ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2002. Серия 2. Том 9, № 2, 97–114

УДК 519.854

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ В ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*)

Н. Н. Кузюрин

Приведен краткий обзор некоторых результатов по вероятностным приближенным алгоритмам для задач дискретной оптимизации. Ввиду большого количества результатов для задач такого рода рассмотрены только несколько классических задач.

Введение

В последнее десятилетие роль вероятностных методов в дискретной математике и математической кибернетике заметно возросла. Это проявилось, в частности, и в бурном развитии вероятностных алгоритмов, т. е. алгоритмов, использующих в ходе вычислений случайные биты или, как говорят, результат подбрасывания монеты.

Вероятностные алгоритмы с давних пор использовались для вычисления объемов (методы Монте Карло). Первые результаты, указывающие на преимущества вероятностных алгоритмов перед детерминированными, представлены в [18]. Затем возможности вероятностных алгоритмов были продемонстрированы в [44, 36], где были предложены полиномиальные вероятностные алгоритмы распознавания простоты числа, заданного в двоичной системе. В течение долгого времени проблема построения для этой задачи детерминированного полиномиального алгоритма была открытой. Только совсем недавно ее удалось решить, построив соответствующий детерминированный полиномиальный алгоритм (M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena. Primes is in P. August 6, 2002. См. http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html).

Еще одно яркое свидетельство силы вероятностных алгоритмов получено в [14], где предложен вероятностный полиномиальный алгоритм вычисления объема выпуклого тела в n-мерном евклидовом пространстве с любой наперед заданной точностью. Известно, что в этой задаче

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00713).

никакой полиномиальный детерминированный алгоритм не может гарантировать точность лучше $c(n/\log n)^n$ [33].

В настоящее время можно констатировать, что вероятностные алгоритмы получили столь широкое распространение, что для многих задач вероятностные алгоритмы являются либо наиболее простыми, либо наиболее быстрым, либо и то и другое. Если говорить о задачах дискретной оптимизации, то в этой области разработка приближенных алгоритмов (особенно для NP-полных задач) является одним из магистральных направлений развития. Интересно, что и в развитии этого направления вероятностные алгоритмы играют весьма заметную (если не решающую) роль.

Цель настоящей статьи дать краткий обзор некоторых результатов по вероятностным приближенным алгоритмам для задач дискретной оптимизации. Ввиду большого количества результатов для задач такого рода мы ограничиваемся только несколькими классическими задачами. Таким образом, обзор не претендует на полноту и является введением в это бурно развивающееся направление.

Необходимо отметить, что во многих случаях прогресс достигается благодаря следующей общей схеме:

1) рассматриваемая задача дискретной оптимизации переформулируется в виде целочисленной программы (линейной или нелинейной);

2) находится решение ее линейной (или нелинейной) релаксации;

3) используется вероятностное округление полученного нецелочисленного решения до целочисленного.

Для определенности рассмотрим задачу на максимум и поясним, что мы понимаем под мультипликативной точностью вероятностного алгоритма (для задач на минимум определения аналогичны).

Определение. *Мультипликативной точностью* вероятностного алгоритма A называется инфимум (по всем входам I) величины $\mathbf{E}f_A(I)/f_0(I)$, где $f_A(I)$ — стоимость решения, полученного алгоритмом A, $f_0(I)$ — стоимость оптимального решения, $\mathbf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X. Вероятностный алгоритм будем называть D-приближенным, если его мультипликативная точность равна D.

Приближенной полиномиальной схемой (PTAS) для оптимизационной задачи (на максимум) называется алгоритм, который при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ является $(1-\varepsilon)$-приближенным алгоритмом, время работы которого ограничено полиномом от длины входа задачи.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 для классической задачи MAX SAT показано, что дают различные формы вероятностного округления. В разделе 2 тот же вопрос рассматривается для различных классов задач целочисленного линейного программирования

(ЦЛП). В разделах 3 и 4 соответственно кратко рассматриваются задача о максимальном разрезе (MAX CUT) и задача коммивояжера. Последний раздел посвящен проблеме дерандомизации вероятностных алгоритмов.

1. MAX SAT

Рассмотрим классическую задачу MAX SAT: для заданных m скобок (дизъюнкций) конъюнктивной нормальной формы (кнф), зависящей от n булевых переменных, найти набор значений переменных, максимизирующих число выполненных скобок. Таким образом, вход задачи — это набор булевых скобок C, где каждая скобка является дизъюнкцией литералов, выбранных из множества переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Литерал — это переменная x или ее отрицание $\overline{x}$. В общем случае каждой скобке $C_j \in C$ приписан неотрицательный вес w_j.

