ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2002. Серия 2. Том 9, № 2, 3–12

УДК 519.8

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ЖАДНЫМ АЛГОРИТМОМ*)

Н. И. Глебов

Дается обзор результатов, относящихся к условиям разрешимости некоторых задач целочисленного программирования (комбинаторной оптимизации) посредством алгоритма покоординатного подъема (жадного алгоритма).

Задача дискретной (комбинаторной) оптимизации характеризуется, во-первых, конечным множеством $\widehat{Q}$ допустимых решений, элементами которого в случае задачи целочисленного программирования являются целочисленные векторы, и, во-вторых, целевой функцией f, принадлежащей определенному классу Φ. Речь будет идти о задачах максимизации.

В случае использования жадного алгоритма наряду с множеством допустимых решений $\widehat{Q}$ задается также некоторое множество Q, элементы которого могут «просматриваться» жадным алгоритмом в процессе поиска оптимального допустимого решения. При этом предполагается, что Q содержит $\widehat{Q}$ и целевая функция f определена на множестве Q.

Согласно рассматриваемой версии алгоритма покоординатного подъема процесс вычислений начинается с точки 0. (Предполагается, что начало координат принадлежит множеству Q.) По достижении некоторой точки $x \in Q$ на очередном шаге процесса происходит переход к такой точке $x' \in Q$, при котором только одна из координат вектора x изменяется, увеличиваясь на 1, и приращение функции $f(x)$ оказывается максимальным (а в случае $x \in \widehat{Q}$ — и положительным). Процесс вычислений заканчивается и (последняя) достигнутая точка объявляется результатом работы алгоритма, если осуществить из нее переход в другую точку с соблюдением перечисленных выше условий невозможно.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–01153) и Федеральной программы «Университеты России» (проект УР.04.01.012).

Что касается множеств Q и $\widehat{Q}$, то фактически исследовались два случая: в одном из них $\widehat{Q}$ представляет собой множество максимальных относительно частичного порядка $\leqslant$ точек множества Q (задача 1), а в другом — $Q = \widehat{Q}$ (задача 2). (Для векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ неравенство $x \leqslant y$ эквивалентно тому, что компоненты вектора $y - x$ неотрицательны.)

По поводу класса Φ целевых функций f можно отметить, что наибольшее внимание исследователей было уделено классам линейных и вогнутых сепарабельных функций. Затронуты были также класс функций, являющихся суперпозицией вогнутых сепарабельных и линейных функций, и классы, характерные для задач на узкие места.

Наряду с указанной выше версией алгоритма рассматривались также некоторые ее модификации. Если в основном варианте рассматриваемого алгоритма множество допустимых направлений перехода из текущей точки в следующую определяется только условием принадлежности последней множеству Q, то в модифицированных версиях это множество тем или иным образом сужается. Исследовались и другие модификации жадного алгоритма.

Следует также упомянуть, что рассматривались условия разрешимости жадным алгоритмом специальной задачи о длиннейшем пути в ациклическом графе, которая является обобщением упомянутых задач целочисленного программирования в том случае, когда Q является множеством булевых векторов (или системой подмножеств конечного множества).

1. Можно считать, что усиление внимания к вопросу о разрешимости оптимизационных задач жадным алгоритмом было связано с появлением работы Дж. Краскала [22], в которой этот алгоритм применялся для решения задачи о минимальном (максимальном) остовном дереве графа. В связи с этим соответствующий алгоритм обычно приписывается Дж. Краскалу, хотя еще в 1926 г. подобный алгоритм решения упомянутой задачи (в несколько иных терминах) был предложен О. Борувкой [11]. Подтверждением такого внимания к жадному алгоритму может служить работа Р. Радо [24], в которой устанавливается разрешимость посредством жадного алгоритма задачи поиска базы матроида максимального веса.

Определение. Под *системой множеств* над конечным множеством E понимается пара $(E, \mathscr{F})$, где $\mathscr{F} \subseteq 2^E$. Система множеств есть *матроид,* если выполняются следующие аксиомы:

$(M1)$ $\varnothing \in \mathscr{F}$;

$(M2)$ если $X \subset Y \in \mathscr{F}$, то $X \in \mathscr{F}$;

$(M3)$ если $X, Y \in \mathscr{F}$ и $|X| > |Y|$, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $Y \cup \{x\} \in \mathscr{F}$.

