ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2002. Серия 2. Том 9, № 2, 41–77

УДК 519.852

ОПТИМАЛЬНАЯ МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕСОВМЕСТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

В. И. Ерохин

Для несовместных систем линейных алгебраических уравнений и аналогичных систем с дополнительным условием неотрицательности переменных рассматриваются задачи коррекции всех коэффициентов их матриц и расширенных матриц, а также задачи регуляризации решений скорректированных систем. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости данных задач и достаточные условия единственности решения скорректированных систем, а сами задачи коррекции сведены к задачам n-мерной безусловной или условной минимизации. Для случая, когда несовместная линейная система задает пустую допустимую область некоторой задачи линейного программирования, получены достаточные условия существования одноранговых матриц коррекции, гарантирующих непустоту и ограниченность скорректированной допустимой области, и, как следствие, существование решения соответствующей задачи линейного программирования.

Введение

Пусть

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

— несовместная система линейных алгебраических уравнений,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \tag{2}$$

— несовместная система линейных алгебраических уравнений и неравенств, формально задающая, например, допустимую область некоторой несобственной задачи линейного программирования, система ограничений которой противоречива, где $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Подобные несовместные линейные системы, которые мы будем называть также несовместными линейными моделями, могут возникать во многих прикладных задачах, например при обработке «зашумленных» экспериментальных данных, при построении физической или экономической модели

в условиях неполной и противоречивой информации, при экономическом планировании в условиях дефицита ресурсов и т. д.

Как правило, в исследовании несовместных моделей используются два подхода: коррекция, при которой исходной модели ставится в соответствие некоторая новая модель, близкая в каком-либо смысле по своим параметрам к исходной, но совместная, и регуляризация, при которой несовместность исходной модели считается следствием неточности задания ее параметров, а «решение» соответствующей системы отбирается по определенным правилам из решений совместных систем, сопоставимых по точности задания параметров с исходной системой. Следует, правда, указать построение комитетных решений [8, 11] в качестве еще одного достаточно распространенного метода исследования несовместных линейных моделей.

В настоящей статье метод комитетов не рассматривается. Мы предпримем попытку объединить первые два подхода. При этом в качестве основной будем рассматривать проблему оптимальной матричной (многопараметрической) коррекции несовместных линейных моделей (1), (2) в постановке из [4, 8]. К задачам же регуляризации решений скорректированных систем, постановки которых близки к постановкам проблем, рассмотренным в монографии [13] (в том смысле, что с некоторыми допущениями их можно рассматривать как задачи на нахождение нормальных решений скорректированных систем), будем обращаться при неразрешимости соответствующих задач оптимальной матричной коррекции, при неединственности решения соответствующих скорректированных систем или тогда, когда нас не удовлетворяют свойства решений скорректированных систем.

Обобщая подходы из [4–6, 8, 9] для коррекции систем (1), (2), а также результаты работ [1–3], относящиеся к задачам коррекции близких к (1), (2) несовместных линейных моделей вида

$$\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \in X, \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_1, \ \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ \mathbf{x} \in X, \tag{4}$$

где $X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_0\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_0\} \neq \varnothing$ или $X = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \mid \mathbf{A}_0\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_0\} \neq \varnothing$, $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{m_0\times n}$, $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{m_1\times n}$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m_2\times n}$, $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^{m_0}$, $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, мы будем рассматривать совокупность задач:

$$\Psi(\mathbf{H}) \to \inf_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \Psi(\mathbf{H}) \tag{5}$$

$$\Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]) \to \inf_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]), \tag{6}$$

$$\Psi(\mathbf{H}) \to \inf_{\mathscr{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \Psi(\mathbf{H}), \tag{7}$$

$$\Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]) \to \inf_{\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]), \tag{8}$$

где $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{A}+\mathbf{H})\mathbf{x} \equiv \mathbf{b}\}$, $\mathscr{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}) = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \mid (\mathbf{A}+\mathbf{H})\mathbf{x} \equiv \mathbf{b}\}$, $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h}) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{A}+\mathbf{H})\mathbf{x} \equiv \mathbf{b}+\mathbf{h}\}$, $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h}) = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \mid (\mathbf{A}+\mathbf{H})\mathbf{x} \equiv \mathbf{b}+\mathbf{h}\}$, $\Psi(\cdot) = \|\cdot\|$ — некоторая в общем случае не мультипликативная (а аддитивная или обобщенная) матричная норма, т. е. функция, определенная для произвольной вещественной матрицы размера $m \times n$, но удовлетворяющая основным аксиомам векторных норм.

Замечание. При анализе задач (5)–(8) соответствующие множества решений скорректированных систем считаются непустыми тогда и только тогда, когда они содержат хотя бы один вектор, в котором абсолютные значения компонент конечны.

Аксиомы векторных и матричных норм хорошо известны (см., например, [14]). Однако мы приведем их в качестве фундаментальных соотношений, на которых будут основаны многие выкладки настоящей статьи.

Итак, функция $\varphi(\mathbf{x})$ является векторной нормой, а функция $\Psi(\mathbf{x})$ — аддитивной (обобщенной) матричной нормой, если для любых $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ выполняются следующие условия:

$$\varphi(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ \Psi(\mathbf{A}) \geqslant 0, \tag{9a}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0},\ \Psi(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{9b}$$

$$\varphi(c\cdot\mathbf{x}) = |c|\cdot\varphi(\mathbf{x}),\ \Psi(c\cdot\mathbf{A}) = |c|\cdot\Psi(\mathbf{A}) \text{ при любом } c \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}),\ \Psi(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant \Psi(\mathbf{A}) + \Psi(\mathbf{B}). \tag{11}$$

Заметим, что выполнение четвертой аксиомы для функции $\Psi(\mathbf{A})$, превращающей ее в классическую (мультипликативную) матричную норму, также возможно, но для последующих рассуждений не обязательно.

Следующее полезное для дальнейших выкладок свойство функции $\varphi(\mathbf{x})$ вытекает из аксиом (10) и (11) [14]:

$$|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leqslant \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \text{ при любых } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{12}$$

Выбор функций $\Psi(\mathbf{H})$ и $\Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}])$ (т. е. некоторых аддитивных матричных норм) в качестве показателей качества коррекции несовместных линейных моделей вида (1), (2) (а также (3), (4)) позволяет сделать измеримым (вычислимым) интуитивное представление о «малости» изменения исходных данных, делающего соответствующие модели совместными.

При этом конкретный вид функций $\Psi(\cdot)$ может быть весьма разнообразным, что демонстрируют, в частности, работы [1–6, 8, 9], в которых в роли показателей качества коррекции были использованы функции

$\sum\limits_{i,j} |h_{i,j}|$, $\Big(\sum\limits_{i,j} |h_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $\max\limits_{i,j} |h_{i,j}|$, $\sum\limits_{i,j} \alpha_i\beta_j\,|h_{i,j}|$ и $\max\limits_{i,j} \alpha_i\beta_j\,|h_{i,j}|$ (где $h_{i,j}$ — элемент матрицы $\mathbf{H}$ или соответственно $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$, $\alpha_i, \beta_j > 0$ при любых i, j).

Теперь обсудим специфическую трудность задач матричной (многопараметрической) коррекции несовместных линейных систем, замеченную еще в работах [2, 3]. Дело в том, что условная минимизация функций $\Psi(\mathbf{H})$ и $\Psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}])$ при коррекции моделей (3), (4) является задачей, билинейной относительно переменных $h_{i,j}$ и x_j, где $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ или $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Аналогичная ситуация возникает при коррекции моделей (1), (2) в задачах (5–8), что делает указанные выше задачи в их исходной постановке сложными для анализа и построения соответствующих вычислительных алгоритмов.

В ранних работах, например [1, 2], для преодоления указанной трудности постановки задач коррекции систем (3), (4) огрублялись наложением дополнительных ограничений на матрицы $\mathbf{H}$, $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$ либо использованием матриц $\mathbf{H}$ и $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$ специального вида. После этого билинейность задачи коррекции снималась, а использование полиэдральных норм, в частности таких, как $\sum\limits_{i,j} |h_{i,j}|$ или $\max\limits_{i,j} |h_{i,j}|$, позволяло исходную задачу свести к задаче (конечной совокупности задач) линейного программирования.

Позже в работе [3], в которой исследовались задачи матричной коррекции систем вида (4) и теоретически рассматривался класс показателей качества коррекции даже более широкий, чем аддитивные матричные нормы, для систем вида (4) с условием неотрицательности переменных было, в частности, показано, что использование чебышевской и октаэдрической матричных норм и одноранговых матриц коррекции позволяет избавиться от билинейности и свести проблему одновременной коррекции коэффициентов матриц $\mathbf{A}_1$,$\mathbf{A}_2$ и векторов $\mathbf{b}_1$,$\mathbf{b}_2$ к конечной совокупности задач линейного программирования.

Аналогичными оказались и полученные в работе [6] результаты решения задач (5), (7), (8) с показателем качества коррекции в виде чебышевской матричной нормы. В качестве примера приведем наиболее детально обоснованные в [6] свойства решения задачи (7):

• использование чебышевской матричной нормы позволяет снять билинейность и свести исходную задачу к задаче минимизации функционала вида $\Upsilon(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{b}-\mathbf{Ax}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_1}$, где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ — векторные нормы Гёльдера с показателями 1 и ∞;

• при разрешимости задачи (7) существует одноранговая матрица $\mathbf{H}^*$, принадлежащая множеству решений задачи.

Исследование задач (5)–(8) с другим показателем качества коррекции — евклидовой матричной нормой [4, 5, 8, 9] — показало, что особые свойства евклидовой матричной нормы, такие как дифференцируемость, согласованность с евклидовой векторной нормой, а также совпадение евклидовой и спектральной норм в классе одноранговых матриц, позволяют решить задачи (5)–(8) аналитически, т. е. удается «аналитически» указать необходимые и достаточные условия разрешимости данных задач, а также вид матриц коррекции и вид решений соответствующих скорректированных систем. При этом выяснилось, что

- использование евклидовой матричной нормы позволяет снять билинейность и свести задачи (5)–(8) к задачам минимизации функционала вида $\Omega(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{z}}{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}$, где в зависимости от задачи вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ или $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{(n+1)}$ и $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $\mathbf{D}$ — симметричная матрица;
- матрицы $\mathbf{H}^*$ и $[\mathbf{H}^* \mid -\mathbf{h}^*]$, являющиеся решениями задач (5)–(8), одноранговые;
- множества решений соответствующих скорректированных систем $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}^*)$, $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}^*)$, $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}^*, \mathbf{h}^*)$ и $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}^*, \mathbf{h}^*)$ содержат единственный элемент.

Учитывая все изложенное выше, зададимся вопросом: можно ли так обобщить имеющиеся результаты, чтобы многие из использовавшихся показателей качества матричной коррекции объединились в некоторый общий класс, для которого, в свою очередь, можно было бы доказать возможность снятия билинейности задач (5)–(8) и существование одноранговых матриц оптимальной коррекции, а также сформулировать достаточные условия единственности решения соответствующих скорректированных систем?

Ниже мы покажем, что положительный ответ на поставленный вопрос имеется и заключается в том, что в качестве искомого критерия можно использовать нормы из класса аддитивных (обобщенных) матричных норм — так называемые нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ [14], определяемые для произвольной вещественной матрицы $\mathbf{A}$ размера $m \times n$ как

$$\|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\psi(\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}, \tag{13}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ — произвольные векторные нормы [1)], т. е. произвольные функции, удовлетворяющие условиям (9а)–(11).

Отметим, что функцию $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ можно рассматривать как определенное расширение понятия подчиненной (индуцированной) матричной

[1)] В дальнейшем без специальных оговорок обозначения $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ и им подобные будем использовать для произвольных векторных норм, а для норм Гёльдера с показателем p используем обозначение $\|\cdot\|_p$.

