*_t|>k,\end{cases}$$

то критерий минимума условного апостериорного риска (10) преобразуется в критерий максимума апостериорной вероятности и прогноз цены с учетом (4) можно получить как наилучшую прогнозированную оценку из решения уравнения модифицированного фильтра Калмана — Бьюси. В случае, когда в (10) потери $L(t,p(t),p^*(t))$ малы и ими можно пренебречь, критериальный функционал (10) обнуляется и оценка находится непосредственно из решения дифференциального уравнения (4), а прогнозное значение цены можно отыскивать путем экстраполяции траектории (7) до следующего момента времени. В этом же случае можно применить метод, основанный на разложении случайного процесса в базисе собственных функций [3].

Таким образом, изложенные четыре подхода к получению оптимальных прогнозов для цены составляют постановку исследуемой задачи. Приведем структуры алгоритмов ее решения при каждом подходе.

2. Структурные схемы алгоритмов прогнозирования цены

2.1. *Прогнозирование на основе минимизации апостериорного риска.*

Пусть заданы или определены из анализа статистической информации функции $f(t, p(t), z(t))$ и $F(t, p(t))$ в уравнении динамики цены (4) и задан критериальный функционал (10) с квадратичной функцией потерь и $w(p(t), t; p(\tau), \tau)$ — плотностью распределения вероятностей перехода. Для получения аналитического выражения для p^* разложим функции $f(t, p(t), z(t))$ и $F(t, p(t))$ в ряды Тейлора до линейного члена и обозначим

$$A_0 = f(t_0, p_0) + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t_0,p_0}(t - t_0), \quad A_1 = \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{t_0,p_0} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial t}\Big|_{t_0,p_0}(t - t_0),$$

$$B_0 = F(t_0, p_0) + \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{t_0,p_0}(t - t_0), \quad B_1 = \frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{t_0,p_0} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial t}\Big|_{t_0,p_0}(t - t_0).$$

Продифференцируем правую часть (11) по p^* и приравняем результат к нулю:

$$A_1\frac{\partial S}{\partial p} + \Big(B_0B_1 + B_1^2(p^* - p_0)\Big)\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} - 2(p - p^*) = 0.$$

В результате получаем оптимальную цену p^* как функцию от переменных S и p:

$$p^* = \frac{2p - A_1\frac{\partial S}{\partial p} - B_0B_1\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}p_0}{2 + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}}.$$

Подставив это выражение в (11) для получения дифференциального уравнения для $S(t, p(t))$, получаем

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial S}{\partial \tau} &= \left(A_0 - A_1p_0 + A_1\frac{2p - A_1\frac{\partial S}{\partial p} - B_0B_1\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}p_0}{2 + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}}\right)\\
&\times\frac{\partial S}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}\left(B_0 - B_1p_0 + B_1\frac{2p - A_1\frac{\partial S}{\partial p} - B_0B_1\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}p_0}{2 + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}}\right)^2\\
&\quad + \int\Big[S(p(t) + c(v), t) - S(p(t), t)\Big]\delta(v - a)dv\\
&\quad + \left(p - \frac{2p - A_1\frac{\partial S}{\partial p} - B_0B_1\frac{\partial^2 S}{\partial p^2} + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}p_0}{2 + B_1^2\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}}\right)^2. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Представим $S(t, p(t))$ в виде ряда по степеням $p(t)$ с неизвестными коэффициентами $h_i(t)$. Ограничимся тремя слагаемыми

$$S(t, p(t)) = h_0(t) + h_1(t)p(t) + h_2(t)p^2(t). \qquad (13)$$

Подставив (13) в (12) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $p(t)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $h_i(t)$:

$$
\begin{aligned}
-\dot h_0 = h_1(A_0 + A_1 p_0) + \frac{A_1 h_1}{1 + B_1^2 h_2}\Big(B_1^2 h_2 p_0 - \frac{1}{2} A_1 h_1 - B_0 B_1 h_2\Big) \\
+ h_2\Big(B_0 - B_1 p_0 - \frac{B_1 A_1 h_1}{2(1 + B_1^2 h_2)} - \frac{B_1^2 B_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2} + \frac{B_1^3 p_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2}\Big)^2 \\
+ h_1 \overline{c(v)} + h_2 \overline{\overline{c(v)}} + \frac{(2B_1^2 h_2 p_0 - 2B_1 B_0 h_2 - A_1 h_1)^2}{4(1 + B_1^2 h_2)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\dot h_1 = 2h_2(A_0 - A_1 p_0) - \frac{A_1^2 h_1 h_2}{1 + B_1^2 h_2} - \frac{2A_1 B_1 B_0 h_2^2}{1 + B_1^2 h_2} + \frac{2h_2^2 A_1 B_1^2 p_0}{1 + B_1^2 h_2} \\
+ 2h_2 \frac{B_1(1 - h_2)}{1 + B_1^2 h_2}\Big(B_0 - B_1 p_0 - \frac{B_1 A_1 h_1}{2(1 + B_1^2 h_2)} - \frac{B_1^2 B_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2} + \frac{B_1^3 p_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2}\Big)^2 \\
+ 2h_2 \overline{c(v)} + \frac{A_1 h_1}{1 + B_1^2 h_2} + \frac{2B_1 B_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2} - \frac{2B_1^2 p_0 h_2}{1 + B_1^2 h_2} \\
+ \frac{(1 - A_1 h_2)(2B_1^2 h_2 p_0 - 2B_1 B_0 h_2 - A_1 h_1)}{(1 + B_1^2 h_2)^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\dot h_2 = 1 + \frac{2A_1 h_2}{1 + B_1^2 h_2} - \frac{2(A_1 h_2)^2}{1 + B_1^2 h_2} + h_2 \frac{B_1^2 (1 - h_2)^2}{(1 + B_1^2 h_2)^2} \\
- \frac{2(1 - A_1 h_2)}{1 + B_1^2 h_2} + \frac{(1 - A_1 h_2)^2}{(1 + B_1^2 h_2)^2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

с граничными условиями $h_0(T) = 0, h_1(T) = 0, h_2(T) = 0$. Здесь

$$
\overline{c(v)} = \int c(v)\delta(v - a)dv, \quad \overline{\overline{c(v)}} = \int [c(v)]^2 \delta(v - a)dv.
$$

Для реализации метода необходимо восстановить функции $F(t, p(t))$ и $f(t, p(t), z(t))$. Для определения вида функции, характеризующей изменения цены в зависимости от технологического прогресса (она отражает и инфляцию при ее умеренных темпах), из имеющейся статистики исключается накопленная сумма значений скачков

$$
p_{tr}(t_k) = p(t_k) - \sum_{l, t_k \geqslant t_l} c(v_l), t_k \in [t_0, T], \tag{15}
$$

а полученная статистика с помощью метода наименьших квадратов сглаживается в тренд $T(t, p(t))$. Этот тренд представляет собой динамику

цены в зависимости от изменения технологии, и тогда в правой части (4) первое слагаемое вычисляется как

$$f(t,p(t),z(t)) = T_t'(t,p(t)). \tag{16}$$

Вычислим значение $F(t_k,p(t_k))$ — среднеквадратическое отклонение цены от тренда для каждого момента t_k:

$$F(t_k,p(t_k)) = \sqrt{\sum_{j,t_k \geqslant t_j} \frac{\left(p(t_j) - T(t_j,p(t_j)\right)^2}{N_j}}, t_k \in [t_0,T] \tag{17}$$

и с помощью метода наименьших квадратов восстановим вид функции $F(t,p(t))$.

Структура соответствующего алгоритма представляется совокупностью следующих операций.

1. Восстановить функцию $f(t,p(t),z(t))$ по выражениям (15) и (16).
2. Восстановить функцию $F(t,p(t))$ методом наименьших квадратов по значениям (17).
3. Решить систему уравнений (14).
4. Задать для момента времени t_k требуемый уровень минимума средних потерь $S(t_k,p(t_k)) \geqslant 0$.
5. Решить уравнение (13) относительно значения цены p_k^*.

