ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2002. Серия 2. Том 9, № 2, 78–96

УДК 519.874

ЗАДАЧА ВЫБОРА РЯДА ИЗДЕЛИЙ С ЧАСТИЧНЫМ ВНЕШНИМ ФИНАНСИРОВАНИЕМ*)

Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов

Приводятся содержательные и математические постановки задач выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием. Для их решения предлагаются точные и приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности. Формулируются достаточные условия, при выполнении которых исследуемые задачи решаются эффективно.

Введение

В задаче выбора оптимального ряда изделий считается заданным множество работ, подлежащих выполнению, и множество изделий, которые могут использоваться для этого [2]. Затраты на разработку, производство и эксплуатацию изделий считаются известными. В качестве критерия выбора оптимального ряда используется минимум суммарных затрат. Когда известен доход, который может быть получен при выполнении работ, при выборе оптимального ряда исходят из критерия максимума суммарной прибыли. В обоих случаях процесс разработки, производства и эксплуатации изделий рассматривается как одномоментный и независящий от каких-либо других обстоятельств. Однако в реальной жизни сначала требуются затраты на организацию производства и только потом появляется прибыль от выполнения работ.

Для анализа таких ситуаций в статье предлагаются математические модели двухуровневого программирования, обобщающие задачу выбора оптимального ряда изделий. Особенностью предлагаемых постановок является покрытие части расходов на организацию производства средствами инвестора, который может получить любые изделия из числа произведенных по заранее согласованным ценам. На верхнем уровне выбирается ряд изделий, которые будут производиться для выполнения

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–07–90212).

работ, а на нижнем уровне инвестор стремится максимизировать суммарную эффективность выбранных им изделий, исходя из величины своего кредита. В таких условиях выбор ряда изделий и выбор множества изделий, используемых для погашения кредита, становятся взаимозависимыми, что приводит к двухуровневым математическим моделям. Задача состоит в том, чтобы найти такой ряд изделий, который позволил бы рассчитаться с инвестором и выполнить все работы с минимальными суммарными затратами.

В разделе 1 вводятся обозначения и приводится постановка двухуровневой задачи выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием.

В разделе 2 доказана полиномиальная сводимость задачи к серии классических задач выбора ряда изделий. Установлено, что исходная задача полиномиально разрешима, если в ней существует оптимальное решение со связными областями применения.

В разделе 3 рассматриваются частные случаи исходной задачи, которые полиномиально сводятся к задачам выбора ряда изделий одноразового или многоразового использования [2, 13]. Выделены полиномиально разрешимые подклассы. Для двухуровневой простейшей задачи размещения предлагается приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности.

В разделе 4 исследуется вариант задачи на максимум. Для ее частного случая — простейшей задачи размещения с частичным внешним финансированием предлагается приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности.

В разделе 5 рассматривается вырожденный случай. Приводится пример задачи, у которой все оптимальные решения не являются гарантированными.

Определения допустимого, гарантированного и оптимального решений, а также невырожденной задачи содержатся в [7].

1. Постановка задачи

Пусть $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ задает исходный ряд типов изделий. Их область применения задается множеством работ $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Для каждого $i \in I$ задано разбиение множества J на подмножества $J_i^1, \ldots, J_i^{T_i}$. Работы из одного множества могут быть выполнены последовательно одна за другой с использованием одних и тех же изделий. Работы из разных подмножеств выполняются параллельно.

Математическая постановка задачи может быть записана в виде задачи частично целочисленного программирования. Для каждого $i \in I$ введем следующие обозначения:

$g_i(v_i) \geqslant 0$ — затраты на разработку изделия и его производство в зависимости от объема выпуска $v_i \geqslant 0$; будем предполагать, что $g_i(v_i)$ вогнутые неубывающие функции;

$\beta_i \geqslant 0$ — стоимость одного изделия для инвестора;

$\alpha_i \geqslant 0$ — оценка эффективности одного изделия инвестором;

$p_{ij} \geqslant 0$ — число изделий, требующихся для выполнения j-й работы;

$c_{ij} \geqslant 0$ — стоимость выполнения j-й работы;

$B \geqslant 0$ — величина кредита.

Переменные v_i, y_{ij}, w_i имеют следующий смысл:

$v_i \geqslant 0$ — объем производства изделия i-го типа;

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я работа выполняется изделиями } i\text{-го типа}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$w_i \geqslant 0$ — объем изделий i-го типа, проданных инвестору.