Система множеств называется *системой независимости,* если выполняются аксиомы $(M1)$ и $(M2)$. Максимальное по включению множество системы называется *базой.*

Дж. Эдмондс [13] получил результат, в определенном смысле обратный результату Радо: если жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи 1 для системы независимости $(E, \mathscr{F})$ при любой линейной целевой функции, то $(E, \mathscr{F})$ является матроидом.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Система независимости есть матроид в том и только в том случае, если жадный алгоритм получает оптимальное решение задачи 1 при любой линейной целевой функции.*

2. Более общий результат, касающийся разрешимости задачи 1, получен для существенно более широкого класса систем множеств, а именно для так называемых *доступных* систем множеств (или систем *достижимых* множеств).

Доступной называется система множеств, удовлетворяющая аксиоме $(M1)$ и ослабленной аксиоме $(M2)$: если $X \in \mathscr{F}$ и $X \neq \varnothing$, то существует $x \in X$ такой, что $X \setminus \{x\} \in \mathscr{F}$.

Справедлива следующая

Теорема [16]. *Если $(E, \mathscr{F})$ — доступная система множеств, то жадный алгоритм находит оптимальное решение задачи 1 при любой линейной целевой функции тогда и только тогда, когда имеет место усиленное обменное свойство:*

$$(P)\begin{cases} \text{если } X \in \mathscr{F}, Y \supseteq X, Y - \text{ база } \mathscr{F} \text{ и если } X \cup \{x\} \in \mathscr{F} \\ \text{для некоторого } x \in E \setminus Y, \text{ то существует } y \in Y \setminus X \text{ такой, что} \\ X \cup \{y\} \in \mathscr{F} \text{ и } Y \cup \{x\} \setminus \{y\} \in \mathscr{F}. \end{cases}$$

3. Задача 1 для систем множеств в случае линейной целевой функции (как и некоторые другие задачи, о которых речь пойдет ниже) может рассматриваться как частный случай задачи о длиннейшем пути в графе в некоторой специфической постановке.

Под *индексированным* графом $< G, \nu, v_0 >$ будем понимать ориентированный бесконтурный граф $G = (V, \mathscr{A})$ с заданной индексацией дуг $\nu : \mathscr{A} \to \{1, \ldots, n\}$ и выделенной вершиной $v_0 \in V$.

Обозначим через $\widehat{W}$ множество всех непродолжаемых путей графа G, начинающихся в v_0. Предполагается, что все вершины графа достижимы из v_0, все пути из множества $\widehat{W}$ имеют одинаковое количество дуг и в каждом пути индексы дуг не повторяются.

Весовой функцией графа назовем любое отображение вида $w : \{1, \ldots, n\} \to R$. Длина дуги e считается равной величине $w(\nu(e))$,

а под длиной пути μ понимается, как обычно, сумма длин его дуг: $f(\mu) = \sum\limits_{s=1}^{l(\mu)} w(i_s(\mu))$, где $l(\mu)$ — число дуг в пути μ, $i_s(\mu)$ — индекс его s-й по счету дуги.

Задача, являющаяся обобщением задачи из предыдущего пункта, состоит в отыскании $\max\{f(\mu) \mid \mu \in \widehat{W}\}$. Жадный алгоритм для рассматриваемой задачи характеризуется правилом: «иди по длиннейшей дуге, выходящей из достигнутой вершины» (при условии, что движение начинается из вершины v_0). Таким образом, множество Q состоит из всех путей графа G, исходящих из вершины v_0, $\widehat{Q} = \widehat{W}$.

Обозначим через $\mathscr{G}$ класс всех индексированных графов, для каждого из которых жадный алгоритм дает точное решение рассматриваемой задачи при любой весовой функции w.

Для каждого пути $\mu \in \widehat{W}$ определим бинарное отношение $\succ_\mu$ на индексном множестве $I = \{1, \dots, n\}$: $i \succ_\mu j$ если (и только если) существует такая последовательность номеров $s(1), \dots, s(p)$, что $i = i_{s(1)}(\mu)$, $j = i_{s(p)}(\mu)$, и при $q = 1, \dots, p-1$ среди дуг, начинающихся в $s(q)$-й по счету вершине пути μ, есть дуга с индексом $i_{s(q+1)}(\mu)$.