2.2. *Структура алгоритма прогнозирования на основе реализации модифицированного фильтра Калмана — Бьюси.*

Модифицированное уравнение для оптимальной оценки записывается в виде

$$\frac{\partial p^*(t)}{\partial t} = f(t,p^*(t),z(t)) + K(t)[y(t) - p^*(t)] + \int\limits_{t-T}^{t} \frac{M[\phi(t)y(\tau_2)]}{M[y(t)y(\tau_1)]} H(t,\tau_2)y(\tau_2)d\tau_2, \tag{18}$$

где $p^*(t)$ — значение оценки, $K(t)$ — коэффициент усиления фильтра, определяемый из соотношения

$$K(t) = f(t,p(t),z(t))R(t)[R_\phi(t) + R(t)]^{-1}. \tag{19}$$

В этом соотношении $R(t) = M[p^*(t) - p(t)][p^*(t) - p(t)]$ — дисперсия ошибок оценки, для которой справедливо рекуррентное соотношение

$$R(t+1) = \Big[f(t,p(t,z(t)) - K(t)\Big]^2 R(t) + R_\eta(t)K^2(t) + R_\phi(t+1) + 2M\Bigg[\int\limits_{t-T}^{t} \frac{M[\phi(t)y(\tau_2)]}{M[y(t)y(\tau_1)]} H(t,\tau_2)d\tau_2\Bigg][p^*(t) - p(t)]; \tag{20}$$

в нем функции $R_\eta(t) = M[\eta(t)\eta(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$ и $R_\phi(t+1)$ известны.

Модификация связана с представлением уравнения состояния в виде

$$dp(t) = f(t, p(t), z(t))dt + F(t, p(t))d\omega(t) + \int\limits_V c(v)\nu(dt, dv)$$

и уравнения наблюдения в виде

$$y(t) = p(t) + \eta(t),$$

где $\eta(t)$ — гауссов белый шум, $y(t)$ — наблюдаемое значение.

Структура алгоритма прогнозирования включает следующие операции.

1. Задать начальные приближения из условия $p(\tau) = p^*(\tau) : p^*(\tau) = p_0; R(\tau) = 0$.

2. Вычислить коэффициент усиления $K(t)$ по формуле (19).

3. Вычислить по формуле (20) значение $R(t+1)$.

4. Получить прогноз цены $p^*(t+1)$ как численное решение уравнения (18).

Произведя операции 2–4 при $t = \tau, \tau+1, \ldots,$ получим траекторию предсказанных на шаг вперед значений цены.

2.3. *Структура алгоритма прогнозирования цены, основанного на решении дифференциального уравнения* (4) *методом последовательных приближений.*

Составим рекуррентные соотношения вида

$$p^{r+1}(t_{k+1}) = p(t_{k+1}) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, p^r(s), z(s))ds + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} F(s, p^r(s))d\omega(s). \quad (21)$$

Приведем вторую итерацию [7] метода, введя предварительно следующие обозначения:

$$f(s, p^r(s), z(s)) = f, F(s, p^r(s)) = F, \Delta = (t_{k+1} - t_k).$$

Вторая итерация после взятия или оценки интегралов будет иметь вид

$$p(t_{k+1}) = p(t_k) + f\Delta + F[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p}f\Big)\frac{\Delta^2}{2}$$
$$+ \Big(\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p}F + \frac{\partial F}{\partial p}f\Big)\frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]\Delta}{2} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2 - \Delta}{2}. \quad (22)$$

Заметим, что при реализации метода на ЭВМ возникает необходимость моделировать случайный винеровский процесс в моменты t_{k+1} и t_k

или непосредственно значения $\Delta\omega$. Здесь воспользуемся рекомендацией [10] — значения $\Delta\omega$ можно вычислять по формуле

$$\Delta\omega_i = \zeta_i \sqrt{\frac{N_0 \Delta t}{2}}, i = 0, 1, 2, \ldots$$

или

$$\Delta\omega_i = \zeta_i \Delta t,$$

где ζ_i — независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, их значения можно получить с помощью стандартных процедур из прикладных пакетов Statgraphics или Stadia.

Далее итерационный процесс строится для двух случаев: в первом величина скачка не оказывает воздействия на приращение цены в следующие после скачка моменты времени (последействие отсутствует), во втором — оказывает.

В первом случае модифицируем итерационный процесс (22) с учетом третьего слагаемого в правой части (5):

$$\begin{aligned} p(t_{k+1}) = p(t_k) + f\Delta + F[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} f\Big)\frac{\Delta^2}{2} \\ + \Big(\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} F + \frac{\partial F}{\partial p} f\Big)\frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]\Delta}{2} \\ + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2 - \Delta}{2} + c_l(v)\delta(t_l - t_k), \quad (23) \end{aligned}$$

где $1 \leqslant l \leqslant L$ и L — число скачков на отрезке $[\tau, T]$, распределенное по закону Пуассона, а содержательная сущность функций $c(v)$, $\delta(t_l - t_k)$ была раскрыта в разд. 1. Величину скачка $c_l(v)$ будем считать равномерно распределенной и моделировать ее с помощью стандартных процедур генерации случайных чисел.