С использованием введенных обозначений задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием (обозначим ее ВР) записывается следующим образом: найти

$$\min_{v,y} \sum_{i\in I} \Big\{ g_i(v_i) + \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij} \Big\} \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i(v), \quad i \in I, \tag{3}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{4}$$

где $w(v)$ — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v): найти

$$\max_{w} \sum_{i\in I} \alpha_i w_i \tag{5}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} \beta_i w_i \leqslant B, \tag{6}$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i, \quad i \in I. \tag{7}$$

При $B = 0$ задача ЛР(v) имеет единственное оптимальное решение $w^* = 0$. В этом случае задача (1)–(7) эквивалентна классической задаче выбора ряда изделий [2, с. 95]: найти

$$\min_{v,y} \sum_{i\in I} \Big\{ g_i(v_i) + \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij} \Big\}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i, \quad i \in I,$$

$$v_i \geqslant 0, \quad y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Таким образом, задача (1)–(7) является NP-трудной в сильном смысле [5].

2. Сведение к задаче выбора ряда изделий

Пусть величины α_i/β_i, $i \in I$, попарно различны и множество I упорядочено так, что $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\beta_2 > \cdots > \alpha_m/\beta_m > 0$. В этом случае задача ЛР(v) имеет единственное оптимальное решение. Следовательно, задача ВР невырождена [7]. Поэтому каждое ее оптимальное решение является наилучшим гарантированным решением [7]. Вырожденный случай будет рассмотрен в разделе 5.

Лемма 1. *Существует оптимальное решение задачи* ВР *с единственной ненулевой компонентой вектора* w.

Доказательство. Пусть (v_i^*, y_{ij}^*, w_i^*) — произвольное оптимальное решение задачи ВР. Тогда найдется такой номер s, что

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i w_i^* = B, \quad w_i^* = v_i^* \text{ при } i < s \text{ и } 0 < w_s^* \leqslant v_s^*.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу: найти

$$\min_{v\geqslant 0} \sum_{1\leqslant i\leqslant s-1} g_i(v_i) + g_s(v_s^* - w_s^* + v_s)$$

при условии

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant s} \beta_i v_i = B.$$

Обозначим через $p(B)$ оптимальное значение ее целевой функции. Из предположения о вогнутости и неубывании функций $g_i(v_i)$ следует равенство

$$p(B) = \min\Big\{\min\{g_i(B/\beta_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant s-1\}, g_s(B/\beta_s + v_s^* - w_s^*)\Big\}.$$

Очевидно, что вектор

$$\overline{v}_i = \begin{cases} v_i^*, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant s-1, \\ w_s^*, & \text{если } i = s, \end{cases}$$

является допустимым решением вспомогательной задачи. Следовательно, $p(B) \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} g_i(\overline{v}_i)$. Тогда величина

$$p(B) + \sum_{i=s+1}^{m} \left\{ g_i(v_i^*) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij}^* \right\} + \sum_{j \in J} c_{sj} y_{sj}^*$$

является нижней оценкой для оптимального значения задачи ВР. Покажем, что эта оценка достигается на допустимом решении этой задачи с единственной ненулевой компонентой вектора w.

Возможны два случая: 1) $p(B) = g_k(B/\beta_k)$ для некоторого k, $1 \leqslant k < s$; 2) $p(B) = g_s(v_s^* - w_s^* + B/\beta_s)$. В первом случае оценка достигается при

$$\overline{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i < s,\ i \neq k, \\ B/\beta_i, & \text{если } i = k, \\ v_i^* - w_i^*, & \text{если } i = s, \\ v_i^*, & \text{если } i > s, \end{cases} \qquad \overline{w}_i = \begin{cases} \overline{v}_i, & \text{если } i < s, \\ 0, & \text{если } i \geqslant s, \end{cases} \qquad \overline{y} = y^*,$$

а во втором случае — при

$$\overline{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i < s, \\ B/\beta_i + v_i^* - w_i^*, & \text{если } i = s, \\ v_i^*, & \text{если } i > s, \end{cases} \qquad \overline{w}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq s, \\ B/\beta_i, & \text{если } i = s, \end{cases} \qquad \overline{y} = y^*.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть $I_k = \{k, \ldots, m\}$, где $1 \leqslant k \leqslant m$.

Теорема 1. *Решение задачи* ВР *сводится к решению* m *задач выбора ряда изделий.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что в задаче ВР можно ограничиться поиском оптимальных решений (v^*, y^*, w^*) с одной ненулевой компонентой w_k^*, $k \in I$, такой, что $\beta_k w_k^* = B$ и $w_k^* \leqslant v_k^*$.