Справедлив следующий критерий [5].

Утверждение 2. *Индексированный граф* $< G, \nu, v_0 >$ *принадлежит классу* $\mathscr{G}$ *тогда и только тогда, когда для любых путей* $\mu, \eta \in \widehat{W}$ *существует такая биекция* $\pi : \{1, \dots, l(\mu)\} \to \{1, \dots, l(\eta)\}$, *что*

$$i_s(\mu) \succ_\mu i_{\pi(s)}(\eta), \quad s = 1, \dots, l(\mu).$$

Замечание. Здесь и далее $I(\mu)$ — множество всех индексов, приписанных дугам пути μ, и $t(\mu)$ — концевая вершина пути μ.

Задача о длиннейшем пути в индексированном графе совпадает с задачей 1 предыдущего пункта для доступных систем множеств, если выполняются условия:

$$(G1)\begin{cases} \text{для любых путей } \mu \text{ и } \eta, \text{ исходящих из вершины } v_0, \\ \text{имеет место } \ I(\mu) = I(\eta) \Longleftrightarrow t(\mu) = t(\eta), \end{cases}$$

$$(G2)\begin{cases} \text{если пути } \mu \text{ и } \eta, \text{ исходящие из вершины } v_0, \text{ таковы, что} \\ I(\mu) \subset I(\eta) \text{ и } I(\eta) \setminus I(\mu) = \{i\}, \text{ то в графе } G \text{ имеется дуга} \\ (t(\mu), t(\eta)), \text{ индекс которой равен } i. \end{cases}$$

4. Пусть индексированный граф $< G, \nu, v_0 >$ удовлетворяет условию $(G1)$ и множество $\mathscr{M}$ есть система всех множеств вида $I(\mu)$, где μ — путь в графе G, начинающийся в вершине v_0.

В рассматриваемом случае предполагается, что система множеств $\{I(\mu)\}$ является матроидом. Обозначим через $J(v)$ множество всех индексов, приписанных дугам графа G, исходящим из вершины $v \in V$.

Из результата работы [6] следует

Утверждение 3. *Задача о длиннейшем пути в описанном случае разрешима жадным алгоритмом при любой весовой функции w тогда и только тогда, когда для каждой вершины v множество $J(v)$ является объединением некоторых коциклов матроида $\mathscr{M} = \{I(\mu)\}$.*

(Напомним, что *коциклом* матроида $\mathscr{M}$ называется цикл двойственного матроида или любое минимальное по включению подмножество множества I, имеющее непустое пересечение с каждой базой матроида $\mathscr{M}$.)

5. Наряду с задачей о длиннейшем пути в случае индексированных графов могут быть рассмотрены и другие задачи, в частности задача о пути максимальной пропускной способности. Для этого достаточно соответствующим образом определить класс целевых функций, например, для пути $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ положить значение $f(\mu)$ равным

$$\min(w(i_1, 1), \dots, w(i_p, p)), \tag{1}$$

где $i_s = \nu(e_s)$, $s = 1, \dots, p$, функция $w : I \times Z_+ \to R$ удовлетворяет условию $w(i, q) \leqslant w(i, q + 1)$ для любых $i \in I$ и $q \in Z_+$. При этом следует очевидным образом уточнить правила жадного алгоритма: «иди по выходящей из достигнутой вершины дуге, доставляющей максимальное приращение целевой функции» (при условии, что движение начинается из вершины v_0).

В работе [19] рассматривалась задача 1 для целевых функций вида (1) в случае, когда элементами множества Q являются упорядоченные подмножества некоторого конечного множества (в нашем случае — множества I).

Множество Q такой задачи может быть получено исходя из индексированного графа $< G, \nu, v_0 >$, удовлетворяющего условиям $(G1)$ и $(G2)$. Для этого каждому пути $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ в графе G, начинающемуся в вершине v_0, следует поставить в соответствие упорядоченное множество индексов дуг пути μ: $(\nu(e_1), \dots, \nu(e_p))$. Так полученные множества и только они являются элементами множества Q. При этом $\widehat{Q}$ будет состоять из множеств, соответствующих непродолжаемым путям.