нормы [14], которая задается некоторой векторной нормой $\varphi(\mathbf{x})$ и определяется для вещественной квадратной матрицы $\mathbf{A}$ как

$$\|\mathbf{A}\|_{\varphi,\varphi} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\varphi(\mathbf{Ax})}{\varphi(\mathbf{x})}.$$

При этом в силу (13) выполняется весьма полезное соотношение, аналогичное свойству согласованности матричной и векторной норм:

$$\psi(\mathbf{Ax}) \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} \cdot \varphi(\mathbf{x}) \text{ при любых } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ и } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что норма $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ может быть также мультипликативной, но это не является ее общим свойством и в настоящей статье не используется.

Имея только определение (13), уже можно привести некоторые примеры конструирования возможных показателей качества матричной коррекции.

Пример 1. Пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_2$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_2$. Тогда $\|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} = \|\mathbf{A}\|_{2,2} = \max\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}$ — спектральная норма матрицы $\mathbf{A}$ [14]. Заметим, что если матрица $\mathbf{A}$ — одноранговая, то (см., например, [10]) $\|\mathbf{A}\|_{2,2}$ — ее спектральная и одновременно евклидова норма.

Пример 2. Пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$. Тогда (см., например, [10]) $\|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} = \|\mathbf{A}\|_{1,\infty} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Пример 3. Пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$, $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_1$ и $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 1$. Тогда (как будет показано в следующем разделе) $\|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} = \|\mathbf{A}\|_{\infty,1} = \sum\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Обратим также внимание на определенную аналогию между соотношением (13) и формулой

$$\psi^*(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}|}{\psi(\mathbf{x})} \tag{14}$$

(где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы, $\psi(\cdot)$ — векторная норма), являющейся (см., например, [14]) определением векторной нормы, двойственной норме $\psi(\cdot)$ относительно скалярного произведения.

Гибкость выбора векторных норм $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, которые не обязательно должны быть нормами Гёльдера, обеспечивает богатые возможности критерия (13) для конструирования возможных частных показателей качества матричной коррекции задач (5)–(8). При этом уместно вспомнить следующие три основополагающие теоремы [14], позволяющие конструировать новые векторные нормы из уже известных.

Теорема I. *Если $f(\cdot)$ — квазинорма на пространстве $\mathbb{R}^n$ (т. е. непрерывная функция, удовлетворяющая аксиомам (9а)–(10)), то функция $f^*(\cdot)$, построенная как двойственная функции $f(\cdot)$ с использованием определения (14), является векторной нормой.*

Теорема II. *Если* $\eta_1(\mathbf{x}), \ldots, \eta_n(\mathbf{x})$ *и* $\zeta(\mathbf{x})$ *— векторные нормы на* $\mathbb{R}^n$, *то* $\theta(\mathbf{x}) = \zeta([\eta_1(\mathbf{x}), \ldots, \eta_n(\mathbf{x})]^{\mathbf{T}})$ *также векторная норма на* $\mathbb{R}^n$.

Теорема III. *Если* $\zeta(\mathbf{x})$ *— векторная норма на* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— невырожденная матрица, то* $\theta(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{T}\cdot\mathbf{x})$ *также векторная норма на* $\mathbb{R}^n$.

В качестве примера использования указанных теорем приведем следствие, получаемое из теоремы III и определения (13), которое показывает, как можно свести «взвешенную» норму $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ к некоторой другой, «не взвешенной» норме $\|\cdot\|_{\varphi',\psi'}$.

Следствие. *Пусть* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *— некоторая матрица,*

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

такие векторы, что $\alpha_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\beta_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $f(\mathbf{A}) = \|\mathrm{diag}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathrm{diag}(\mathbf{b})\|_{\varphi,\psi}$. *Тогда* $f(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_{\eta,\theta}$, *где* η *— векторная норма на* $\mathbb{R}^n$, θ *— векторная норма на* $\mathbb{R}^m$ *такие, что* $\eta(\mathbf{x}) = \varphi(\mathrm{diag}^{-1}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{x})$ *при любом* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *и* $\theta(\mathbf{y}) = \psi(\mathrm{diag}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{y})$ *при любом* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

Несложно заметить, что с помощью данного следствия можно получить «взвешенные» варианты приведенных выше примеров 1–3, иллюстрирующие возможность представления показателей качества коррекции вида $\left(\sum\limits_{i,j} \alpha_i^2\beta_j^2 h_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\max\limits_{i,j} \alpha_i\beta_j\,|h_{i,j}|$ и $\sum\limits_{i,j} \alpha_i\beta_j\,|h_{i,j}|$ в виде некоторых норм $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$.

1. Оптимальная матричная коррекция несовместной системы линейных алгебраических уравнений

1.1. Коррекция матрицы коэффициентов несовместной системы линейных алгебраических уравнений вида (1) по критерию минимума нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$

Главная тема настоящего раздела — исследование задачи (5). Тем не менее сначала необходимо рассмотреть несколько вспомогательных результатов.

Пусть $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. Покажем, что условие $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ является достаточным для того, чтобы уравнение $(\mathbf{A} + \mathbf{H})\mathbf{z} = \mathbf{b}$, в котором неизвестным является матрица $\mathbf{H}$, имело решение в классе одноранговых матриц. Другими словами, покажем, что справедлива

Лемма 1.1.1. *Для любого* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, *существует матрица*

$$\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z})\mathbf{y}^{\mathbf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}} \text{ такая, что } \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})) \neq \varnothing, \tag{15}$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *такой вектор, что* $\mathbf{z}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. *При этом* $\operatorname{rank} \mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = 1$, $\mathbf{z} \in \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}))$.

Доказательство. Заметим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, существует вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, существует $\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{z})\mathbf{y}^{\mathbf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}}$. Несложно убедиться, что $(\mathbf{A} + \mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}))\mathbf{z} \equiv \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}))$. Истинность утверждения $\operatorname{rank} \mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = 1$ очевидна. Таким образом, лемма 1.1.1 доказана.

Замечание. Из приведенных выкладок следует, что при фиксированном векторе $\mathbf{z}$ матрица $\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})$ определяется с точностью до некоторого вектора $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. При этом из (15) следует, что при любом $\alpha \neq 0$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \mathbf{H}(\mathbf{z},\alpha \cdot \mathbf{y}). \tag{16}$$

Лемма 1.1.2. *Пусть* $\mathbf{H}$ *— произвольная матрица, корректирующая несовместную систему* (1). *Тогда нулевой вектор не принадлежит соответствующему множеству решений скорректированной системы.*

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть существует такая матрица $\mathbf{H}$, что $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}) \neq \varnothing$ и $\mathbf{0} \in \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})$. Тогда $(\mathbf{A} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{0} \equiv \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Следовательно, система (1) совместна, так как имеет тривиальное решение (противоречие). Таким образом, лемма 1.1.2 доказана.

Продолжим исследование одноранговых матриц коррекции и получим полезную для последующих выкладок формулу для вычисления нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ такой матрицы.

Лемма 1.1.3. *Пусть* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *и* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *— некоторые векторы. Тогда* $\|\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\|_{\varphi,\psi} = \psi(\mathbf{a}) \cdot \varphi^*(\mathbf{b})$, *где в соответствии с* (14) $\varphi^*(\mathbf{b}) = \max\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}|}{\varphi(\mathbf{x})}$ *— векторная норма, двойственная норме* $\varphi(\cdot)$ *относительно скалярного произведения.*

Доказательство. Из (10), (13) и (14) следует, что $\|\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\|_{\varphi,\psi} = \max\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \psi(\mathbf{a}) \cdot \max\limits_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}|}{\varphi(\mathbf{x})} = \psi(\mathbf{a}) \cdot \varphi^*(\mathbf{b})$.

Лемма 1.1.3 позволяет, в частности, подвести обоснование под приведенный во введении пример 3. Действительно, пусть $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_\infty$. Заметим (см., например, [10]), что в этом случае $\varphi^*(\cdot) = \|\cdot\|_1$. Пусть $\psi(\cdot) = \|\cdot\|_1$. Тогда в силу леммы 1.1.3

$$\|\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\|_{\varphi,\psi} = \|\mathbf{a}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\|_{\infty,1} = \|\mathbf{a}\|_1 \cdot \|\mathbf{b}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_i b_j|$$

при любых $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

С учетом леммы 1.1.3 можно обратиться к исследованию задачи $\|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} \to \inf\limits_{\mathbf{y}} \|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi}$.

Лемма 1.1.4. $\inf\limits_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{z})}{\varphi(\mathbf{z})}$ *и достигается при любом* $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. *При этом существует матрица* $\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}}) = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z})\widehat{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}$ *такая, что* $\|\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{z})}{\varphi(\mathbf{z})}$, $\operatorname{rank} \mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}}) = 1$ *и* $\mathscr{X}\left(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})\right) \neq \varnothing$, *где* $\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *— вектор, двойственный вектору* $\mathbf{z}$ *по отношению к норме* $\varphi(\cdot)$ [14], *т. е. вектор, удовлетворяющий условию*

$$\varphi^*(\widehat{\mathbf{y}}) \cdot \varphi(\mathbf{z}) = \widehat{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}\mathbf{z} = 1. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ — некоторый вектор. В силу леммы 1.1.1 существует матрица $\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})$ такая, что $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})) \neq \varnothing$ и $\operatorname{rank} \mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y}) = 1$. В силу леммы 1.1.3 имеем

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}) \cdot \varphi^*(\mathbf{y})}{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}. \tag{18}$$

Но тогда

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} \to \inf_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}{\varphi^*(\mathbf{y})} \to \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}{\varphi^*(\mathbf{y})}. \tag{19}$$

Сопоставляя правую часть отношения (19) с формулой (14), несложно убедиться, что верхняя грань в правой части отношения (19) достигается, поскольку

$$\sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}{\varphi^*(\mathbf{y})} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}{\varphi^*(\mathbf{y})} = \varphi^{**}(\mathbf{z}),$$

где $\varphi^{**}(\mathbf{z})$ — норма вектора $\mathbf{z}$, двойственная норме $\varphi^*(\mathbf{z})$ относительно скалярного произведения. Но, как известно (см., например, [10]), $\varphi^{**}(\mathbf{z}) \equiv \varphi(\mathbf{z})$, откуда

$$\inf_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} = \min_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \|\mathbf{H}(\mathbf{z},\mathbf{y})\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z})}{\varphi(\mathbf{z})}. \tag{20}$$

Но что это за вектор $\mathbf{y}$, на котором достигается $\sup\limits_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{|\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{z}|}{\varphi^*(\mathbf{y})}$? Сопоставляя формулы (17), (18) и (20), получаем, что им является $\widehat{\mathbf{y}}$, т. е. вектор, двойственный вектору $\mathbf{z}$ по отношению к норме $\varphi(\cdot)$. Заметим (см., например, [14]), что для произвольного ненулевого вектора $\mathbf{z}$ и произвольной нормы $\varphi(\cdot)$ вектор $\widehat{\mathbf{y}}$ всегда существует, хотя может быть не единственным. Кроме того, в силу (17) имеем $\widehat{\mathbf{y}} \equiv (\widehat{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}\mathbf{z})^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{y}}$. Поэтому искомая матрица $\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})$ действительно может быть представлена в виде $(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z})\widehat{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}$.

Замечание. Леммы 1.1.1 и 1.1.4 могут представлять интерес не только в контексте исследования задачи (5). Они (или техника их доказательств) могут быть использованы для обобщения рассмотренной А. Н. Тихоновым [12] задачи нахождения решения с минимальной евклидовой нормой системы уравнений $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$ (где $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$) относительно неизвестной матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на случай использования нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$, порождаемой произвольными векторными нормами $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$. Соответствующее утверждение можно сформулировать в следующем виде.

Лемма 1.1.5. *Пусть $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ — произвольные векторы, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Тогда система уравнений $\mathbf{Az} = \mathbf{u}$ относительно $\mathbf{A}$ разрешима [12]; при этом существует решение $\widehat{\mathbf{A}}$ из класса одноранговых матриц размера $m \times n$, минимальное по норме $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ (где $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ — произвольные векторные нормы), которое дается формулой*

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{u}\mathbf{y}^{\mathbf{T}},$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, двойственный вектору $\mathbf{z}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом

$$\left\|\widehat{\mathbf{A}}\right\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{u})}{\varphi(\mathbf{z})}.$$

Обратимся теперь к обоснованию основных результатов данного раздела, которыми являются необходимые и достаточные условия достижимости $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ и достаточные условия единственности решения линейной системы с оптимально скорректированной (в смысле минимума нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$) матрицей коэффициентов.