Пусть (v, y) — произвольное допустимое решение следующей задачи (обозначим ее ВР$_k$): найти

$$Z_k^* = \min_{v,y} \sum_{i \in I_{k+1}} \left\{ g_i(v_i) + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} \right\} + \sum_{j \in J} c_{kj} y_{kj} + g_k(B/\beta_k + v_k)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I_k} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i, \quad i \in I_k,$$

$$v_i \geqslant 0, \quad y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I_k, \quad j \in J.$$

Тогда решение

$$\overline{v}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i < k, \\ B/\beta_i + v_i, & \text{если } i = k, \\ v_i, & \text{если } i \in I_{k+1}, \end{cases}$$

$$\overline{y}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < k, j \in J, \\ y_{ij}, & \text{если } i \in I_k,\ \ j \in J, \end{cases} \qquad \overline{w}_i = \begin{cases} B/\beta_i, & \text{если } i = k, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

является допустимым решением задачи ВР с одной ненулевой компонентой вектора w и значения целевых функций на этих решениях совпадают.

Осталось заметить, что для любого k задача ВР$_k$ является задачей выбора ряда изделий [2]. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет использовать для решения задачи ВР и ее частных случаев алгоритмы ветвей и границ из [2].

Пусть (v, y, w) — произвольное допустимое решение задачи ВР. Обозначим через $J(i)$ множество $\{j \in J \mid y_{ij} = 1\}$ и назовем его областью применения изделия i.

Теорема 2. *Если в задаче* ВР *существует оптимальное решение со связными областями применения, то она сводится к решению m задач о ближайшем соседе.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что задача ВР сводится к решению m задач выбора ряда изделий ВР$_k$, $k \in I$. При доказательстве леммы 1 в оптимальном решении модифицировались только компоненты, соответствующие переменным v и w. Следовательно, если в задаче ВР существует оптимальное решение со связными областями применения, то найдется оптимальное решение со связными областями применения и с одной ненулевой компонентой у вектора w^*. Поэтому в одной из задач ВР$_k$ найдется оптимальное решение со связными областями применения.

Покажем, что задача ВР$_k$ сводится к решению задачи о ближайшем соседе вида: найти

$$\min_{R,z} \sum_{l=1}^{R} \widetilde{f}_k(z_{l-1}, z_l)$$

при условии

$$0 = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \cdots \leqslant z_R = n,$$

где $\widetilde{f}_k(z_{l-1}, z_l)$ — неотрицательная функция, определенная на всех парах (z_{l-1}, z_l) таких, что $z_{l-1} \leqslant z_l$ и $z_{l-1}, z_l \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Пусть

$$f_k(J') = \min\left\{ \min_{i \in I_{k+1}} \left\{ g_i(v_i(J')) + \sum_{j \in J'} c_{ij} \right\}, g_k(B/\beta_k + v_k(J')) + \sum_{j \in J'} c_{kj} \right\},$$

где $J' \subset J$ и

$$v_i(J') = \sum_{t=1}^{T_i} \max_{j \in J_i^t \cap J'} p_{ij}, \quad i \in I_k.$$

Обозначим через $J(i_l)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, непустые области применения, соответствующие некоторому оптимальному решению задачи. Из определения функции f_k следует равенство $Z_k^* = \sum_{l=1}^{R} f_k(J(i_l))$. Так как множества $J(i_l)$ образуют разбиение множества J, то

$$Z_k^* = \min\left\{ \sum_{l=1}^{R} f_k(J_l) \;\middle|\; \bigcup_{l=1}^{R} J_l = J, J_l \cap J_{l'} = \varnothing, l \neq l' \right\},$$

где $R \leqslant m$.

По предположению в задаче BP_k существует оптимальное решение со связными областями применения. Следовательно, полагая $J_l = (z_{l-1}, z_l]$, где $z_{l-1} < z_l$ — целые числа из интервала $[0, n]$, получаем

$$Z_k^* = \min_{R,(z_l)} \left\{ \sum_{l=1}^{R} \widetilde{f}_k(z_{l-1}, z_l) \;\middle|\; 0 = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_R = n \right\},$$

где $\widetilde{f}_k(z_{l-1}, z_l) = f_k(J_l) = f_k((z_{l-1}, z_l])$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Приведенные утверждения справедливы и для задачи ВР с дополнительными ограничениями верхнего уровня:

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J,$$
$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant M,$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,$$

которые запрещают выбирать число типов изделий, превышающее заданную величину M.

3. Линейная задача

В этом разделе рассматривается частный случай задачи ВР, который является обобщением простейшей задачи размещения [13].

Пусть при каждом $i \in I$ функция $g_i(v_i)$ имеет следующий вид:

$$g_i(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i = 0, \\ f_i + c_i v_i, & \text{если } v_i > 0, \end{cases}$$

где

$f_i \geqslant 0$ — начальные затраты на подготовку производства;

$c_i \geqslant 0$ — затраты на производство одного изделия.