Из результатов работы [19] следует

Утверждение 4. *Задача о пути максимальной пропускной способности для индексированного графа $< G, \nu, v_0 >$, удовлетворяющего условиям $(G1)$ и $(G2)$, разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции f вида (1) тогда и только тогда, когда система упорядоченных множеств Q, соответствующая индексированному графу $< G, \nu, v_0 >$, является гридоидом.*

(Конечная система конечных упорядоченных множеств $\mathscr{L}$ называется *гридоидом*, если: (a) любой начальный отрезок множества $(i_1, \dots, i_p) \in \mathscr{L}$ принадлежит $\mathscr{L}$ (наследственность); (b) для любых множеств $(i_1, \dots, i_p)$, $(j_1, \dots, j_q) \in \mathscr{L}$, $p < q$, существует элемент j_s, $1 \leqslant s \leqslant q$, такой, что $(i_1, \dots, i_p, j_s) \in \mathscr{L}$.)

Более широкий, чем в [19], класс целевых функций для задачи 1 в случае систем упорядоченных множеств был рассмотрен в [14].

Применительно к задаче о пути максимальной пропускной способности в индексированном графе это соответствует тому, что класс Φ целевых функций состоит из функций $f(\mu)$ вида

$$f(\mu) = \min(w(i_1, \tau(i_1)), \dots, w(i_p, \tau(i_1) + \dots + \tau(i_p))), \tag{2}$$

где $\mu = (e_1, \dots, e_p)$ — путь в графе G; $i_s = \nu(e_s)$, $s = 1, \dots, p$; функция $w : I \times R \to R$ удовлетворяет условию $w(i, q) \leqslant w(i, r)$ для любых $i \in I$ и $q < r$; и $\tau(i) \geqslant 0$ при любом $i \in I$.

Определим множество Q аналогично предыдущему случаю. Тогда из результатов работы [14] следует

Утверждение 5. *Задача о пути максимальной пропускной способности для индексированного графа* $< G, \nu, v_0 >$, *удовлетворяющего условиям* $(G1)$ *и* $(G2)$, *разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции* f *вида* (2) *тогда и только тогда, когда система упорядоченных множеств* Q, *соответствующая индексированному графу* $< G, \nu, v_0 >$, *есть гридоид, обладающий свойством: если* $(i_1, \dots, i_k)$, $(j_1, \dots, j_l) \in Q$, $\{j_1, \dots, j_{l-1}\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ *и* $j_l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, *то* $(i_1, \dots, i_k, j_l) \in Q$.

(Системы упорядоченных множеств, отвечающие условиям последнего утверждения, получили название *антиматроиды.*)

Далее будут рассмотрены ситуации, когда элементами множества Q являются неотрицательные целочисленные n-векторы, т. е. элементы множества Z^n_+.

6. В работе [5] рассматривалась задача 1 в случае, когда $Q \subset Z^n_+$, а множество Φ целевых функций задачи состоит из всех вогнутых сепарабельных функций, т. е. функций f вида

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{3}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in Z^n_+$, $f_j(\cdot)$ — вогнутые функции.

Далее посредством $J(x)$ обозначается множество $\{j \mid x + \delta_j \in Q\}$, где δ_j есть j-й орт пространства R^n. Предполагается, что $0 \in Q$, $J(x) \neq \varnothing$ в случае $x \in Q \setminus \widehat{Q}$ и все точки множества Q достижимы из начала

координат. (Последнее эквивалентно условию: для любой точки $x \in Q \setminus \{0\}$ существует точка $y \in Q$ такая, что $x - y$ есть орт пространства.)

Одним из результатов упомянутой работы является

Утверждение 6. *Задача* 1 *в рассматриваемом случае разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции вида* (3) *тогда и только тогда, когда* Q *обладает свойством*:

$$(PP)\begin{cases} \text{для любых точек } x \in Q,\ y \in \widehat{Q} \text{ таких, что } x \leqslant y \text{ и } x_i = y_i \\ \text{при некотором } i \in J(x), \text{ найдется номер } j \in J(x) \text{ такой, что} \\ y_j > x_j \text{ и } y + \delta_i - \delta_j \in Q. \end{cases}$$

Далее будут рассмотрены результаты, относящиеся к разрешимости жадным алгоритмом задачи 2.

7. В работе [1] разрешимость жадным алгоритмом задачи 2 исследовалась для множеств $Q \subset Z_+^n$, а класс Φ целевых функций состоял из всех вогнутых сепарабельных функций f вида (3). По этому поводу доказан критерий разрешимости.