Теорема 1.1.1. $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$, *где* $\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{Ax})}{\varphi(\mathbf{x})}$, *причем достижимость $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$ является необходимым и достаточным условием достижимости* $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$.

Доказательство. 1. Достаточность (доказательство проведем «от противного»). Пусть $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$ достигается, т. е. существует такой вектор $\mathbf{z}$, что $\varphi(\mathbf{z}) < +\infty$ и при любом $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ справедливо неравенство $\Phi(\mathbf{x}) \geqslant \Phi(\mathbf{z})$. Заметим, что свойство несовместности системы (1) и аксиома (9b) в сочетании со сделанным предположением позволяют заключить, что $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Тогда в силу леммы 1.1.4 существует одноранговая матрица $\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})$ такая, что $\|\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})\|_{\varphi,\psi} = \Phi(\mathbf{z})$, $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{z},\widehat{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$. Предположим, что существует такая матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$, что $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}}) \neq \varnothing$ и $\|\widetilde{\mathbf{H}}\|_{\varphi,\psi} < \Phi(\mathbf{z})$. Заметим, что если $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})$, то $\widetilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$. Кроме того, поскольку $\mathbf{0} \notin \mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})$, в силу леммы 1.1.2 функция

$\frac{\psi(\widetilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi(\mathbf{x})}$ определена для любого $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$, причем $\frac{\psi(\widetilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi(\mathbf{x})} \equiv \Phi(\tilde{\mathbf{x}})$. Но по определению нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ для любого $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ имеем $\frac{\psi(\widetilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi(\mathbf{x})} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{H}}\|_{\varphi,\psi}$. Поэтому существует вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$ такой, что $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) \leqslant \|\widetilde{\mathbf{H}}\|_{\varphi,\psi} < \Phi(\mathbf{z})$ (противоречие).

2. Необходимость (доказательство проведем «от противного»). Пусть $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ достигается, причем $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma$. Заметим, что в силу несовместности системы (1), аксиомы (9b) и определения (13) следует, что $\gamma > 0$. Кроме того, в силу постановки задачи (5), а также леммы 1.1.2 существуют матрица $\widetilde{\mathbf{H}}$ и вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ такие, что $(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{H}})\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b}$, $\|\widetilde{\mathbf{H}}\|_{\varphi,\psi} = \gamma$, $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) < +\infty$. Сначала покажем, что $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \gamma$. Действительно, как уже было показано выше, $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) \leqslant \|\widetilde{\mathbf{H}}\|_{\varphi,\psi}$. Поэтому $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) \leqslant \gamma$. Теперь предположим, что $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) < \gamma$. В этом случае в силу леммы 1.1.4 существует такая одноранговая матрица $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, что $\|\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})\|_{\varphi,\psi} = \Phi(\tilde{\mathbf{x}})$ и $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$. Это противоречит предположению о том, что $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma$. Таким образом, $\Phi(\tilde{\mathbf{x}}) = \gamma$.

Пусть $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \delta$. В силу приведенных выше рассуждений должно выполняться условие $\delta \leqslant \gamma$. Кроме того, в силу определения функции $\Phi(\mathbf{x})$ имеем $\delta \geqslant 0$. Предположим, что $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$ не достигается, т. е. не существует вектор $\mathbf{z}$ такой, что $\varphi(\mathbf{z}) < +\infty$, $\Phi(\mathbf{z}) = \delta$ и $\Phi(\mathbf{z}) \leqslant \Phi(\mathbf{x})$ для каждого $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$. Очевидно, что в этом случае $0 \leqslant \delta < \gamma$. Кроме того, должен существовать такой вектор $\mathbf{x}_\infty$ с бесконечной нормой, что $\Phi(\mathbf{x}_\infty) = \delta$. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — единичный (в норме $\varphi(\cdot)$) вектор, совпадающий по направлению с вектором $\mathbf{x}_\infty$. Тогда $\mathbf{x}_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot \bar{\mathbf{x}}$ и $\Phi(\mathbf{x}_\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(t \cdot \bar{\mathbf{x}}) = \delta$. Введем в рассмотрение некоторые вспомогательные величины. Пусть $\tau \geqslant 0$, $\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) = \frac{1}{\tau} \cdot \bar{\mathbf{x}}$, $\gamma - \delta = \varepsilon > 0$. Пусть функция $f(\tau)$ определена следующим образом:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to 0} \Phi\left(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \lambda)\right) - \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \equiv -\frac{\varepsilon}{2} \text{ при } \tau = 0, \\ \Phi\left(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \tau)\right) - \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \equiv \psi(\tau \cdot \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) - \gamma + \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } \tau > 0. \end{cases}$$

Заметим, что в силу определения и свойства непрерывности векторной нормы функция $f(\tau)$ непрерывна при $\tau \geqslant 0$. Кроме того, в силу свойства (12) имеем $f(\tau) \geqslant \tau \cdot \psi(\mathbf{b}) - \psi(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) - \gamma + \frac{\varepsilon}{2}$ при $\tau > 0$. Из последнего соотношения и условия $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (вытекающего из несовместности системы (1)) следует, что $f(\tilde{\tau}) > 0$ при любом $\tilde{\tau}$ таком, что $\frac{\psi(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})+\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}{\psi(\mathbf{b})} < \tilde{\tau} < +\infty$. Пусть $\tilde{\tau} > \max\{0, \frac{\psi(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})+\gamma-\frac{\varepsilon}{2}}{\psi(\mathbf{b})}\}$. Тогда получаем, что на концах отрезка $[0, \tilde{\tau}]$ непрерывная функция $f(\tau)$ принимает значения разных

знаков. Следовательно, в силу классической теоремы о достаточных условиях существования корня непрерывной функции имеются такие τ^* и $\mathbf{x}^*$, что $\tau^* \in [0, \tilde{\tau}]$, $f(\tau^*) = 0$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \tau^*)$, $0 < \varphi(\mathbf{x}^*) < +\infty$ и $\Phi(\mathbf{x}^*) = \gamma - \frac{\varepsilon}{2} < \gamma$. Поэтому в силу леммы 1.1.4 существует одноранговая матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \widehat{\mathbf{y}})$ такая, что $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \widehat{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$ и $\|\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \widehat{\mathbf{y}})\|_{\varphi,\psi} = \Phi(\mathbf{x}^*) < \gamma$, что противоречит предположению $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma$. Таким образом, показано, что $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ и этот инфинум достигается.

Замечание. Отметим, что в ходе доказательства теоремы показано, что если $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ достигается, то существует одноранговая матрица $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ такая, что $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} \in \operatorname*{Arginf}\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$, где $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname*{Arginf}\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ — вектор, двойственный вектору $\tilde{\mathbf{x}}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}))$.

Следствие 1.1.1. *Если несовместная система вида* (1) *такова, что* $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$, *то* $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = 0$ *и не достигается.*

Доказательство. Сначала покажем, что из условия $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$ не может следовать неравенство $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} > 0$. Предположим противное, а именно пусть $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$, но $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma > 0$. Тогда в силу теоремы 1.1.1 $\inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \gamma > 0$. Пусть $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname*{Arginf}\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$. Заметим, что в этом случае $0 < \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) < +\infty$. В то же время из условия $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$ следует, что система $\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальные решения. Пусть $\Delta\mathbf{x}$ — такое решение, а именно пусть $\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $0 < \varphi(\Delta\mathbf{x}) < +\infty$. Теперь заметим, что при любом $t > 0$ справедливо неравенство $\Phi(\tilde{\mathbf{x}} - t \cdot \Delta\mathbf{x}) \leqslant \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{|t \cdot \varphi(\Delta\mathbf{x}) - \varphi(\tilde{\mathbf{x}})|}$. Но тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} \Phi(\tilde{\mathbf{x}} - t \cdot \Delta\mathbf{x}) = 0 = \inf\limits_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} < \gamma$ (противоречие). Таким образом, если $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$, то $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = 0$. Но, как было показано при доказательстве теоремы 1.1.1, условие $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = 0$ несовместно с утверждением, что $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ достигается. Это и завершает доказательство.

Теорема 1.1.2. *Если* $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} > 0$ *и матрица* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *такова, что* $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}) \neq \varnothing$ *и* $\operatorname{rank} \widetilde{\mathbf{H}} = 1$, *то множество* $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$ *состоит только из одного элемента.*

Доказательство. Пусть $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma > 0$. Пусть $\widetilde{\mathbf{H}}$

и $\tilde{\mathbf{x}}$ такие матрица и вектор, что $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}) \neq \varnothing$, $\operatorname{rank} \widetilde{\mathbf{H}} = 1$ и $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$. В силу сделанных предположений имеем

$$\widetilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}. \tag{21}$$

Кроме того, в силу принятого в настоящей работе соглашения о пустоте (непустоте) множеств $\mathscr{X}$, $\mathfrak{X}$, $\mathscr{X}_+$, $\mathfrak{X}_+$ можно допустить, что $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) < +\infty$. Предположим, что вектор $\tilde{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}$, где $\Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $\varphi(\Delta\mathbf{x}) < +\infty$, также принадлежит $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$. Из этого предположения и условия (21) вытекает, что

$$(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{H}})\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{22}$$

Но из условия (21) с учетом условия $\operatorname{rank} \widetilde{\mathbf{H}} = 1$ следует, что

$$\widetilde{\mathbf{H}}\Delta\mathbf{x} = \lambda \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}), \tag{23}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторое число. С учетом (23) соотношение (22) может быть переписано в виде

$$\mathbf{A} \cdot (\Delta\mathbf{x} - \lambda \cdot \tilde{\mathbf{x}}) = -\lambda \cdot \mathbf{b}. \tag{24}$$

Предположим, что $\lambda \neq 0$. Тогда из системы (23) получаем, что вектор $\tilde{\mathbf{x}} - \lambda^{-1} \cdot \Delta\mathbf{x}$ является решением системы (1), что невозможно в силу ее несовместности. Таким образом, $\lambda = 0$, в силу чего система (23) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{H}} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{25}$$

а система (24) принимает вид

$$\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

Но из соотношений (25), (26) следует, что вектор $\tilde{\mathbf{x}} \pm \mu \cdot \Delta\mathbf{x}$ принадлежит множеству $\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}})$ при произвольном $\mu \geqslant 0$. Для дальнейших выкладок удобно рассматривать вектор $\tilde{\mathbf{x}} - \mu \cdot \Delta\mathbf{x}$ и функционал $\Phi(\tilde{\mathbf{x}} - \mu \cdot \Delta\mathbf{x})$, определенный в теореме 1.1.1. В силу условий (25), (26) и свойств (10), (12) имеем

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}} - \mu \cdot \Delta\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi(\tilde{\mathbf{x}} - \mu \cdot \Delta\mathbf{x})} \leqslant \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{|\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) - \varphi(\mu \cdot \Delta\mathbf{x})|} \leqslant \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{||\mu| \cdot \varphi(\Delta\mathbf{x}) - \varphi(\tilde{\mathbf{x}})|}.$$

Отсюда с использованием теоремы 1.1.1 получаем

$$\lim_{\mu \to +\infty} \Phi(\tilde{\mathbf{x}} - \mu \cdot \Delta\mathbf{x}) = 0 = \inf_{\mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}) \neq \varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi, \psi}$$

(противоречие).