Обратимся ко второму случаю, когда $p(t)$ при $t > t_l$, где t_l — моменты скачков, зависит от $c_l(v)$. Тогда для получения численного решения (5) будем действовать по схеме, аналогичной примененной для уравнения (23). Эту зависимость представим функцией $R(t, p, c_l(v))$ вида

$$R(t, p, c_l(v)) = c_l(v)\delta(t_l - t) + s(t, p), \quad (24)$$

где первое слагаемое описывает скачок в момент t_l, а второе — известную функцию последействия, определенную следующим образом:

$$s : [\tau, T] \times P \to P, \quad s(t_l) = 0.$$

Здесь P — область принимаемых значений функции $p(t)$.

Разложим (24) в ряд Тейлора до первой производной в окрестности точки t_k. Если в этот момент наблюдается скачок, то функция будет недифференцируема в этой точке:

$$\begin{aligned} R(t, p^{(1)}(t), v) &= R(t_k, p^{(1)}(t_k), v) + \Big[R(t, p^{(1)}(t), v)\Big]_{t=t_k} (t - t_k) + o(\Delta t) \\ &= s(t_k, p^{(1)}(t_k)) + \Big[s(t, p^{(1)}(t))\Big]_{t=t_k} (t - t_k) + o(\Delta t). \quad (25) \end{aligned}$$

Вторая итерация после выполнения действий, аналогичных произведенным в первом случае, будет иметь вид

$$\begin{aligned} p(t_{k+1}) &= p(t_k) + f\Delta + s\Delta + F[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)] + \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} f\Big) \\ &+ \Big(\frac{\partial f}{\partial p} s + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial p} f + \frac{\partial s}{\partial p} s\Big)\frac{\Delta^2}{2} + \Big(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial p} f + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial f}{\partial p} F + \frac{\partial s}{\partial p} F\Big) \\ &\times \frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]\Delta}{2} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{[\omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)]^2 - \Delta}{2} + c_l(v)\delta(t_l - t_k). \quad (26) \end{aligned}$$

В результате структура алгоритма прогнозирования цены на основе решения уравнения (5) методом Пикара в обоих случаях включает следующие операции.

1. Задать начальное значение p_0.
2. Задать шаг Δ для итерационного метода Пикара.
3. Определить длину промежутка Δt_l до следующего скачка.
4. Округлить величину Δt_l до следующего значения, кратного шагу итерационного метода Δ.
5. Получить прогнозные значения как результаты итерационного процесса по формуле (23) или (26) на промежутке Δt_l.
6. Вычислить величину скачка c_l.
7. Определить прогнозное значение цены в момент скачка

$$p^{(2)}(t_k = l) := p^{(2)}(t_k = l) + c_l.$$

8. Перейти к п. 3.

2.4. *Структура алгоритма прогнозирования цены, основанного на применении разложения Карунена — Лоэва к решению уравнения* (4).

Значения цены $p(t)$ представим разложением в базисе собственных функций $\phi_i(t)$ в виде сходящегося в среднем квадратическом ряда

$$p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\phi_i(t)}{\sqrt{\lambda_i}},$$

а наилучшее предсказанное значение для цены вычислим по формуле

$$p^*(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\phi_i^*(t+\Delta t)}{\sqrt{\lambda_i}}, \tag{27}$$

где $\phi_i(t)$ — собственные функции интегрального уравнения

$$\lambda \phi_i(t) = \int_0^T r(t,\tau)\phi(\tau)d\tau, \tag{28}$$

λ_i — соответствующие собственные значения, α_i — случайные величины такие, что математические ожидания $M[\alpha_i] = 0$, $M[\alpha_i \alpha_j] = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$r(t,\tau)$ — автокорреляционная функция, оцениваемая по статистическим данным о значениях цены за предыдущие периоды. Для решения интегрального уравнения (28) можно воспользоваться методом Ритца [5]. Полученный по формуле (27) прогноз является оптимальным [7].