Задача MAX SAT является NP-трудной. Однако был известен простой вероятностный алгоритм, показывающий, что для любых m скобок существуют значения переменных, при которых выполнено не менее $m/2$ скобок [27, 33].

В этом вероятностном алгоритме каждой переменной приписываются значения 0 или 1 независимо и равновероятно. Пусть $Z_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, если i-я скобка выполнена, и $Z_i = 0$ в противном случае. Для каждой дизъюнкции (скобки) с k литералами вероятность того, что эта дизъюнкция не равна 1 при случайном приписывании значений переменным, равна 2^{-k}, поскольку это событие имеет место, когда значение каждого литерала в дизъюнкции равно 0, а значения разным переменным приписываются независимо. Значит, вероятность того, что скобка равна 1, составляет $1-2^{-k} \geqslant 1/2$ и математическое ожидание $\mathbf{E}Z_i \geqslant 1/2$. Отсюда следует, что математическое ожидание числа выполненных скобок (т. е. равных 1) равно $\sum\limits_{i=1}^{m} \mathbf{E}Z_i \geqslant m/2$.

Таким образом, описанный простой вероятностный алгоритм дает точность 1/2 для MAX SAT. Несколько улучшений, основанных на вероятностных округлениях с вероятностями, отличными от 1/2, приведены ниже. В [32] предложен $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$-приближенный алгоритм, в [31] — $\frac{2}{3}$-приближенный вероятностный алгоритм, в [20] — вероятностный алгоритм, гарантирующий точность 3/4 для этой задачи.

Последний алгоритм достаточно прост, и мы опишем его идею. Он использует так называемое вероятностное округление решения линейной релаксации задачи ЦЛП, соответствующей задаче MAX SAT.

Для этого сначала MAX SAT переформулируется в задачу ЦЛП. Каждой скобке (элементарной дизъюнкции) C_j ставится в соответствие

булева переменная $z_j \in \{0,1\}$, которая равна 1, если скобка C_j выполнена, каждой входной переменной x_i ставится в соответствие индикаторная переменная y_i, которая равна 1, если $x_i = 1$, и равна 0 в противном случае. Обозначим через C_j^+ множество индексов переменных в скобке C_j, которые входят в нее без отрицания, а через C_j^- множество индексов переменных, которые входят в скобку с отрицанием.

Тогда MAX SAT допускает следующую формулировку в виде задачи ЦЛП: найти максимум функции

$$\sum_{j=1}^{m} z_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i\in C_j^+} y_i + \sum_{i\in C_j^-} (1-y_i) \geqslant z_j \text{ при любом } j,$$
$$y_i, \quad z_j \in \{0,1\} \text{ при любых } i,j.$$

Пусть y_i^*, z_j^* — решение линейной релаксации (1). Ясно, что $\sum\limits_{j=1}^{m} z_j^*$ является верхней оценкой числа выполненных скобок для данной кнф.

Рассмотрим вероятностное округление, более интересное, чем простое округление каждой переменной в 1 и 0 с одинаковыми вероятностями. Пусть каждая переменная y_i независимо принимает значение 1 с вероятностью y_i^* и 0 с вероятностью $1 - y_i^*$.

При целом k положим $\beta_k = 1 - (1 - 1/k)^k$.

Лемма 1 [20]. *Пусть в скобке C_j имеется k литералов. Вероятность того, что она выполнена при вероятностном округлении, не меньше $\beta_k z_j^*$.*

Используя тот факт, что $\beta_k \geqslant 1 - 1/e$ при всех положительных целых k, в [20] доказана следующая

Теорема 1. *Для произвольного входа задачи* MAX SAT (*произвольной кнф*) *математическое ожидание числа скобок, выполненных при вероятностном округлении решения линейной релаксации, не меньше* $(1 - 1/e)$ *от максимально возможного числа выполненных скобок.*

Простая, но общая идея позволяет получить приближенный вероятностный алгоритм, имеющий точность 3/4. Для этого на данном входе запускаются два алгоритма и выбирается лучшее решение. В качестве двух алгоритмов рассматриваются два алгоритма, описанные выше:

1) округление каждой переменной независимо в 0 или 1 с вероятностью 1/2;
2) вероятностное округление решения линейной релаксации соответствующей целочисленной программы.

Пусть n_1 обозначает математическое ожидание числа выполненных скобок для первого алгоритма и n_2 — математическое ожидание числа выполненных скобок для второго алгоритма. В [20] показано, что всегда справедливо следующее неравенство:

$$\max\{n_1, n_2\} \geqslant \frac{3}{4} \sum_j z_j^*,$$

т. е. алгоритм, основанный на выборе лучшего из двух решений, является 3/4-приближенным вероятностным алгоритмом для MAX SAT.