Следствие 1.1.2. *Если* $\inf\limits_{\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})\neq\varnothing} \|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi}$ *достигается и матрица* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *такова, что* $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}}) \neq \varnothing$ *и* $\operatorname{rank} \widetilde{\mathbf{H}} = 1$, *то множество* $\mathscr{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}})$ *состоит только из одного элемента.*

1.2. Коррекция расширенной матрицы коэффициентов несовместной системы линейных алгебраических уравнений вида (1) по критерию минимума нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$

По аналогии с предыдущим разделом сначала рассмотрим следующую задачу. Найти $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ такие, что

$$(\mathbf{A}+\mathbf{H})\mathbf{z} \equiv \mathbf{b}+\mathbf{h}. \tag{27}$$

Тождество (27) можно переписать в виде

$$([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}] + [\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}$$

или

$$([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}] + [\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]) \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{0},$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x_{n+1} \neq 0$.

Введем новые обозначения. Пусть $\mathbf{V} = [\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]$ и $\mathbf{W} = [\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$, что позволяет перейти к рассмотрению системы

$$\mathbf{W}\mathbf{x} = -\mathbf{V}\mathbf{x},\ x_{n+1} \neq 0. \tag{28}$$

Допустим, что матрица $\mathbf{V}$ и вектор $\mathbf{x}$ фиксированы, а систему (28) необходимо разрешить относительно матрицы $\mathbf{W}$. В этом случае справедливо следующее утверждение, аналогичное лемме 1.1.1.

Лемма 1.2.1. *Для любых* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ *и* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *существует матрица*

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{-\mathbf{V}\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathbf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}} \text{ такая, что } \mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{V}\mathbf{x}, \tag{29}$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и* $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. *При этом* $\operatorname{rank} \mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы 1.1.1.

Замечание. Нетрудно заметить, что формула (29) аналогична формуле (15). При этом матрица $\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определяется с точностью до некоторого вектора $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, а из (29) следует, что

$$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{W}(\mathbf{x},\alpha\cdot\mathbf{y}) \text{ при любом } \alpha \neq 0. \tag{30}$$

Поскольку условие $x_{n+1} \neq 0$ является частным случаем условия $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, лемма 1.2.1 полезна для анализа задачи (6).

Следствие 1.2.1. *Если вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *таков, что* $x_{n+1} \neq 0$, *то существует матрица*

$[\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = \dfrac{[-\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]\mathbf{x}\mathbf{y}^{\mathbf{T}}}{\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}}$ *такая, что* $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \neq \varnothing$,

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и* $\mathbf{y}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. *При этом* $\mathrm{rank}\ [\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = 1$, $\mathbf{z} = \left[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right] \in \mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *и* $[\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid \mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})] = [\mathbf{H}(\mathbf{x},\alpha\cdot\mathbf{y}) \mid \mathbf{h}(\mathbf{x},\alpha\cdot\mathbf{y})]$ *при любом* $\alpha \neq 0$.

Теперь, повторяя схему исследования задачи (5), обратимся к проблеме

$$\|[\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})]\|_{\varphi,\psi} \to \inf_{\mathbf{y}} \|[\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})]\|_{\varphi,\psi}.$$

Лемма 1.2.2. $\inf\limits_{\mathbf{y}} \|[\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})]\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}$ *и достигается при любом* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$. *При этом существует матрица* $[\mathbf{H}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})] = [-\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]\mathbf{x}\widehat{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}}$ *такая, что* $\|[\mathbf{H}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})]\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}$, $\mathrm{rank}\ [\mathbf{H}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})] = 1$ *и* $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}}),\mathbf{h}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$, *где* $\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ — *вектор, двойственный вектору* $\mathbf{x}$ *относительно нормы* $\varphi(\cdot)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.1.4.

Следствие 1.2.2. *Все утверждения леммы* 1.2.2 *справедливы для любого вектора* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *такого, что* $x_{n+1} \neq \mathbf{0}$.

Перейдем к обоснованию основных утверждений данного раздела, которыми по аналогии с предыдущим разделом являются необходимые и достаточные условия достижимости $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{Hh})\neq\varnothing} \|\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}\|_{\varphi,\psi}$ и достаточные условия единственности решения линейной системы с оптимально скорректированной (в смысле минимума нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$) расширенной матрицей коэффициентов.

Теорема 1.2.1. $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \min\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x})$, *причем* $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$ *достигается тогда и только тогда, когда существует вектор* $\mathbf{x} \in \operatorname*{Argmin}\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x})$ *такой, что* $x_{n+1} \neq 0$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу теоремы Вейерштрасса нижняя грань в задаче $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) \to \inf\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1}$ всегда достигается, так как $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x})$ — непрерывная действительная функция, а множество $\{\mathbf{x} \mid \varphi(\mathbf{x}) = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактно.

Еще один результат используется как при доказательстве достаточности, так и при доказательстве необходимости, поэтому выносим его

обсуждение в начало. Пусть $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ — некоторая матрица такая, что $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h}) \neq \varnothing$. Пусть

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}, t) = \begin{bmatrix} t \cdot \mathbf{z} \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{31}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ — такой вектор, что $\mathbf{z} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h})$, $t \in \mathbb{R}$ — некоторый параметр. Тогда при любом $t \neq 0$ имеем

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}, t) \neq \mathbf{0},$$
$$[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t) \equiv [-\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)$$

и, как следствие,

$$\frac{\psi([\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))} = \frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))} \quad \text{при любых } \mathbf{z} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h}) \text{ и } t \neq 0. \tag{32}$$

1. Достаточность (доказательство проведем «от противного»). Пусть $\min\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) = \gamma$, причем существует вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{Argmin}\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) \mid \tilde{x}_{n+1} \neq 0$. Заметим, что $\gamma > 0$ в силу несовместности системы (1), определения (13) и аксиомы (9b). Тогда в силу следствия 1.2.2 существует одноранговая матрица $[\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \mid -\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})]$ такая, что $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}), \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})) \neq \varnothing$ и $\|[\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \mid -\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y})]\|_{\varphi,\psi} = \gamma$. Теперь предположим, что существует некоторая матрица $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ такая, что $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h}) \neq \varnothing$, $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \delta < \gamma$. Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)$ — вектор, определяемый соотношением (31) при условии $t \neq 0$. Тогда, с одной стороны, справедливо условие (32), а с другой — по определению нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ при любом $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ имеем $\frac{\psi([\mathbf{H}|-\mathbf{h}]\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \leqslant \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$. Поэтому существует вектор $\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)$, $x_{n+1} = t \neq 0$, такой, что

$$\frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))} = \psi\Big([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\frac{\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))}\Big) \leqslant \delta < \gamma = \min_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x})$$

(противоречие).

2. Необходимость (доказательство проведем «от противного»). Пусть $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|$ достигается, $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\| = \lambda$ ($\lambda > 0$ в силу несовместности системы (1), определения (13) и аксиомы (9b)). В силу указанных предположений существуют вектор $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и одноранговая матрица $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ такие, что $\mathbf{z} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h})$ и $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \lambda$. Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{z}, t)$ — вектор, определенный с помощью соотношения (31) при условии $t \neq 0$. Тогда можно показать, что

$$\frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z}, t))} = \lambda. \tag{33}$$

Действительно, в силу соотношения (32) и определения (13) имеем $\frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z},t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z},t))} = \frac{\psi([\mathbf{H}|-\mathbf{h}]\mathbf{x}(\mathbf{z},t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z},t))} \leqslant \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \lambda$. Предположим, что $\frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z},t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z},t))} < \lambda$. Но тогда в силу леммы 1.2.2 существует матрица $[\mathbf{H}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}})]$ такая, что $\|[\mathbf{H}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}})]\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x}(\mathbf{z},t))}{\varphi(\mathbf{x}(\mathbf{z},t))} < \lambda$, $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}}),\mathbf{h}(\mathbf{x}(\mathbf{z},t),\widehat{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$, что противоречит предположению $\inf\limits_{(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \lambda$.

Предположим, что $\min\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) = \delta \leqslant \lambda$, и при этом для любого $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname*{Argmin}\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x})$ следует, что $\tilde{x}_{n+1} = 0$ (т. е. $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{bmatrix}$, где $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор). Заметим, что в силу последнего предположения и условия (33) $\delta < \lambda \Leftrightarrow \lambda - \delta = \varepsilon > 0$. Кроме того, $\delta > 0$ (и, следовательно, $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}$) в силу невырожденности нормы $\psi(\cdot)$ и несовместности системы (1).

Пусть

$$\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{z}},\tau) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tau \end{bmatrix},$$

где $\tau \geqslant 0$ — некоторый параметр,

$$f(\tau) = \frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{z}},\tau))}{\varphi(\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{z}},\tau))} - \lambda + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\psi(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} - \tau\cdot\mathbf{b})}{\varphi\Big(\Big[\begin{smallmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{smallmatrix}\Big] + \Big[\begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ \tau \end{smallmatrix}\Big]\Big)} - \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из определения следует, что $f(0) = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$. Кроме того, в силу свойств (10)–(12)

$$\psi(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}} - \tau\cdot\mathbf{b}) \geqslant |\psi(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}) - \tau\cdot\psi(\mathbf{b})|,$$
$$\varphi\Big(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tau \end{bmatrix}\Big) \leqslant \varphi\Big(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{bmatrix}\Big) + \tau\cdot\varphi\Big(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}\Big),$$

откуда следует неравенство

$$f(\tau) \geqslant \frac{|\psi(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}) - \tau\cdot\psi(\mathbf{b})|}{\varphi\Big(\Big[\begin{smallmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 0 \end{smallmatrix}\Big]\Big) + \tau\cdot\varphi\Big(\Big[\begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{smallmatrix}\Big]\Big)} - \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя это неравенство, можно показать, что существует число $\tilde{\tau} > 0$ такое, что $f(\tilde{\tau}) > 0$. В силу определения и непрерывности норм $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ функция $f(\tau)$ непрерывна на отрезке $[0,\tilde{\tau}]$. Таким образом, непрерывная на отрезке $[0,\tilde{\tau}]$ функция $f(\tau)$ принимает на его концах значения разных знаков. Следовательно, существует корень указанной функции число τ^* такое, что $0 < \tau^* < \tilde{\tau}$. В свою очередь, существует вектор $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{z}},\tau^*)$ такой, что $x^*_{n+1} = \tau^* \neq 0$, $\frac{\psi([\mathbf{A}|-\mathbf{b}]\mathbf{x}^*)}{\varphi(\mathbf{x}^*)} = \lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \lambda$. Следовательно, в силу следствия 1.2.2 существует одноранговая

матрица $[\mathbf{H}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}})]$ такая, что $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}}),\mathbf{h}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}})) \neq \varnothing$, $\|[\mathbf{H}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}(\mathbf{x}^*,\widehat{\mathbf{y}})]\|_{\varphi,\psi} = \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$, что противоречит предположению $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \lambda$.

Замечание. Отметим, что в ходе доказательства теоремы удалось получить результат, аналогичный соответствующему вспомогательному результату теоремы 1.1.1. С привлечением следствия 1.2.2 его можно сформулировать так: если $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$ достигается, то существуют одноранговая матрица $[\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})]$ такая, что $[\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) \mid -\mathbf{h}\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}})] = [-\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}^{\mathbf{T}} \in \operatorname*{Arginf}\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$, где $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname*{Argmin}\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) \mid \tilde{\mathbf{x}}_{n+1} \neq 0$, $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор, двойственный вектору $\tilde{\mathbf{x}}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом $\tilde{\mathbf{z}} = \left[\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_{n+1}},\cdots,\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_{n+1}}\right] \in \mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}),\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}))$.

Следствие 1.2.3. *Если несовместная система вида* (1) *такова, что* $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$, *то* $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = 0$ *и не достигается.*

Доказательство. Сначала покажем, что из условия $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$ не может следовать неравенство $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} > 0$. Предположим противное, а именно пусть $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} > 0$, но $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$. Из последнего условия следует, что система $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ имеет нетривиальные решения. Пусть $\mathbf{z}$ — такое решение, а именно пусть $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, $0 < \varphi(\mathbf{z}) < +\infty$. Положим $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\0\end{bmatrix}$ и $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\varphi(\mathbf{x})}$. Тогда в силу теоремы 1.2.1 имеем $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\bar{\mathbf{x}}) = 0 = \min\limits_{\varphi(\mathbf{x})=1} \psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} > 0$ (противоречие). Таким образом, если $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$, то $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = 0$. Но, как было показано при доказательстве теоремы 1.2.1, условие $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = 0$ несовместно с утверждением о том, что $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$ достигается.