Утверждение 7. *Задача* 2 *разрешима жадным алгоритмом при любой целевой функции вида* (3) *тогда и только тогда, когда* Q *обладает свойствами*:

(a) *если* $x \in Q$, $y \in Z_+^n$ *и* $y \leqslant x$, *то* $y \in Q$;

(b) *при любом* $z \in Z_+^n$ *все максимальные относительно частичного порядка* $\leqslant$ *векторы множества* $\{x \in Q \mid x \leqslant z\}$ *имеют одинаковую сумму компонент.*

Множества Q, обладающие свойствами (a) и (b), получили название *целочисленные полиматроиды* [12].

8. Задача 2 в случае целевых функций, представляющих собой суперпозицию вогнутых и линейных функций, рассматривалась в работе [2]. Более точно целевые функции задачи имеют вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(a_i x), \tag{4}$$

где $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in Z_+^n$, $f_i(\cdot)$ — вогнутые функции, $i = 1, \dots, m$.

Относительно множества Q, $Q \subset Z_+^n$, предполагается, что его размерность равна n и оно удовлетворяет условию (a) из предыдущего пункта. Обозначим через A матрицу размера $m \times n$, строками которой являются векторы a_i, $i = 1, \dots, m$.

Основным результатом работы [2] является достаточное условие разрешимости.

Утверждение 8. *Задача 2 с целевыми функциями вида (4) разрешима жадным алгоритмом при любых вогнутых функциях $f_i(\cdot)$, если матрица A и множество Q обладают свойствами:*

(b′) *для любого вектора $z \in Z_+^n$ все максимальные относительно частичного порядка $\leqslant$ векторы множества $\{x \in Q \mid Ax \leqslant z\}$ имеют одинаковую сумму компонент;*

(c) *n-вектор $(1, \dots, 1)$ является относительно внутренним вектором конуса, порожденного векторами a_i, $i = 1, \dots, m$.*

Выделяемый этим утверждением класс разрешимых задач содержит ранее выделенный в п. 7 класс задач, поскольку для единичной матрицы A условие (c) очевидным образом выполняется, а условие (b′) в этом случае совпадает с условием (b).

В случае задания множества $\widehat{Q}$ допустимых решений задачи системами линейных неравенств с целочисленными неотрицательными коэффициентами эти условия выражаются в терминах свойств некоторых семейств множеств, теснейшим образом связанных со структурой системы линейных ограничений и целевой функцией задачи. В работе [3] дано более полное описание (характеризация) указанных семейств множеств, основанное на специального вида представимости этих семейств параллельно-последовательными сетями.

9. В заключение отметим критерий разрешимости [15, 16] задачи 2 посредством *модифицированного* жадного алгоритма в случае булевых систем векторов (или систем подмножеств конечного множества).

Подходящей версией жадного алгоритма для задачи 2 в случае систем достижимых множеств является следующий модифицированный жадный алгоритм.

Шаг 1. Положить $F^* = \varnothing$ и $F = \varnothing$.

Шаг 2. Выбрать $x \in E \setminus F$ такой, что $F \cup x \in \mathscr{F}$ и $f(F \cup x) \geqslant f(F \cup y)$ для всех $y \in E \setminus F$ при условии $F \cup y \in \mathscr{F}$; если такого x не существует — STOP (F^* есть решение, полученное жадным алгоритмом).

Шаг 3. Если $f(F \cup x) > f(F^*)$, то заменить F^* на $F \cup x$.

Шаг 4. Заменить F на $F \cup x$ и перейти на шаг 2.

В случае неупорядоченных подмножеств *гридоидом* называется такая система $(E, \mathscr{F})$ достижимых множеств, что если $X, Y \in \mathscr{F}$ и $|X| > |Y|$, то существует $x \in X \setminus Y$ такой, что $Y \cup \{x\} \in \mathscr{F}$. Справедливо

Утверждение 9. *Пусть $(E, \mathscr{F})$ — система достижимых множеств; тогда для каждой линейной целевой функции $f : \mathscr{F} \to R$ модифицированный жадный алгоритм получает оптимальное решение задачи 2, если и только если $(E, \mathscr{F})$ есть такой гридоид, что если $B, (B \setminus e) \cup \{x, y\} \in \mathscr{F}$, где $e \in B$, $\{x, y\} \cap B = \varnothing$, то либо $B \cup \{y\} \in \mathscr{F}$, либо $(B \setminus e) \cup \{y\} \in \mathscr{F}$.*

Используемое в приведенной формулировке понятие гридоида в случае систем неупорядоченных множеств естественным образом связано с аналогичным понятием в случае упорядоченных множеств. Достаточно заметить, что любой гридоид в неупорядоченном случае получается из некоторого гридоида в упорядоченном случае путем простого превращения упорядоченных множеств в неупорядоченные.