Структура алгоритма прогнозирования цены согласно изложенному методу включает следующие операции.

1. Вычислить автокорреляционную матрицу $r(t,\tau)$.
2. Для полученной матрицы $r(t,\tau)$ вычислить собственные векторы и собственные числа.
3. Сгладить собственные векторы в функции $\phi_k(t)$.
4. Получить значения $\phi_k(t+\Delta t)$.
5. Применить формулу (27) для получения прогноза.

Отметим, что расширение базиса из характеристических функций обеспечивает повышение точности аппроксимации (27), однако вместе с тем требует оперирования с матрицами большей размерности.

3. Анализ результатов

Предварительно получим результаты прогнозирования цены с использованием классических методов ARIMA: метода Холта, экспоненциального сглаживания Брауна и метода прогнозирования на основе вычисления тренда [11]. Результаты прогнозирования по изложенным в разд. 2 методам и методам ARIMA приведены в табл. 1–3, где под номером 1 обозначен метод прогнозирования на основе тренда; 2 — метод Холта с параметрами $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,2$; 3 — метод Брауна (Linear) с параметром $\alpha = 0,5$; 4 — метод Брауна (Simple) с параметром

$\alpha = 0,99$; 5 — метод экстраполяции на основе численного решения уравнения (4); 6 — метод прогнозирования с использованием разложения Карунена — Лоэва; 7 — метод, основанный на модифицированном фильтре Калмана — Бьюси; 8 — метод минимизации апостериорного риска при заданном значении минимальных средних потерь $S(t_k, p) = 0$. В табл. 3 под номером 9 приведен временной ряд реальных значений цены на мясо (за 1 кг) за период с января 1997 г. по июль 1999 г., на который осуществлялось прогнозирование. Отметим некоторые особенности применения методов.

Метод, основанный на модифицированном фильтре Калмана — Бьюси, в долгосрочном периоде неприменим, так как для получения прогноза требуется информация о значении цены в предыдущий момент времени. Метод 6, использующий автокорреляционную матрицу, в долгосрочном прогнозировании предпочтительнее методов 3 и 4, поскольку в отличие от них отслеживает динамику цены. Однако ввиду грубой

Таблица 1

Числовые характеристики ошибок оценивания в краткосрочном периоде и применимость методов в различных условиях

Номер алгоритма	Средняя ошибка	Среднекв. ошибка	Прогноз скачков	Краткоср. прогноз	Долгоср. прогноз
1	0	2,129	–	+	+
2	0,098	1,915	–	+	+
3	0,029	2,004	–	+	–
4	0,463	1,921	–	+	–
5	0,017	1,904	+	+	+
6	-0,666	2,936	+	–	+
7	0,029	1,383	+	+	–
8	0,100	0,934	+	+	+

Таблица 2

Числовые характеристики ошибок оценивания в долгосрочном периоде

Ошибка	Номер алгоритма							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Средняя	1,125	-2,113	-3,236	-3,236	-0,783	-2,031	–	1,77
Среднекв.	3,056	4,021	7,615	7,615	2,813	7,214	–	3,223