Теорема 1.2.2. *Если* $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} > 0$ *и матрица* $[\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}]$ *такова, что* $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{h}}) \neq \varnothing$ *и* $\operatorname{rank} [\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}] = 1$, *то множество* $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{h}})$ *состоит только из одного элемента.*

Доказательство. Пусть $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})\neq\varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} > 0$, матрица $[\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}]$ и вектор $\tilde{\mathbf{z}}$ таковы, что $\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\widetilde{\mathbf{H}},\tilde{\mathbf{h}}) \neq \varnothing$, $\operatorname{rank} [\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}] = 1$,

$\tilde{\mathbf{z}} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{h}})$. В силу последнего предположения

$$(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{H}})\tilde{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{b} + \tilde{\mathbf{h}}. \tag{34}$$

Кроме того, в силу постановки задачи (6) и теоремы 1.2.1 можно предположить, что $\varphi(\mathbf{z}^*) < +\infty$. Допустим, что $(\mathbf{z}^* + \Delta\mathbf{z}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{h}})$, где $\Delta\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ — некоторый вектор такой, что $\varphi(\Delta\mathbf{z}) < +\infty$. Из этого предположения и тождества (34) вытекает, что

$$(\mathbf{A} + \widetilde{\mathbf{H}})\Delta\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{35}$$

В то же время из условия $\operatorname{rank}\,[\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}] = 1$ и тождества (34) следует, что

$$\widetilde{\mathbf{H}}\Delta\mathbf{z} = \lambda \cdot (\mathbf{b} + \tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{A}\mathbf{z}^*), \tag{36}$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \tau \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{z}^*), \tag{37}$$

где $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ — некоторые числа. С учетом (36) и (37) соотношение (35) может быть переписано в виде

$$\mathbf{A} \cdot (\Delta\mathbf{z} - (\lambda + \tau) \cdot \mathbf{z}^*) = -(\lambda + \tau) \cdot \mathbf{b}. \tag{38}$$

Предположим, что $\lambda + \tau \neq 0$. Тогда из соотношения (38) следует, что вектор $\mathbf{z}^* - (\lambda + \tau)^{-1} \cdot \Delta\mathbf{z}$ является решением системы (1), что невозможно в силу ее несовместности. Таким образом, $\lambda + \tau = 0$. Поэтому система (36), (37) принимает вид

$$\widetilde{\mathbf{H}} \cdot \Delta\mathbf{z} = \mathbf{0}, \tag{39}$$

а система (38) принимает вид

$$\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{40}$$

Но из условий (39), (40) следует, что $(\mathbf{z}^* - \mu \cdot \Delta\mathbf{z}) \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{h}})$ для произвольного числа $\mu \in \mathbb{R}$. Рассмотрим теперь вектор $\tilde{\mathbf{z}}(\mu) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 1 \end{bmatrix} - \mu \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z} \\ 0 \end{bmatrix}$, где $\mu \geqslant 0$, и отношение $\frac{\psi([\mathbf{A} \ -\mathbf{b}]\tilde{\mathbf{x}}(\mu))}{\varphi(\tilde{\mathbf{x}}(\mu))}$. В силу условия (40) и свойств (10), (12) имеем

$$\frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\tilde{\mathbf{x}}(\mu))}{\varphi(\tilde{\mathbf{x}}(\mu))} \leqslant \frac{\psi(\mathbf{A}\mathbf{z}^*) + \psi(\mathbf{b})}{\left|\mu \cdot \varphi\Big(\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{z} \\ 0 \end{bmatrix}\Big) - \varphi\Big(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ 1 \end{bmatrix}\Big)\right|}.$$

Из последнего соотношения с использованием теоремы 1.2.1 следует, что

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\tilde{\mathbf{x}}(\mu))}{\varphi(\tilde{\mathbf{x}}(\mu))} = 0 = \inf_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h}) \neq \varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$$

(противоречие).

Следствие 1.2.4. *Если* $\inf\limits_{\mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h}) \neq \varnothing} \|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi}$ *достигается и матрица* $[\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}]$ *такова, что* $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{h}}) \neq \varnothing$ *и* $\operatorname{rank}\,[\widetilde{\mathbf{H}} \mid -\tilde{\mathbf{h}}] = 1$, *то множество* $\mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \widetilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{h}})$ *состоит только из одного элемента.*

2. Регуляризация решений изначально несовместных систем линейных алгебраических уравнений при матричной коррекции их коэффициентов

В этом разделе рассмотрим случаи, когда соответствующие нижние грани в задачах (5), (6) либо не достигаются, либо достигаются, но решение соответствующей скорректированной системы не единственно и (или) норма решения скорректированной системы превосходит некоторое граничное значение $M > 0$.

2.1. Регуляризация решения изначально несовместной системы линейных алгебраических уравнений вида (1) при коррекции матрицы ее коэффициентов

Рассмотрим сначала три вспомогательные задачи.

Задача *A*. $\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \to \inf\limits_{\mathbf{x}}$.

Эта задача разрешима в силу известного следствия теоремы Вейерштрасса, так как $\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\varphi(\mathbf{x}) \to +\infty$. Таким образом, $\operatorname{Argmin}\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \neq \varnothing$ и в силу несовместности системы (1) и свойств (9a), (9b) имеем

$$\min_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \theta > 0. \tag{41}$$

Это обосновывает корректность постановки другой задачи.

Задача *B*. $\varphi(\mathbf{x}) \to \min\limits_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x} \in \operatorname{Argmin}\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$.

Минимальное значение целевой функции в этой задаче (обозначим его символом η) достигается либо в силу теоремы Вейерштрасса (если $\operatorname{Argmin}\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ — замкнутое и ограниченное множество), либо в силу ее следствия (в противном случае).

Очевидно, что $\eta \geqslant 0$. Сделаем дополнительное предположение относительно параметра θ, которое позволит в последующих рассуждениях не рассматривать случай $\eta = 0$. Дополнительно предположим, что

$$\theta < \psi(\mathbf{b}). \tag{42}$$

Тогда $\eta > 0$, так как в противном случае можно показать, что $\theta = \psi(\mathbf{b})$. Заметим, что $\theta = \psi(\mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$, что в силу условий (9a), (9b) следует из соотношений $\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{b}) + \psi(\mathbf{A}\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{b}) + \|\mathbf{A}\|_{\varphi,\psi} \cdot \varphi(\mathbf{x})$, справедливых в силу соотношений (11) и (13). Данный случай является достаточно специальным и в настоящей статье рассматриваться не будет.

Итак, мы обосновали выполнение условий $\eta > 0$ и $\theta > 0$, что делает возможным ввести в рассмотрение величину

$$\kappa = \frac{\theta}{\eta} > 0. \qquad (43)$$

Последняя вспомогательная задача была подробно исследована при доказательстве теоремы 1.1.1.

Задача C.

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \to \inf_{\mathbf{x}}.$$

Пусть

$$\inf_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \gamma \geqslant 0, \qquad (44)$$

причем теперь мы не делаем никаких специальных предположений о достижимости $\inf\limits_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}$.

Задачи A, B и C полезны тем, что позволяют ввести в рассмотрение величины κ и γ, необходимые для последующих выкладок. Заметим, что $\gamma \leqslant \kappa$ в силу постановки задачи C.

Рассмотрим основные задачи данного раздела.

Задача N_0. $\varphi(\mathbf{x}) \to \min$ при условии

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} = \gamma + \delta, \qquad (45)$$

где $\delta > 0$.

Задача N_1. $\varphi(\mathbf{x}) \to \min$ при условии $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \leqslant \gamma + \delta$, где $\delta > 0$.

Задача N_2. $\max\{\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\kappa+\varepsilon}, \varphi(\mathbf{x})\} \to \min$.

Наконец, проблема регуляризации решения изначально несовместной системы вида (1) при коррекции матрицы ее коэффициентов будет рассматриваться как

Задача N_3. При некоторых заданных параметрах $M > 0$ и $\delta > 0$ найти вектор $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ и матрицу $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такие, что $\hat{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$, $\|\mathbf{H}\|_{\psi,\varphi} \leqslant \gamma + \delta$, $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \to \min$, $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$.

Пусть $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ — множества решений задач N_0, N_1, N_2, а ϕ_0, ϕ_1 и ϕ_2 — соответствующие оптимальные значения целевых функций.

Убедимся в справедливости следующих утверждений (теоремы 2.1.1, 2.1.2).

Теорема 2.1.1. *Пусть несовместной системе линейных уравнений вида* (1) *поставлены в соответствие задачи* A, B, C, N_0, N_1, *причем последние две задачи рассматриваются при произвольном значении параметра* $\delta > 0$. *Тогда задачи* N_0, N_1 *разрешимы,* $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1 \neq \varnothing$ *и* $\phi_0 = \phi_1 > 0$.

Доказательство. 1. Покажем, что ограничению (45) задачи N_0 удовлетворяет непустое множество точек при любом $\delta > 0$. Действительно, пусть $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ — такие вектор и число, что

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = 1,$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\psi(\mathbf{b}-\alpha^*\cdot\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})}{\varphi(\alpha^*\cdot\bar{\mathbf{x}})}, \text{ где } 0 < \alpha^* < +\infty, \text{ если } \inf\limits_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \\ \text{достигается на векторе } \alpha^*\cdot\bar{\mathbf{x}}, \\ \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{\psi(\mathbf{b}-\alpha\cdot\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})}{\varphi(\alpha\cdot\bar{\mathbf{x}})} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Положим

$$\tau^* = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^*}, \text{ если } \inf\limits_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \text{ достигается,} \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

и рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(\tau) = \begin{cases} -\delta, \text{ если } \tau = \tau^*, \\ \frac{\psi(\mathbf{b}-\tau^{-1}\cdot\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})}{\varphi(\tau^{-1}\cdot\bar{\mathbf{x}})} - \gamma - \delta, \text{ если } \tau > \tau^*. \end{cases}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве теоремы 1.1.1, несложно убедиться, что на луче $\tau \in [\tau^*, +\infty]$ функция $f(\tau)$ непрерывна и существует число $\tau^{**} > 0$ такое, что $f(\tau^{**}) > 0$. Этого достаточно, чтобы при некотором $\tilde{\tau}$, $\tau^* < \tilde{\tau} < \tau^{**}$, выполнялось условие $f(\tilde{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{\varphi(\tilde{\mathbf{x}})} = \gamma + \delta$, где $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\tau}^{-1}\cdot\bar{\mathbf{x}}$ есть искомое решение уравнения (45). Заметим, что $0 < \varphi(\tilde{\mathbf{x}}) < +\infty$.

2. Поскольку целевая функция задачи N_0, будучи векторной нормой, является непрерывной, причем на допустимой области, задаваемой ограничением (45), возможно ее неограниченное возрастание, ее минимум достигается в силу известного следствия из теоремы Вейерштрасса.

3. Покажем, что задача N_1 разрешима при любом $\delta > 0$ и любое ее решение $\mathbf{x}^{**}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^{**})}{\gamma+\delta} = \varphi(\mathbf{x}^{**}). \tag{46}$$

Для этого переформулируем задачу в виде $\varphi(\mathbf{x}) \to \min$ при условии $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\gamma+\delta} \leqslant \varphi(\mathbf{x})$ и заметим, что в силу соотношений (41) и (44) при выполнении условия $\delta > 0$ функция $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\gamma+\delta}$ ограничена снизу и достигает своей нижней грани: $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\gamma+\delta} = \frac{\theta}{\gamma+\delta}$, где θ — оптимальное значение целевой функции в задаче A.

4. Сопоставляя (45), (46) и учитывая условия разрешимости рассмотренных выше задач N_0 и N_1, убеждаемся, что $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_1$ при любом $\delta > 0$, т. е. множества решений задач N_0 и N_1 совпадают. В то же время в силу (45) и (46) выполняется условие $\phi_0 = \phi_1$.