Некоторые дополнительные сведения по рассматриваемому в данной статье вопросу можно найти также в работах [7–10, 17, 18, 20, 21, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Глебов Н. И.** Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 11. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. С. 38–42.
2. **Глебов Н. И.** О применимости метода покоординатного спуска к некоторым задачам выпуклого целочисленного программирования // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 17. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 52–59.
3. **Глебов Н. И.** К описанию одного класса задач, разрешимых алгоритмом покоординатного подъема // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 15–25.
4. **Глебов Н. И., Шенмайер В. В.** Жадный алгоритм в задаче о длиннейшем пути // Материалы Междунар. конф. «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 1997. С. 48.
5. **Глебов Н. И., Шенмайер В. В.** О применимости алгоритма покоординатного подъема к задачам целочисленного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 38–47.
6. **Колмычевская Н.** Некоторые обобщения алгоритма покоординатного спуска для матроида // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 21. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 13–17.
7. **Овчинников В. Г.** Об одной задаче целочисленного программирования // Кибернетика. 1976. № 1. С. 131–135.
8. **Шенмайер В. В.** Максимизация линейной целевой функции с помощью жадного алгоритма // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 104–120.
9. **Bixby R. E., Cunningham W. H.** Matroid optimization and algorithms // Handbook of combinatorics. V. 1. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 551–609.
10. **Bjorner A.** On matroids, groups, and exchange languages // Matroid Theory. Amsterdam–New York: North Holland, 1985. P. 25–60. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; V. 40).
11. **Boruvka O.** On a minimal problem // Práce Moravské Přidovědecké Společnosti (Acta Societatis Scientiarium Moravicae). 1926. V. 3. P. 37–58.

12. **Edmonds J.** Submodular functions, matroids, and certain polyhedra // Combinatorial Structures and their Applications. New York: Gordon and Breach, 1970. P. 69–87.

13. **Edmonds J.** Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971. V. 1, N 2. P. 127–136.

14. **Faigle U.** Submodular combinatorial structures // Habilitationsschrift Universität Bonn, 1985.

15. **Goecke O.** A greedy algorithm for hereditary set systems and a generalization of the Rado-Edmonds characterization of matroids // Discrete Appl. Math. 1988. V. 20, N 1. P. 39–49.

16. **Goecke O., Korte B., Lovász L.** Examples and algorithmic properties of greedoids // Combinatorial optimization. Berlin: Springer, 1989. P. 113–161. (Lecture Notes in Math.; V. 1403).

17. **Goetchel R.** Linear objective functions on certain classes of greedoids // Discrete Appl. Math. 1986. V. 14, N 1. P. 11–16.

18. **Korte B., Lovász L.** Mathematical structures underlying greedy algorithm // Fundamentals of computation theory. Berlin: Springer, 1981. P. 205–209. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 117).

19. **Korte B., Lovász L.** Greedoids — a structural framework for the greedy algorithm // Progress in combinatorial optimization (Waterloo, 1982). Toronto, Ont.: Acad. Press, 1984. P. 221–243.

20. **Korte B., Lovász L.** Greedoids and linear objective functions // SIAM J. Algebraic and Discrete Math. 1984. V. 5, N 2. P. 229–238.

21. **Korte B., Lovász L., Schrader R.** Greedoids. Algorithms and Combinatorics // Berlin: Springer-Verl., 1991.

22. **Kruskal J. B.** On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. V. 7, N 1. P. 48–50.

23. **Prim R. C.** Shortest connection networks and some generalizations // Bell System Techn. J. 1957. V. 36, N 6. P. 1389–1401. (Рус. пер.: Прим Р. К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения // Кибернетический сборник. Вып. 2. М.: Мир, 1961. С. 95–107.)

24. **Rado R.** Note on independence functions // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300–320.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
20 июня 2001 г.