Таблица 3

Результаты прогнозирования

Номер t_k	Номер алгоритма								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	14,43	–	–	–	14,40	14,40	14,40	14,40	14,40
2	14,35	–	–	14,4	14,48	14,41	14,40	14,56	14,32
3	14,31	14,24	14,32	14,32	14,44	14,69	14,37	14,69	14,42
4	14,32	14,35	14,40	14,42	14,56	14,77	14,43	14,77	14,48
5	14,37	14,44	14,49	14,48	14,65	14,87	14,50	14,97	14,68
6	14,47	14,67	14,71	14,68	14,84	14,99	14,71	15,26	14,74
7	14,61	14,76	14,81	14,74	14,97	15,11	14,77	15,42	14,84
8	14,79	15,07	14,92	14,84	15,01	15,23	14,99	15,58	14,98
9	15,02	15,03	15,07	14,98	15,03	15,42	15,10	15,65	15,02
10	15,29	15,08	15,12	15,02	16,89	15,57	15,07	15,72	15,08
11	15,61	15,14	15,17	15,08	15,37	15,65	15,17	15,89	15,09
12	15,97	15,15	15,17	15,09	15,44	15,78	15,26	16,17	16,82
13	16,38	17,00	16,88	16,80	16,87	15,56	16,95	16,95	16,80
14	16,83	17,14	17,27	16,80	16,99	15,87	16,91	17,14	16,91
15	17,32	17,21	17,36	16,91	17,19	16,12	17,07	17,43	16,98
16	17,86	17,24	17,34	16,98	17,27	16,35	17,05	17,53	16,98
17	18,45	17,19	17,25	16,98	17,34	16,51	17,03	17,68	17,07
18	19,07	17,25	17,25	17,07	17,40	16,75	17,13	17,79	17,18
19	19,75	17,34	17,31	17,18	17,46	16,97	17,17	17,96	17,18
20	20,46	17,32	17,29	17,18	17,51	17,15	17,25	18,16	17,27
21	21,22	17,39	17,35	17,27	22,33	17,39	17,30	18,45	23,77
22	22,03	24,40	23,84	23,70	23,80	17,26	23,98	24,12	23,83
23	22,88	25,05	25,51	23,83	23,87	18,09	23,85	24,24	23,89
24	23,77	24,96	25,57	23,89	23,95	18,47	23,91	24,61	27,07
25	24,71	28,19	28,34	27,04	27,13	18,55	27,29	27,19	27,11
26	25,69	28,36	28,76	27,11	27,28	19,44	27,06	27,38	27,22
27	26,72	28,27	28,56	27,22	27,39	20,17	27,34	27,46	27,26
28	27,79	28,11	28,22	27,26	27,41	20,89	27,30	27,79	27,34
29	28,91	28,03	27,97	27,34	27,44	21,42	27,42	27,96	27,39
30	30,07	27,95	27,80	27,39	27,53	21,96	27,51	28,14	27,48

аппроксимации автокорреляционной функции его точность в рассмотренном примере ниже, чем других тестируемых методов.

Из сравнения результатов работы методов при прогнозировании на разные сроки можно сделать следующие выводы.

1. В краткосрочном периоде все методы (за исключением метода 6) дают практически одинаковые результаты. Незначительный проигрыш в точности методов среди новых предлагаемых методов обусловлен учетом большего числа факторов — источников ошибок.

2. В долгосрочном прогнозировании без корректировки авторегрессионные методы 1 и 2 обладают бóльшим среднеквадратическим отклонением от истины, чем методы, предложенные в настоящей статье, методы 3 и 4 не отслеживают динамику цены и поэтому непригодны. Метод 5 позволяет получить вероятное время скачка цены, оценить его величину и, таким образом, прогнозировать ее значение на предстоящий период.

3. При реализации метода 6 необходимо как можно точнее вычислять собственные функции. Базис из трех функций, как показывают результаты, недостаточен для применения этого метода в задаче прогнозирования цены.

4. Предложенные новые методы прогнозирования цены более полно отражают реальный процесс ценообразования и точнее вырабатывают прогнозные значения в условиях нестационарности; они расширяют инструментарий для решения задач прогнозирования экономических показателей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.
2. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1961.
3. **Ивахненко А. Г., Лапа В. Г.** Кибернетические предсказывающие устройства. Киев: Наук. думка, 1965.
4. **Клеменс М. П., Хендри Д. Ф.** Прогнозирование в макроэкономике // Обозрение прикл. и пром. математики. 1996. Т. 3, вып. 6.
5. **Михлин С. Г.** Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.
6. **Параев Ю. И.** Введение в статистическую динамику процессов правления и фильтрации. М.: Наука, 1976.
7. **Розов А. К.** Оценивание параметров случайных сигналов в автоматических системах. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990.
8. **Россия в цифрах:** Краткий стат. сб. М.: Госкомстат России, 1997–1999.

9. **Тверская область в цифрах:** Стат. ежегодник. Тверь: Тверской обл. ком. гос. статистики, 1997–2000.
10. **Тихонов А. Н., Миронов В. Н.** Марковские случайные процессы. М.: Наука, 1963.
11. **Тюрин Ю. Н., Макаров А. А.** Статистический анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1965.

Адрес авторов:

Тверской государственный
университет,
ул. Желябова, 33,
170000 Тверь, Россия.
E-mail: a000987@tversu.ru

Статья поступила
28 декабря 2001 г.