Следствие 2.1.1. *Для любого решения* $\mathbf{x}^{**}$ *задачи* N_1 *с параметром* $\delta > 0$ *выполняется условие*

$$\varphi(\mathbf{x}^{**}) \geqslant R_\delta = \frac{\theta}{\gamma + \delta}, \tag{47}$$

где θ *— минимальное значение целевой функции в задаче* A *и* γ *— значение нижней грани целевой функции в задаче* C.

Теорема 2.1.2. *Пусть несовместной системе линейных уравнений вида* (1) *с ненулевой матрицей коэффициентов* $\mathbf{A}$ *поставлены в соответствие задачи* A, B, C, N_1, N_2, *причем в задаче* N_1 *величина* $\delta = \kappa - \gamma + \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ *— некоторая константа, а величины* κ *и* γ *порождаются задачами* A, B, C *и определяются из соотношений* (43) *и* (44). *Тогда задача* N_2 *разрешима,* $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ *и* $\phi_1 = \phi_2$.

Доказательство. 1. Покажем, что задача N_2 разрешима при любых значениях параметров κ и ε таких, что $\kappa + \varepsilon > 0$, а тогда, когда κ определяется формулой (43), для любого решения $\mathbf{x}^*$ задачи N_2 справедливо равенство

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa + \varepsilon} = \varphi(\mathbf{x}^*). \tag{48}$$

Действительно, функция $\max\{\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\kappa+\varepsilon}, \varphi(\mathbf{x})\}$ принимает минимальное значение при любом положительном значении суммы $\kappa + \varepsilon$ в силу следствия из теоремы Вейерштрасса, поскольку данная функция непрерывна, а ее значение бесконечно возрастает при возрастании нормы аргумента — вектора $\mathbf{x}$.

Предположим, что κ определена по формуле (43), $\varepsilon > 0$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи N_2, но условие (48) не выполняется. Тогда возможны следующие случаи: 1) $(\kappa+\varepsilon)^{-1} \cdot \min\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = (\kappa+\varepsilon)^{-1} \cdot \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) > \varphi(\mathbf{x}^*)$; 2) $(\kappa + \varepsilon)^{-1} \cdot \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) < \varphi(\mathbf{x}^*)$.

Случай 1. Пусть $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи B. Тогда в силу (43) имеем $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{\kappa} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa}$. Отсюда в силу условия $\varepsilon > 0$ получаем $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) > \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{\kappa+\varepsilon} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa\varepsilon}$. С другой стороны, поскольку $\tilde{\mathbf{x}}$ — решение задачи B, справедливо равенство $\varphi(\mathbf{x}^*) \geqslant \varphi(\tilde{\mathbf{x}})$, следовательно, $\varphi(\mathbf{x}^*) > \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa+\varepsilon}$ (противоречие).

Случай 2. Пусть $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa+\varepsilon} < \varphi(\mathbf{x}^*)$. Так как система (1) несовместна, то $0 < \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa+\varepsilon} < \varphi(\mathbf{x}^*)$. Поскольку $0 < \varphi(\mathbf{x}^*)$, существует вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(\tilde{\mathbf{x}}) < \varphi(\mathbf{x}^*)$ и $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})}{\kappa+\varepsilon} > \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa+\varepsilon}$, т. е. значение функции $\varphi(\mathbf{x})$ всегда можно уменьшить за счет увеличения значения функции $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\kappa+\varepsilon}$.

2. Покажем, что для оптимальных значений ϕ_1, ϕ_2 целевой функции в задачах N_1, N_2 имеет место равенство $\phi_1 = \phi_2$. Предположим, что $\phi_1 < \phi_2$. Пусть $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ — некоторое решение задачи N_1. Как было показано при доказательстве теоремы 2.1.1, в этом случае должно выполняться условие $\varphi(\mathbf{x}^*) = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^*)}{\kappa+\varepsilon}$. В то же время пусть $\mathbf{x}^{**} \in \mathbb{R}^n$ — некоторое решение задачи N_2. Из п. 1 следует, что в этом случае должно выполняться условие $\varphi(\mathbf{x}^{**}) = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}^{**})}{\kappa+\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $\phi_1 < \phi_2$ эквивалентно условию $\varphi(\mathbf{x}^*) < \varphi(\mathbf{x}^{**})$. Это означает, что $\mathbf{x}^{**}$ не может быть решением задачи N_2 (противоречие).

Предположим, что $\phi_1 > \phi_2$, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ — некоторое решение задачи N_1 и $\mathbf{x}^{**} \in \mathbb{R}^n$ — некоторое решение задачи N_2. Повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, несложно убедиться в том, что вектор $\mathbf{x}^*$ не может быть решением задачи N_1 (противоречие).

3. Отметим, что следствием утверждения, доказанного в п. 3, является равенство $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ (т. е. множества решений задач N_1 и N_2 совпадают).

Теорема 2.1.3. *Пусть некоторой несовместной системе линейных алгебраических уравнений вида* (1) *поставлены в соответствие задачи* A, B, C, N_0, N_1, N_2 *и* N_3 *с параметрами* $M > 0$ *и* $\delta > 0$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Для разрешимости задачи* N_3 *необходимо выполнение условия*

$$R_\delta \leqslant M, \tag{49}$$

где R_δ *взято из* (47).

2. *При любом* $\delta > 0$ *задача* N_3 *разрешима, если отказаться от ограничения* $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$, *или, что эквивалентно, положить* $M = +\infty$. *Кроме того, при любом* $M > 0$ *задача* N_3 *разрешима при соответствующем выборе параметра* δ. *Третья возможность сделать задачу* N_3 *разрешимой — соответствующий согласованный выбор параметров* M *и* δ. *Модифицированную каким-либо из перечисленных способов задачу будем называть задачей* $\widetilde{N}_3$.

3. *Если задача* N_3 *разрешима (или рассматривается задача* $\widetilde{N}_3$), *то для того чтобы вектор* $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *и матрица* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *были ее решением, достаточно, чтобы вектор* $\hat{\mathbf{x}}$ *был решением задачи* N_0 *с параметром* δ, *а матрица* $\mathbf{H}$ *была одноранговой и имела вид*

$$\mathbf{H} = (\mathbf{b} \mid -\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{y}^{\mathbf{T}},$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *— вектор, двойственный вектору* $\hat{\mathbf{x}}$ *относительно нормы* $\varphi(\cdot)$. *В том же случае, когда дополнительно выполняется условие* $\delta = \kappa - \gamma + \varepsilon$, *где* κ *задается соотношением* (43), γ *задается соотношением* (44), *а* $\varepsilon > 0$ *— некоторая константа, вектор* $\hat{\mathbf{x}}$ *может быть определен как решение задачи* N_2.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы 2.1.1 задача N_0 разрешима при любом $\delta > 0$. Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — некоторое ее решение. Тогда по теореме 2.1.1 $\hat{\mathbf{x}}$ является решением задачи N_1. Таким образом, по следствию из теоремы 2.1.1 $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) > 0$. Отсюда и из (9a), (9b) следует, что $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$.

Теперь обратимся к лемме 1.1.4. Пользуясь этой леммой и условием $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, заключаем, что существует одноранговая матрица $\mathbf{H}$, определяемая формулой $\mathbf{H} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{y}^{\mathbf{T}}$, где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, двойственный вектору $\hat{\mathbf{x}}$ относительно нормы $\varphi(\cdot)$. При этом $\|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})}{\varphi(\hat{\mathbf{x}})}$. Но в силу принадлежности вектора $\hat{\mathbf{x}}$ множеству решений задачи N_0 для него справедливо условие (45), в силу которого $\|\mathbf{H}\|_{\varphi,\psi} = \gamma + \delta$. Из сказанного следует, что вектор $\hat{\mathbf{x}}$ и матрица $\mathbf{H}$ принадлежат множеству решений задачи $\widehat{N}_3$: $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \to \min$, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$, $\|\mathbf{H}\|_{\psi,\varphi} \leqslant \gamma + \delta$, полученной из задачи N_3 отбрасыванием условия $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$. При этом задача $\widehat{N}_3$ разрешима при любом положительном значении параметра δ. Что же касается задачи N_3, то для ее разрешимости при произвольном $\delta > 0$ необходимо и достаточно выполнения условия $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$. Несложно показать, что задача $\widehat{N}_3$ разрешима и при $\delta = 0$ в случае, когда нижняя грань целевой функции в задаче C достигается. В этом случае задача $\widehat{N}_3$ разрешима тогда и только тогда, когда $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$.

Пусть в дополнение к уже сделанным предположениям выполняется условие $\delta = \kappa - \gamma + \varepsilon$, где параметр κ определяется соотношением (43), параметр γ определяется соотношением (44), а ε — некоторое положительное число. Нетрудно заметить, что сделанные предположения позволяют использовать теорему 2.1.2, в силу которой в данном случае вектор $\hat{\mathbf{x}}$ может быть найден как решение задачи N_2.

Заметим, что для любого $\delta > 0$ в силу следствия 2.1.1 справедливо неравенство $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \geqslant R_\delta$. Предположим, что задача N_3 разрешима. Тогда $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$. Отсюда следует, что $R_\delta \leqslant \varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$. Поэтому неравенство $R_\delta \leqslant M$ является необходимым условием разрешимости задачи N_3.

Предположим, что задача N_3 не имеет решения. Как было показано выше, это возможно тогда и только тогда, когда $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) > M$. Поскольку вектор $\hat{\mathbf{x}}$ является решением задачи N_0, можно воспользоваться условием $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) < +\infty$, полученным в ходе доказательства теоремы 2.1.1, и заключить, что задача N_3 действительно может быть сделана разрешимой увеличением параметра M. С другой стороны, в силу того, что для вектора $\hat{\mathbf{x}}$ справедливо условие (45), несложно показать, что задача N_3 может быть сделана разрешимой увеличением параметра δ или согласованным увеличением параметров M и δ.

Замечание. Приведенная выше теорема, несмотря на свою схематичность, может быть использована в качестве основы для построения вычислительных алгоритмов регуляризации решения изначально несовместной системы линейных алгебраических уравнений при коррекции матрицы ее коэффициентов. Очевидно, что при этом детали реализации данных алгоритмов могут различаться из-за необходимости учитывать особенности конкретных векторных норм $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$. В то же время можно предположить, что основные вычислительные трудности в большинстве случаев будут связаны не с построением матрицы $\mathbf{H}$, а с определением вектора $\hat{\mathbf{x}}$.

Рассматриваемая теорема предлагает два способа решения последней задачи, один из которых по своей постановке является более общим и сводится к нахождению условного экстремума с ограничением в форме равенства (задача N_0). Второй способ сводится к минимаксной задаче без ограничений (задача N_2). Он является менее общим, так как применим при определенных ограничениях на параметр δ. В то же время численный алгоритм решения задачи N_2 (построенный, например, по схемам, предложенным в [7]) может оказаться более простым и эффективным, чем соответствующий численный алгоритм решения задачи N_0.

2.2. Регуляризация решения изначально несовместной системы линейных алгебраических уравнений вида (1) при коррекции расширенной матрицы ее коэффициентов

По аналогии с п. 2.1 сначала рассмотрим некоторые вспомогательные задачи. Прежде всего отметим, что результаты, полученные при анализе задачи A, будут использоваться и в настоящем разделе.

Задача B'. $\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right) \to \min\limits_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Argmin}\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$. Минимальное значение целевой функции в данной задаче (обозначим его через η') достигается либо в силу теоремы Вейерштрасса (если $\operatorname{Argmin}\limits_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ — замкнутое и ограниченное множество), либо в силу следствия из этой теоремы (в противном случае). Заметим, что в силу самой постановки задачи B' и свойства (9b) выполняется условие $\eta' > 0$.

Таким образом, в рассмотрение можно ввести величину

$$\kappa' = \frac{\theta}{\eta'}. \tag{50}$$

Следующая задача была подробно исследована при доказательстве теоремы 1.2.1.