Введем переменные x_i, имеющие следующий смысл:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если принимается решение} \\ & \text{о производстве изделий } i\text{-го типа,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что при всех $i \in I$ и t множества J_i^t являются одноэлементными. Тогда с использованием введенных обозначений простейшая задача размещения с частичным внешним финансированием (обозначим ее ПВР) записывается следующим образом: найти

$$\min_{x,v,y} \sum_{i \in I} \left\{ f_i x_i + c_i v_i + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} \right\} \tag{8}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{9}$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{10}$$

$$\sum_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i(v), \quad i \in I, \tag{11}$$

$$v_i \geqslant 0, \quad x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{12}$$

где $w(v)$ — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v): найти

$$\max_{w} \sum_{i \in I} \alpha_i w_i \tag{13}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} \beta_i w_i \leqslant B, \tag{14}$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i x_i, \quad i \in I. \tag{15}$$

Для задачи ПВР выполняется лемма 1. Учитывая вид функций g_i, можно усилить утверждение теоремы 1.

Теорема 3. *Решение задачи* ПВР *сводится к решению m простейших задач размещения производства.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что решение задачи ПВР эквивалентно решению m задач следующего вида (ПВР$_k$): найти

$$Z_k^* = \min_{x,y} \sum_{i \in I_k} \left\{ f_i x_i + \sum_{j \in J} (c_{ij} + c_i p_{ij}) y_{ij} \right\} + c_k B / \beta_k$$

при условиях

$$\sum_{i\in I_k} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant y_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J, \quad i \in I_k,$$

$$x_k = 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad j \in J, \quad i \in I_k.$$

Для каждого k рассмотрим задачу $\overline{\text{ПВР}}_k$, которая является простейшей задачей размещения производства: найти

$$\overline{Z}_k^* = \min_{x,y} \sum_{i\in I_{k+1}} \Big\{ \sum_{j\in J} \overline{c}_{ij} y_{ij} + f_i x_i \Big\}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I_{k+1}} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I_{k+1}, \quad j \in J,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I_{k+1}, \quad j \in J,$$

где $\overline{c}_{ij} = \min(c_{kj} + c_k p_{kj}, c_{ij} + c_i p_{ij})$ при $i \in I_{k+1}$, $j \in J$. Множество допустимых решений задачи ПВР$_k$ разобьем на два подмножества, одно из которых содержит единственное решение $x_k = 1$, $y_{kj} = 1$, $j \in J$, и оставшиеся переменные принимают нулевое значение. Учитывая вид ограничений задачи ПВР$_k$, получаем равенство

$$Z_k^* = \min \Big\{ \sum_{j\in J} (c_{kj} + c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^* \Big\} + f_k + c_k B/\beta_k.$$

Утверждение теоремы следует из того, что при любом k исходные данные задачи $\overline{\text{ПВР}}_k$ могут быть найдены за время, полиномиально ограниченное длиной входа задачи ПВР. Теорема 3 доказана.

Простейшая задача размещения является частным случаем задачи ПВР. Поэтому в общей постановке задача ПВР является NP-трудной в сильном смысле. Однако если ввести ограничения на класс матриц $C = (c_{ij} + c_i p_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$, то можно получить ее полиномиально разрешимые частные случаи [8].

Теорема 4. *Пусть матрица C удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) C — *связная* [2] *либо 2-связная* [1];

2) C — *квазивыпуклая либо квазивогнутая* [4];

3) C — *связная относительно дерева* [3].

Тогда двухуровневая простейшая задача размещения полиномиально разрешима.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что решение задачи ПВР эквивалентно решению m простейших задач размещения производства $\overline{\text{ПВР}}_k$. Пусть $\overline{C_k}$ — матрицы, соответствующие этим задачам, и $C_k = (c_{ij} + c_i p_{ij})$, $i \in I_k$, $j \in J$, $k \in I$. Элементы $\overline{c}_{ij}$ матрицы $\overline{C_k}$ задаются соотношением $\overline{c}_{ij} = \min(c_{kj} + c_k p_{kj}, c_{ij} + c_i p_{ij})$ при $i \in I_{k+1}$, $j \in J$. Поэтому из определений связности, 2-связности, квазивыпуклости и связности относительно дерева следует, что если матрица C обладает одним из этих свойств, то все подматрицы $\overline{C_k}$ обладают этим свойством. Поэтому в каждом из случаев 1–3 задача полиномиально разрешима. Теорема 4 доказана.