Задача C'.

$$\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z}) \to \inf, \quad \varphi(\mathbf{z}) = 1, \quad z_{n+1} \neq 0, \tag{51}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Не делая специальных предположений о достижимости нижней грани целевой функции в задаче C', положим, что ее значение равно γ', причем в силу (9a)

$$\gamma' \geqslant 0. \tag{52}$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу.

Задача D.

$$\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z}) \to \sup, \quad \varphi(\mathbf{z}) = 1, \quad z_{n+1} \neq 0, \tag{53}$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Заметим, что конечная верхняя грань целевой функции в задаче D существует в силу теоремы Вейерштрасса ($\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z})$ — непрерывная функция, множество $\{\mathbf{z} \mid \varphi(\mathbf{z}) = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ компактно), но необязательно достигается из-за условия $z_{n+1} \neq 0$. Не будем высказывать никаких предположений о достижимости верхней грани величины $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z})$, которую обозначим через γ''. Заметим лишь, что в силу условий (11), (13) и (53) для любого вектора $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$ такого, что $\varphi(\mathbf{z}) = 1$, справедливо неравенство $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z}) \leqslant \|[\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\|_{\varphi,\psi}$, которое можно использовать для оценки параметра γ''.

Величины γ', γ'' и κ' связаны между собой соотношением

$$\gamma' \leqslant \kappa' \leqslant \gamma'', \tag{54}$$

которое можно получить как следствие следующего утверждения.

Лемма 2.2.1. *Пусть несовместной системе линейных алгебраических уравнений поставлены в соответствие задачи C' и D, а γ' и γ'' — значения соответственно нижней и верхней граней целевой функции указанных задач. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\gamma' \leqslant \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)} \leqslant \gamma''. \tag{55}$$

Доказательство.

Случай A. Пусть для некоторого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ неравенство (55) нарушается таким образом, что оказывается справедливым неравенство

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)} < \gamma'.$$

На основе вектора $\mathbf{x}$ построим векторы $\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ следующим образом. Пусть $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\tilde{\mathbf{z}} = \varphi^{-1}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}$. Нетрудно убедиться, что при этом справедливы условия $\varphi(\tilde{\mathbf{z}}) = 1$, $\psi([\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\tilde{\mathbf{z}}) < \gamma'$, что противоречит определению параметра γ'.

Случай B. Пусть для некоторого вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ неравенство (55) нарушается таким образом, что выполняется неравенство

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)} > \gamma''.$$

Здесь рассуждения аналогичны приведенным выше, только противоречие получаем с определением параметра γ''.

Рассмотрим основные задачи данного раздела.

Задача N_0'. $\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right) \to \min$ при условии

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)} = \gamma' + \delta, \tag{56}$$

где $\delta > 0$ — некоторое число.

Задача N_1'. $\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right) \to \min$ при условии $\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)} \leqslant \gamma' + \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое число.

Задача N_2'. $\max\left\{\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})}{\kappa' + \varepsilon'}, \varphi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\} \to \min$.

И наконец, проблема регуляризации решения изначально несовместной системы вида (1) будет нами рассматриваться как

Задача N_3'. При заданных параметрах $M > 0$ и $\delta > 0$ найти вектор $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ и матрицу $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ такие, что $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h})$, $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} \leqslant \gamma' + \delta$, $\rho(\hat{\mathbf{x}}) \to \min$, $\rho(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$, где $\rho(\cdot)$ — некоторая векторная норма.

Пусть $\mathbf{X}_0'$, $\mathbf{X}_1'$, $\mathbf{X}_2'$ — множества решений задач N_0', N_1', N_2', а ϕ_0', ϕ_1', ϕ_2' — соответствующие оптимальные значения целевых функций.

Теорема 2.2.1. *Пусть несовместной системе линейных уравнений вида* (1) *поставлены в соответствие задачи* A, B', C', N_0' *и* N_1', *причем выполняется условие*

$$\gamma' < \gamma'', \tag{57}$$

а последние две задачи предполагают выполнение условия

$$\gamma' < \gamma' + \delta < \gamma''. \tag{58}$$

Тогда задачи N_0', N_1' *разрешимы*, $\mathbf{X}_0' = \mathbf{X}_1' \neq \varnothing$ *и* $\phi_0' = \phi_1' > 0$.

Доказательство. 1. Применяя условия (57), (58) и технику, использованную при доказательстве теоремы 1.2.1, можно показать, что решение задачи N_0' при соблюдении указанных условий существует.

2. Используя непрерывность функции $\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right)$ и то, что на множестве $\mathbf{X}_0'$ данная функция может неограниченно возрастать, в силу следствия из теоремы Вейерштрасса заключаем, что $\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right)$ достигает своего минимума на множестве $\mathbf{X}_0'$.

3. Покажем, что при выполнении условий (57) и (58) задача N_1' разрешима и для любого ее решения $\mathbf{x}^{**} \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{**})}{\gamma' + \delta} = \varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{**}\\1\end{bmatrix}\right). \tag{59}$$

Для этого задачу N_1' перепишем в виде

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{**}\\1\end{bmatrix}\right) \to \min, \quad \frac{\psi(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{**})}{\gamma' + \delta} \leqslant \varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{**}\\1\end{bmatrix}\right),$$

и заметим, что в силу условий (41), (52) и (58) функция $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\gamma'+\delta}$ ограничена снизу и своей нижней грани достигает: $\min\limits_{\mathbf{x}} \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\gamma'+\delta} = \frac{\theta}{\gamma'+\delta}$, где θ — оптимальное значение целевой функции в задаче A.

4. Сопоставляя формулы (56) и (59) и учитывая исследованные выше условия разрешимости задач N_0' и N_1', убеждаемся, что для любого $\delta > 0$, удовлетворяющего условию (58), справедливо условие $\mathbf{X}_0' = \mathbf{X}_1'$, т. е. множества решений задач N_0' и N_1' совпадают. В то же время в силу формул (56) и (59) выполняется условие $\phi_0' = \phi_1'$.

Следствие 2.2.1. *Для любого решения $\mathbf{x}^{**}$ задачи N_1' с параметром δ, $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$, выполняется условие*

$$\varphi(\mathbf{x}^{**}) \geqslant R_\delta = \frac{\theta}{\gamma' + \delta}, \tag{60}$$

где θ — минимальное значение целевой функции в задаче A, γ' — значение нижней грани целевой функции в задаче C'.

Теорема 2.2.2. *Пусть несовместной системе линейных уравнений вида (1) поставлены в соответствие задачи A, B', C', D, N_1', N_2', причем выполняется условие $\gamma' < \kappa' < \gamma''$, в задаче N_1' величина $\delta = \kappa' - \gamma' + \varepsilon$, где ε, $0 < \varepsilon < \gamma'' - \kappa'$, — некоторый параметр, κ' определяется из соотношения (50), а γ' и γ'' порождаются задачами C' и D. Тогда задача N_2' разрешима, $\mathbf{X}_1' = \mathbf{X}_2'$ и $\phi_1' = \phi_2'$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.2.

Прежде чем перейти к основной теореме, рассмотрим некоторые дополнительные условия, которые позволят согласовать между собой критерии $\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right) \to \min$ и $\rho(\mathbf{x}) \to \min$ и тем самым при решении задачи N_3' позволят использовать результаты, полученные при решении задач N_0' и N_1'.

Итак, пусть $\varphi(\cdot)$ — векторная норма, определенная на множестве вещественных $(n+1)$-мерных векторов.

Рассмотрим функции $\rho(\mathbf{x})$ и $\tilde{\varphi}(\mathbf{z})$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}$, определенные как

$$\rho(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{Q}_1\mathbf{x}), \tag{61}$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{Q}_2\mathbf{z}), \tag{62}$$

где $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ и $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, причем

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_n\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \tag{63}$$

$$\mathbf{Q}_2 = [\mathbf{Q}_1\ \mathbf{0}], \tag{64}$$

где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка n.

Из формул (61) и (62) следует, что $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \rho(\mathbf{x})$, если для вектора $\mathbf{z}$ справедливо блочное представление $\mathbf{z} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \alpha\end{bmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Несложно показать, что функция $\tilde{\varphi}(\mathbf{z})$ является векторной полунормой в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, т. е. функцией, удовлетворяющей аксиомам (9a), (10), (11). При этом нуль-подпространством или ядром данной полунормы (т. е. в соответствии с [14] множеством $\mathbf{Z}_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = 0\}$) является множество $(n+1)$-мерных векторов, первые n компонент которых — нулевые. Но, как известно (см., например, [14]), любая полунорма на $\mathbb{R}^{n+1}$ становится нормой на любом подпространстве $\mathbf{Z}_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющем условию $\mathbf{Z}_0 \cap \mathbf{Z}_1 = \{\mathbf{0}\}$. Очевидно, что в качестве $\mathbf{Z}_1$ можно выбрать множество $(n+1)$-мерных векторов, $(n+1)$-я компонента которых — нулевая, т. е. для векторов вида $\mathbf{z} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 0\end{bmatrix}$. Но тогда получаем, что, с одной стороны, $\tilde{\varphi}(\mathbf{z})$ — векторная норма в подпространстве $\mathbf{Z}_1$, а с другой — для любого $\mathbf{z}$, принадлежащего $\mathbf{Z}_1$, выполняется условие $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}) = \rho(\mathbf{x})$. Таким образом, $\rho(\mathbf{x})$ — векторная норма на $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что функции $\rho(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{z})$ обладают некоторым дополнительным по отношению к аксиомам векторных норм свойством. А именно пусть для любых двух $(n+1)$-мерных векторов вида

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \alpha\end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ \alpha\end{bmatrix} \tag{65}$$

выполняется условие

$$\rho(\mathbf{x}) > \rho(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{z}_1) > \varphi(\mathbf{z}_2), \tag{66}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ — некоторое число и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ — векторы. Поскольку функции $\rho(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{z})$ связаны друг с другом посредством соотношений (61) и (63), условие (66) фактически является дополнительным условием, накладываемым только на функцию $\varphi(\mathbf{z})$. Покажем, что подобные векторные нормы существуют. Для этого достаточно рассмотреть нормы Гёльдера с показателем p, $1 \leqslant p < +\infty$. Действительно, используя определение нормы Гёльдера с показателем p и формулы (61)–(65), убеждаемся, что утверждение (66) принимает вид

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + |\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p + |\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим теперь видоизмененную задачу N_1' в следующей формулировке.

Задача $\widetilde{N}_1'$. $\rho(\mathbf{x}) \to \min$, $\frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x})}{\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right)} \leqslant \gamma' + \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое число, а функция $\rho(\cdot)$ строится по формулам (61), (63) и удовлетворяет условиям (65), (66).

Пусть $\widetilde{X}_1'$ — множество решений этой задачи. Пользуясь соотношениями (65) и (66), а также результатами теоремы 2.2.1, можно показать, что справедлива следующая

Лемма 2.2.2. *Пусть задача N_0' разрешима. Тогда разрешима задача $\widetilde{N}_1'$, причем множества решений обеих задач совпадают, т. е.*

$$\mathbf{X}_0' = \tilde{\mathbf{X}}_1' \neq \varnothing. \tag{67}$$

Соотношение (67) позволяет сводить задачу $\widetilde{N}_1'$ к задаче N_1', а с применением теоремы 2.2.1 и к задаче N_0', что и используется в приводимой ниже теореме.

Теорема 2.2.3. *Пусть некоторой несовместной системе линейных алгебраических уравнений вида (1) поставлены в соответствие задачи A, B', C', D', N_0', N_1', $\widetilde{N}_1'$, N_2 и N_3 с параметрами $M > 0$, $\gamma'' > \gamma'$ и $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Для разрешимости задачи N_3' необходимо выполнение условия

$$R_\delta' \leqslant M, \tag{68}$$

где R_δ' определяется формулой (60).

2. *Задача* N_3' *разрешима при любом* δ, $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$, *если убрать ограничение* $\varphi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\1\end{bmatrix}\right) \leqslant M$ *или, что эквивалентно, положить* $M = +\infty$. *Модифицированную разрешимую задачу будем называть задачей* $\widetilde{N}_3'$.

3. *Если задача* N_3' *разрешима (или рассматривается задача* $\widetilde{N}_3'$), *то для того чтобы вектор* $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *и матрица* $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ *были ее решением, достаточно, чтобы вектор* $\hat{\mathbf{x}}$ *был решением задачи* N_0' *с параметром* δ, $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$, *а матрица* $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$ *была одноранговой и строилась по формуле*

$$[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})\mathbf{y}^{\mathbf{T}},$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ — *вектор, двойственный вектору* $\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\1\end{bmatrix}$ *относительно нормы* $\varphi(\cdot)$. *В том же случае, когда дополнительно выполняется условие* $\delta = \kappa' - \gamma' + \varepsilon$, *где* κ' *задается соотношением* (50), γ' — *соотношением* (52), *а* $\varepsilon > 0$ — *некоторая константа, вектор* $\hat{\mathbf{x}}$ *может быть определен как решение задачи* N_2'.

Доказательство. Заметим, что по теореме 2.2.1 задача N_0' разрешима при любом δ, $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$. Пусть вектор $\hat{\mathbf{x}}$ — некоторое ее решение. Тогда в силу леммы 2.2.2 и теоремы 2.2.1 $\hat{\mathbf{x}}$ является решением задачи $\widetilde{N}_1'$. Кроме того, в силу леммы 2.2.2 вектор $\hat{\mathbf{x}}$ — решение задачи $\widetilde{N}_1'$.

Из леммы 1.2.2 следует, что существует одноранговая матрица $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$ такая, что $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \frac{\psi(\mathbf{b}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})}{\varphi\left(\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}\\1\end{bmatrix}\right)}$. Так как $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}_0'$, то справедливо условие (56), в силу которого $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\varphi,\psi} = \gamma' + \delta$.

Таким образом, показано, что вектор $\hat{\mathbf{x}}$ и матрица $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$ принадлежат множеству решений задачи $\widehat{N}_3'$: $\rho(\hat{\mathbf{x}}) \to \min$, $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H}, \mathbf{h})$, $\|[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]\|_{\psi,\varphi} \leqslant \gamma' + \delta$, полученной из задачи N_3' отбрасыванием условия $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$. При этом задача $\widehat{N}_3'$ разрешима при любом значении параметра δ, удовлетворяющем условию $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$. Что же касается задачи N_3, то для ее разрешимости при $0 < \delta < \gamma'' - \gamma'$ необходимо и достаточно выполнения условия $\varphi(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant M$.

Дальнейшие выкладки аналогичны соответствующим выкладкам из доказательства теоремы 2.1.3.

Замечание. Теорема 2.2.3, так же как и аналогичная ей теорема 2.1.3, может быть использована в качестве основы для построения вычислительных алгоритмов регуляризации решения изначально несовместной системы линейных алгебраических уравнений при коррекции расширенной матрицы ее коэффициентов. Все основные утверждения и замечания к теореме 2.1.3 остаются справедливыми и в данном случае.

3. Оптимальная матричная коррекция несовместных систем линейных алгебраических уравнений с условием неотрицательности переменных и регуляризация их решений

Заметим, что дополнительное условие неотрицательности переменных, которое отличает систему (1) от системы (2), не меняет сути большей части выкладок, использовавшихся в разделе 1. Так, соответствующие теоремы о достаточных условиях достижимости нижней грани нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ матрицы коррекции для задач (5), (6) оказываются справедливыми и для задач (7), (8), только в их формулировках должна дополнительно учитываться неотрицательность переменных. Аналогичное замечание можно сделать относительно задач N_3 и N_3', рассмотренных в разделе 2. Поскольку изменения, которые должны происходить в текстах теорем, достаточно очевидны, новые формулировки мы приводить не будем, а сконцентрируем свое внимание на новой, еще не затрагиваемой в настоящей работе проблеме.

Предположим, что несовместная система вида (2) формально описывает допустимую область некоторой несобственной задачи линейного программирования, записанной в стандартной форме, причем несобственность задачи линейного программирования как раз и обусловлена несовместностью системы (2). Данная ситуация естественным образом подводит к необходимости исследования задач коррекции коэффициентов в уравнениях, задающих допустимую область данной задачи линейного программирования. В чем же отличие этих новых задач от тех, которые были исследованы в разделах 1 и 2? Оно заключается в том, что для большей части практических приложений, породивших задачу линейного программирования, важно, чтобы ее допустимая область не только была непустой, но и обеспечивала ограниченность оптимального решения. Напомним, что рассмотренные в разделах 1 и 2 методы в общем случае такого свойства скорректированным системам не гарантируют. Правда, в некоторых случаях, попадающих под действие теорем 1.1.2, 1.2.2 и их следствий, гарантируется, что скорректированная допустимая область задачи линейного программирования будет состоять из единственной точки, что, безусловно, обеспечивает ограниченность оптимального решения задачи линейного программирования.

Оказывается, основываясь на некоторых полезных свойствах одноранговых матриц коррекции, рассмотренных в разделах 1 и 2, можно дополнить список методов коррекции, гарантирующих ограниченность допустимой области задачи линейного программирования, и, следовательно, ограниченность ее оптимального решения. Сделаем это, рассмотрев следующие две теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть матрица коэффициентов* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *несовместной линейной системы вида* (2), *формально описывающей допустимую область некоторой несобственной задачи линейного программирования, корректируется с помощью некоторой одноранговой матрицы* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, *причем соответствующая система вида* (1) *также является несовместной. Тогда для того, чтобы множество* $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ *было ограниченным, достаточно, чтобы в разложении* $\mathbf{H} = \mathbf{p}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$, *где* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, *вектор* $\mathbf{q}$ *состоял только из положительных компонент и существовал вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *такой, что* $\mathbf{x} \in \mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$, $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, *где* $\varphi(\cdot)$ — *некоторая векторная норма.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — такой вектор, что $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$. Тогда по лемме 1.1.1 существует одноранговая матрица $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такая, что $\mathbf{x} \in \mathscr{X}(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$. Поскольку $\mathbf{H}$ — одноранговая матрица, для нее справедливо представление $\mathbf{H} = \mathbf{p}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$, где в соответствии с формулой (15) можно положить $\mathbf{p} = (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. Тогда в силу формулы (15) вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ должен удовлетворять условию $\mathbf{q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = 1$. Очевидно, что для произвольного ненулевого неотрицательного вектора $\mathbf{x}$ соответствующий положительный вектор $\mathbf{q}$ всегда существует. Таким образом, матрица $\mathbf{H}$ и вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющие условию теоремы, всегда существуют.

Исследуем множество $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$. Возможны два случая:

1) $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ состоит из одного элемента — вектора $\mathbf{x}$. Тогда теорема справедлива в силу условия $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$;

2) $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ содержит другие векторы кроме вектора $\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$, где $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. В силу определения множества $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ должны выполняться условия

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \tag{69}$$

$$\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \tag{70}$$

Кроме того, как было показано при доказательстве теоремы 1.1.2, выполняется условие

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x} = 0. \tag{71}$$

Из (71) и положительности компонент вектора $\mathbf{q}$ следует, что вектор $\Delta\mathbf{x}$ имеет хотя бы одну отрицательную компоненту. Но тогда в силу ограниченности вектора $\mathbf{x}$ и условий (69), (70) заключаем, что выполняется условие $\varphi(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) < +\infty$. А так как выбор вектора $\Delta\mathbf{x}$ был произвольным, это означает ограниченность множества $\mathscr{X}_+(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$.

Теорема 3.2. *Пусть расширенная матрица коэффициентов* $[\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ *несовместной линейной системы вида* (2), *формально описывающей допустимую область некоторой несобственной задачи линейного программирования, корректируется с помощью некоторой одноранговой матрицы* $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, *причем соответствующая система вида* (1) *также является несовместной. Тогда для того, чтобы множество* $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$ *было ограниченным, достаточно, чтобы в разложении* $\mathbf{H} = \mathbf{p}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$, *где* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, *вектор* $\mathbf{q}$ *состоял только из положительных компонент и существовал вектор* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *такой, что* $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$, $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, *где* $\varphi(\cdot)$ *— некоторая векторная норма.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — такой вектор, что $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$. Сформируем $(n+1)$-мерный вектор $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$. Вектор удовлетворяет условиям леммы 1.2.1, в соответствии с которой на основе вектора $\mathbf{z}$ может быть построена одноранговая матрица $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ такая, что $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$. Так как $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$. Поскольку $\operatorname{rank}[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] = 1$, справедливо разложение $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}] = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{q}}^{\mathbf{T}}$, где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ — некоторые векторы. Разобьем вектор $\tilde{\mathbf{q}}$ на два блока: $\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_{n+1} \end{bmatrix}$, где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, $q_{n+1} \in \mathbb{R}$. Тогда матрица $\mathbf{H}$, которая, как и $[\mathbf{H} \mid -\mathbf{h}]$, является одноранговой, может быть представлена в виде $\mathbf{H} = \mathbf{p}\mathbf{q}^{\mathbf{T}}$, причем в силу формулы (29) можно положить $\mathbf{p} = [\mathbf{A} \mid -\mathbf{b}]\mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$, а вектор $\mathbf{q}$, в отличие от теоремы 3.1, можно выбрать произвольным (в том числе положительным), так как кроме соответствующего ограничения, наложенного на вектор $\tilde{\mathbf{q}}$, существует и степень свободы, связанная с выбором компонента q_{n+1}. Таким образом, вектор $\mathbf{x}$ и матрица $\mathbf{H}$, удовлетворяющие условию теоремы, всегда существуют.

Исследуем множество $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$. Возможны два случая:

1) $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$ состоит из одного элемента — вектора $\mathbf{x}$. Тогда теорема верна в силу условия $\varphi(\mathbf{x}) < +\infty$;

2) $\mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$ содержит другие векторы кроме вектора $\mathbf{x}$. Пусть $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \mathfrak{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H},\mathbf{h})$, где $\Delta\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор. В силу определения множества $\mathscr{X}_+(\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{H})$ должны выполняться условия

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \tag{72}$$

$$\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \tag{73}$$

Кроме того, как было показано при доказательстве теоремы 1.2.2, выполняется условие

$$\mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{q}^{\mathbf{T}}\Delta\mathbf{x} = 0. \tag{74}$$

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны соответствующим выкладкам из доказательства теоремы 3.1.

Автор выражает признательность организаторам конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (DAOR'2002) за возможность представления предварительных результатов данной работы и участникам секции линейного программирования этой конференции за высказанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ватолин А. А.** Об аппроксимации несовместных систем линейных уравнений и неравенств // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ РАН, 1984. С. 39–54.
2. **Ватолин А. А.** О коррекции расширенной матрицы несовместной системы линейных неравенств и уравнений // Комбинаторные, алгебраические и вероятностные методы дискретного анализа. Горький, 1989. С. 40–54.
3. **Ватолин А. А.** Несобственные задачи математического программирования и методы их коррекции: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1992.
4. **Горелик В. А.** Матричная коррекция задачи линейного программирования с несовместной системой ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 11. С. 1697–1705.
5. **Горелик В. А., Ерохин В. И., Муравьева О. В.** Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 57–88.
6. **Горелик В. А., Ибатуллин Р. Р.** Коррекция системы ограничений задачи линейного программирования с минимаксным критерием // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 89–107.
7. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
8. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
9. **Ерохин В. И.** Свойства оптимальной одноранговой коррекции матриц коэффициентов несовместных неоднородных линейных моделей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 1. С. 33–60.
10. **Икрамов Х. Д.** Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.

11. Мазуров Вл. Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990.

12. Тихонов А. Н. О нормальных решениях приближенных систем линейных алгебраических уравнений // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 3. С. 549–554.

13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

14. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Адрес автора:

Борисоглебский
государственный
педагогический институт,
ул. Народная, 43,
397160 Борисоглебск,
Воронежская обл., Россия.
E-mail: bgpi@mail.ru,
bgpi@vmail.ru

Статья поступила
16 сентября 2002 г.