В задаче ПВР ограничения (11) заменим на ограничения следующего вида:

$$\max_{j \in J} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i, \quad i \in I.$$

Полученная задача сводится к решению m задач вида: найти

$$\min_{x,y} \sum_{i \in I_k} \left\{ f_i x_i + c_i \max_{j \in J} p_{ij} y_{ij} + \sum_{j \in J} c_{ij} y_{ij} \right\} + c_k B/\beta_k$$

при условиях

$$\sum_{i \in I_k} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$
$$x_i \geqslant y_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J, \quad i \in I_k,$$
$$x_k = 1,$$
$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad j \in J, \quad i \in I_k.$$

Теорема 5. *Пусть матрицы* (c_{ij}) *и* $(c_i p_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$, *являются соответственно связной и сильно связной* [2], *а величины* p_{ij} *не убывают с ростом* j *при любом* $i \in I$. *Тогда задача* ПВР *является полиномиально разрешимой.*

Доказательство. Из определения связности и сильной связности следует, что подматрицы (c_{ij}) и $(c_i p_{ij})$, $i \in I_k$, $j \in J$, также являются соответственно связной и сильно связной при $k \in I$. Тогда полиномиальная разрешимость задачи ПВР следует из полиномиальной разрешимости указанных выше задач [2]. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим задачу ПВР с дополнительным ограничением верхнего уровня

$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant M.$$

Утверждение теоремы 5 остается справедливым и в этом более общем случае.

Покажем, как с помощью жадного алгоритма для простейшей задачи размещения на минимум [11] можно построить приближенное решение задачи ПВР. Обозначим через $\overline{Z}_k(x, y)$ целевую функцию задачи $\overline{\text{ПВР}}_k$, через $\overline{Z}_k^s$ значение $\overline{Z}_k$ на жадном решении и через Z^s значение целевой функции задачи ПВР на приближенном решении. Тогда из [11] имеем следующую оценку для относительной погрешности жадного решения:

$$\overline{Z}_k^s / \overline{Z}_k^* \leqslant \ln n. \tag{16}$$

Алгоритм для приближенного решения задачи ПВР.

Шаг 1. Положить $k := 1$, $Z^s := \sum\limits_{j=1}^{n}(c_{mj} + c_m p_{mj}) + f_m + c_m B/\beta_m$.

Шаг 2. С помощью жадного алгоритма найти решение (x^k, y^k) задачи $\overline{\text{ПВР}}_k$.

Вычислить $\overline{Z}_k^s := \overline{Z}_k(x^k, y^k)$ и

$$Z_k^s := \min\left\{\sum_{j\in J}(c_{kj} + c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^s\right\} + f_k + c_k B/\beta_k.$$

Если $Z_k^s > Z^s$, то $Z^s := Z_k^s$.

Шаг 3. Положить $k := k + 1$. Если $k < m$, то вернуться на шаг 2.

Пусть $Z^* = \min\limits_{k\in I} Z_k^*$ — оптимальное значение целевой функции задачи ПВР и Z^s — ее приближенное решение.

Теорема 6. $Z^s/Z^* < \ln n$.

Доказательство. Пусть $Z^* = Z_k^*$. Допустим, что

$$Z_k^* = \sum_{j\in J}(c_{kj} + c_k p_{kj}) + f_k + c_k B/\beta_k.$$

Тогда на шаге 2 предложенного алгоритма выполняется равенство $Z_k^s = Z_k^*$. Поэтому $Z^s = Z^*$ и, следовательно, выполняется утверждение теоремы.

Предположим, что $Z_k^* = \overline{Z}_k^* + f_k + c_k B/\beta_k$. Очевидно, что

$$(\overline{Z}_k^s + f_k + c_k B/\beta_k)/(\overline{Z}_k^* + f_k + c_k B/\beta_k) \leqslant \overline{Z}_k^s/\overline{Z}_k^* < \ln n.$$

Так как $Z^* = Z_k^*$, то из неравенств $Z_k^s \leqslant \overline{Z}_k^s + f_k + c_k B/\beta_k$ и $Z^s \leqslant Z_k^s$ следует, что $Z^s/Z^* < \ln n$. Теорема 6 доказана.

Приближенное решение, полученное данным алгоритмом, может быть достаточно далеким от глобального оптимума. Однако его можно использовать в качестве начального решения в вероятностных методах локального поиска. Для многих NP-трудных задач локальный поиск позволяет находить допустимые решения, близкие к глобальному оптимуму [6].

4. Задачи на максимум

Рассмотрим максимизационный вариант задачи ВР: найти

$$\max_{x,v,y} \sum_{i\in I} \Big\{ \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij} - g_i(v_i) \Big\}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J,$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} \max_{j\in J_i^t} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i(v), \quad i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant M,$$

$$v_i \geqslant 0, x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J,$$

где $w(v)$ — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v): найти

$$\max_{w} \sum_{i\in I} \alpha_i w_i$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} \beta_i w_i \leqslant B,$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i, \quad i \in I.$$

В задачах на максимум величины c_{ij} обычно интерпретируются как доход, который получает поставщик в результате удовлетворения спроса j-го потребителя из i-го пункта производства. Если $M = 1$, то задача имеет m допустимых решений, среди которых легко найти оптимальное решение. Поэтому будем считать, что $M > 1$.

В задаче на максимум, как и в задаче ВР, существует оптимальное решение с одной ненулевой компонентой у вектора w. Следовательно, она сводится к решению m задач выбора ряда изделий на максимум. Однако более содержательные результаты удается получить для простейшей задачи размещения с частичным внешним финансированием на максимум (обозначим ее ЗР): найти

$$\max_{x,v,y} \sum_{i\in I} \Big\{ \sum_{j\in J} c_{ij} y_{ij} - c_i v_i - f_i x_i \Big\} \tag{17}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} y_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{18}$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{19}$$

$$\sum_{j\in J} p_{ij} y_{ij} \leqslant v_i - w_i(v), \quad i \in I, \tag{20}$$

$$\sum_{i\in I} x_i \leqslant M, \tag{21}$$

$$v_i \geqslant 0, x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \tag{22}$$

где $w(v)$ — оптимальное решение линейной задачи о ранце ЛР(v): найти

$$\max_{w} \sum_{i\in I} \alpha_i w_i \tag{23}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} \beta_i w_i \leqslant B, \tag{24}$$

$$0 \leqslant w_i \leqslant v_i x_i, \quad i \in I. \tag{25}$$

Так как задача имеет оптимальное решение с единственной ненулевой компонентой w_k^*, то ее решение сводится к решению m задач следующего вида (ЗР$_k$): найти

$$Z_k^* = \max_{x,y} \sum_{i\in I_k} \left\{ \sum_{j\in J} (c_{ij} - c_i p_{ij}) y_{ij} - f_i x_i \right\} - c_k B/\beta_k$$

при условиях

$$\sum_{i\in I_k} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I_k, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i\in I_k} x_i \leqslant M,$$

$$x_k = 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I_k, \quad j \in J,$$

каждая из которых является простейшей задачей размещения на максимум [9] с дополнительным ограничением $x_k = 1$. Так как $\alpha_1/\beta_1 > \alpha_2/\beta_2 > \cdots > \alpha_m/\beta_m > 0$, то для каждого $k \in I$ имеем $I_k = \{k, k+1, \dots, m\}$. Значение целевой функции задачи ЗР$_k$ на допустимом решении (x, y) обозначим через $Z_k(x, y)$.

Используя данное сведéние, для задачи ЗР построим приближенное решение с гарантированной оценкой точности. Для оценки относительной погрешности алгоритмов будем использовать величину $\varepsilon = (Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l)$, где Z^* — оптимальное значение целевой функции задачи, Z^g — значение целевой функции на приближенном решении, Z^l — минимальное значение целевой функции на множестве допустимых решений либо нижняя оценка для этой величины.

Покажем, как с помощью жадного алгоритма для простейшей задачи размещения на максимум [10] можно построить приближенное решение задачи ЗР.

Рассмотрим задачу $\overline{\text{ЗР}}_k$: найти

$$\overline{Z}_k^* = \max_{x,y} \sum_{i \in I_{k+1}} \left\{ \sum_{j \in J} \overline{c}_{ij} y_{ij} - f_i x_i \right\}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I_{k+1}} y_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant y_{ij}, \quad i \in I_{k+1}, \quad j \in J,$$

$$\sum_{i \in I_{k+1}} x_i \leqslant M - 1,$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I_{k+1}, \quad j \in J,$$

где $\overline{c}_{ij} = \max(c_{kj} - c_k p_{kj}, c_{ij} - c_i p_{ij})$ при $i \in I_{k+1}$, $j \in J$. Обозначим через $\overline{Z}_k(x, y)$ целевую функцию этой задачи, через $\overline{Z}_k^g$ значение $\overline{Z}_k$ на жадном решении, через $\overline{Z}_k^l$ нижнюю оценку для минимального значения целевой функции задачи $\overline{\text{ЗР}}_k$. Тогда из [10] получим следующую оценку для относительной погрешности жадного решения:

$$(\overline{Z}_k^* - \overline{Z}_k^g)/(\overline{Z}_k^* - \overline{Z}_k^l) \leqslant 1/e. \tag{26}$$

Следующее равенство обосновывается так же, как и соответствующее соотношение для задач на минимум в теореме 3

$$Z_k^* = \max\left\{ \sum_{j \in J} (c_{kj} - c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^* \right\} - f_k - c_k B/\beta_k. \tag{27}$$

Алгоритм для приближенного решения задачи ЗР.

Шаг 1. Положить $k := 1$, $Z^g := \sum\limits_{j=1}^{n} (c_{mj} - c_m p_{mj}) - f_m - c_m B/\beta_m$.

Шаг 2. С помощью жадного алгоритма найти решение (x^k, y^k) задачи $\overline{\text{ЗР}}_k$.

Вычислить $\overline{Z}_k^g := \overline{Z}_k(x^k, y^k)$ и $Z_k^g := \max\Big\{\sum\limits_{j\in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}), \overline{Z}_k^g\Big\} - f_k - c_k B/\beta_k$.

Если $Z_k^g > Z^g$, то $Z^g := Z_k^g$.

Шаг 3. Положить $k := k+1$. Если $k < m$, то вернуться на шаг 2.

Определим нижнюю оценку для минимального значения целевой функции задачи ЗР$_k$:

$$Z_k^l = \sum_{j\in J} \min_{i\in I_k}(c_{ij} - c_i p_{ij}) - M \max_{i\in I_k} f_i - c_k B/\beta_k,$$

и положим $Z^l = \min\limits_{k\in I} Z_k^l$. Пусть $Z^* = \max\limits_{k\in I} Z_k^*$ — оптимальное значение целевой функции задачи ЗР и Z^g — приближенное решение, полученное с помощью жадного алгоритма.

Теорема 7. $(Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l) \leqslant 1/e$.

Доказательство. Пусть $Z^* = Z_k^*$. Допустим, что $Z_k^* = \sum\limits_{j\in J}(c_{kj} - c_k p_{kj}) - f_k - c_k B/\beta_k$. Тогда из равенства (27) следует, что на шаге 2 приближенного алгоритма выполняется равенство $Z_k^g = Z_k^*$. Поэтому $Z^g = Z^*$ и, следовательно, выполняется утверждение теоремы.

Предположим, что $Z_k^* = \overline{Z}_k^* - f_k - c_k B/\beta_k$. Из определения величин $\overline{c}_{ij}$ следует, что

$$Z_k^l \leqslant \sum_{j\in J} \min_{i\in I_{k+1}} \overline{c}_{ij} - M \max_{i\in I_k} f_i - c_k B/\beta_k.$$

Учитывая соотношения

$$\begin{aligned} M \max_{i\in I_k} f_i = (M-1)\max\Big\{\max_{i\in I_k\setminus k} f_i, f_k\Big\} + \max\Big\{\max_{i\in I_k\setminus k} f_i, f_k\Big\} \\ \geqslant (M-1)\max_{i\in I_k\setminus k} f_i + f_k, \end{aligned}$$

получаем неравенство

$$Z_k^l \leqslant \overline{Z}_k^l - f_k - c_k B/\beta_k,$$

где

$$\overline{Z}_k^l = \sum_{j\in J} \min_{i\in I_{k+1}} \overline{c}_{ij} - (M-1)\max_{i\in I_{k+1}} f_i$$

— нижняя оценка для минимального значения целевой функции задачи $\overline{\text{ЗР}}_k$.

Так как

$$Z_k^g \geqslant \overline{Z}_k^g - f_k - c_k B/\beta_k,$$

то из (26) получаем следующую оценку для величины Z_k^g:

$$(Z_k^* - Z_k^g)/(Z_k^* - Z_k^l) \leqslant 1/e.$$

Из условия $Z^* = Z_k^*$ и определения Z^l следует, что

$$(Z^* - Z_k^g)/(Z^* - Z^l) \leqslant 1/e.$$

Учитывая, что $Z^g \geqslant Z_k^g$, получаем

$$(Z^* - Z^g)/(Z^* - Z^l) \leqslant 1/e.$$

Теорема 7 доказана.

5. Вырожденный случай

Предположим, что величины α_i/β_i, $i \in I$, не являются попарно различными и множество I упорядочено так, что $\alpha_1/\beta_1 \geqslant \alpha_2/\beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_m/\beta_m > 0$. Разобьем множество I на непересекающиеся подмножества S_l, $l = 1, 2, \ldots, T$, такие, что величины α_i/β_i совпадают друг с другом, если они в одном множестве, и отличаются друг от друга в противном случае.

Пусть (v_i^*, y_{ij}^*, w_i^*) — произвольное оптимальное решение задачи ВР. Тогда существует такое k, что

$$\sum_{i \in \cup_{l=1}^k S_l} \beta_i w_i^* = B,\ w_i^* = v_i^* \text{ при } i \in \bigcup_{l=1}^{k-1} S_l \text{ и } w_i^* \leqslant v_i^* \text{ при } i \in S_k.$$

Так как в общем случае множество S_k содержит несколько элементов, то задача ЛР(v^*) может иметь бесконечное число оптимальных решений, удовлетворяющих приведенным соотношениям. Как и в невырожденном случае, среди оптимальных решений задачи ВР найдется решение с одной ненулевой компонентой у вектора w^*. Так как доказательства теорем 1–7 основывались на этом свойстве оптимальных решений и не использовалась единственность оптимальных решений задачи ЛР(v^*), то упомянутые результаты и в вырожденном случае имеют место.

Тем не менее наличие нескольких оптимальных решений на нижнем уровне существенно меняет свойства задачи ВР. Существует два противоположных взгляда на такие задачи. В [14] предлагается доопределить задачу так, чтобы получить единственное оптимальное решение на нижнем уровне. В [7, 12], наоборот, предлагается несколько уточнений понятия наилучшего решения и для некоторых из них приводятся алгоритмы построения. В вырожденном случае верхний уровень может вкладывать разный смысл в понятие наилучшего решения. Он может

назвать оптимальным любое допустимое решение, дающее шанс получить минимальные затраты с риском не получить ничего или остаться с затратами значительно больше ожидаемых.

Другой подход состоит в том, чтобы считать наилучшим такое допустимое решение, которое дает гарантированно минимальные затраты при любом выборе оптимального решения на нижнем уровне. Следуя [7], введем понятие гарантированного решения. Допустимое решение (v, y, w) задачи ВР назовем гарантированным, если для любого оптимального решения $\overline{w}$ задачи ЛР(v) вектор $(v, y, \overline{w})$ удовлетворяет ограничениям (2)–(4) и значение целевой функции (1) на этом векторе не больше ее значения на решении (v, y, w). Тогда наилучшим гарантированным решением является любое гарантированное решение, на котором достигается минимум целевой функции среди всех гарантированных решений. Ниже приводится пример задачи, в котором любое оптимальное решение не является гарантированным.

Пусть в задаче (8)–(15) $I = J = \{1, 2, 3\}$, $f_i = 10$, $c_i = 1$, $c_{ij} = 0$, $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 1$, $B = 1000$,

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 100 & 1 & 100 \\ 100 & 100 & 1 \end{pmatrix}$$

при $i \in I$, $j \in J$. Так как $\alpha_i/\beta_i = 1$, то $T = 1$ и $S_1 = I$. Прямыми вычислениями нетрудно показать, что для всех оптимальных решений (x^*, y^*, v^*, w^*) задачи выполняется равенство $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 1, 1)$ и оптимальное значение целевой функции равно 1033. Рассмотрим одно из таких решений:

$$y_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad v_i^* = \begin{cases} 1001, & \text{если } i = 1, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$w_i^* = \begin{cases} 1000, & \text{если } i = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вектор w^* — оптимальное решение задачи ЛП(v^*). Вектор

$$\overline{w}_i = \begin{cases} 998, & \text{если } i = 1, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

также является оптимальным решением этой задачи. Несложно проверить, что для вектора $(x^*, y^*, v^*, \overline{w})$ нарушаются ограничения (11) и, следовательно, оптимальное решение (x^*, y^*, v^*, w^*) задачи ВР не является гарантированным решением.

Таким образом, вопрос существования алгоритмов построения наилучших гарантированных решений для исследуемого класса задач остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. Вып. 36. М.: Наука, 1979. С. 225–246.
2. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.
3. **Гимади Э. Х.** Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 23. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. С. 12–23.
4. **Гимади Э. Х.** Задача стандартизации с данными произвольного знака и связными, квазивыпуклыми и почти квазивыпуклыми матрицами // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 27. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 3–11.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. **Кочетов Ю. А.** Вероятностные методы локального поиска для задач дискретной оптимизации // Дискретная математика и ее приложения: Сб. лекций. Вып. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 84–117.
7. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4. № 2. С. 23–33.
8. **Плясунов А. В.** Об одном подходе к решению задач двухуровневого программирования // Методы оптимизации и их приложения: Тр. XII Байкальской междунар. конф. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2001. С. 227–231.
9. **Cornuejols G., Fisher M. L., Nemhauser G. L.** Location of bank accounts to optimize float: an analytic study of exact and approximate algorithms // Management Sci. 1977. V. 23, N 8. P. 789–810.
10. **Cornuejols G., Fisher M. L., Nemhauser G. L.** On the uncapacitated location problem // Studies in integer programming. V. 1. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 163–177. (Annals of Discrete Math.)
11. **Hochbaum D. S.** Heuristics for the fixed cost median problem // Math. Programming. 1982. V. 22, N 1. P. 148–162.
12. **Ishizuka Y., Aiyoshi E.** Doubly penalty method for bilevel programming problem // Ann. Oper. Res. 1992. V. 34, N 1–4. P. 73–88.
13. **Krarup J., Pruzan P. M.** The simple plant location problem: survey and synthesis // European J. Oper. Res. 1983. V. 12, N 1. P. 36–81.

14. **Savard G., Gauvin J.** The steepest descent direction for the nonlinear bilevel programming problem // Oper. Res. Lett. 1994. V. 15, N 5. P. 265–272.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: apljas@math.nsc.ru,
jkochet@math.nsc.ru

Статья поступила
8 мая 2002 г.,
переработанный вариант —
1 ноября 2002 г.