Кроме такого подхода с выбором лучшего из двух результатов в [20] предложен и прямой метод вероятностного округления, гарантирующий точность 3/4. Для этого в качестве вероятностей используются не компоненты вектора решения линейной релаксации (1), а некоторая нелинейная функция от них. Например, выберем функцию $g(y)$ такую, что $1 - 4^{-y} \leqslant g(y) \leqslant 4^{y-1}$ для $y \in [0, 1]$. Затем независимо каждое x_i положим равным 1 с вероятностью $g(y_i^*)$ и 0 с вероятностью $1 - g(y_i^*)$. Такой вероятностный алгоритм назван в [20] Nonlinear-Round. Там же доказана следующая

Теорема 2. *Алгоритм Nonlinear-Round является* 3/4*-приближенным вероятностным алгоритмом для* MAX SAT.

Известны и другие функции, которые дают точность 3/4.

Дальнейшие улучшения для MAX SAT получены в [8, 9, 21]. Основные идеи: использование вероятностных округлений решений нелинейных релаксаций (semidefinite programming) и рассмотрение комбинаций нескольких алгоритмов с различными вероятностями. Скажем, для трех алгоритмов A1, A2 и A3 подбираются значения вероятностей p_1, p_2, p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$) и рассматривается вероятностный алгоритм, который заключается в запуске алгоритма A1 с вероятностью p_1, алгоритма A2 с вероятностью p_2 и, наконец, алгоритма A3 с вероятностью p_3. На этом пути в [9] была достигнута точность 0.7846, т. е. предложен 0.7846-приближенный вероятностный алгоритм для MAX SAT.

В [21] было показано, что использование semidefinite programming дает 0.878-приближенный алгоритм для задачи MAX 2SAT (входом этой задачи являются кнф, имеющие в каждой скобке не более двух литералов). Аналогичный подход в [28] для задачи MAX 3SAT (в каждой скобке не более трех литералов) дает 7/8-приближенный вероятностный алгоритм. Неизвестно, можно ли эти результаты распространить на общий случай задачи MAX SAT. Известно, однако, что если P≠NP, то в задаче MAX SAT с помощью полиномиального алгоритма нельзя достичь точности лучшей 7/8 [24].

Отметим, что для задачи MAX SAT с ограничением, что ровно p булевых переменных равны 1, а остальные — нулю, наилучший результат получен в [49], где представлен $(1-e^{-1})$-приближенный полиномиальный алгоритм.

2. Целочисленные программы

Как следует из предыдущего раздела, вероятностное округление решения линейной релаксации задачи ЦЛП, соответствующей исходной кнф в задаче MAX SAT, позволяет получать лучшие оценки точности по сравнению с обычным округлением. А что такое вероятностное округление может дать для задач ЦЛП общего вида?

Для нахождения приближенных решений различных классов задач ЦЛП в [38] предложена идея вероятностного округления решений их линейных релаксаций. В [37] этот подход использован для задач типа упаковки, в [2, 11] — для задач ЦЛП типа покрытия для получения условий близости целочисленных оптимумов к оптимумам линейной релаксации.

Напомним, что задачей ЦЛП типа покрытия называется задача нахождения минимума функции

$$f(x) = \mathbf{cx} \tag{2}$$

при условиях

$$A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant 0 - \text{ целые},$$

а задачей ЦЛП типа упаковки называется задача нахождения максимума функции

$$f(x) = \mathbf{cx} \tag{3}$$

при условиях

$$A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant 0 - \text{ целые}.$$

Эти задачи отличаются от общей постановки задачи ЦЛП тем, что в их исходных данных отсутствуют отрицательные элементы и все неравенства «направлены в одну сторону». Их линейными релаксациями называются те же задачи без ограничения целочисленности переменных. Линейные релаксации задач (2)–(3) являются классическими задачами линейного программирования, для которых известны полиномиальные алгоритмы решения [29, 30].

Часто рассматривают также задачи (2)–(3) с переменными, принимающими значения 0 и 1. В виде (2)–(3) формулируются многие известные трудные комбинаторные задачи, в частности, задачи о покрытии и упаковке, в которых $\mathbf{c} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)$ и $a_{ij} \in \{0, 1\}$ при всех i, j.

Как уже отмечалось, идея аппроксимации различных классов целочисленных линейных программ путем *вероятностного округления* была предложена в [38]. Идея состоит в том, чтобы для положительного вещественного числа v рассматривать его дробную часть как вероятность, округляя v до $\lfloor v \rfloor + 1$ с вероятностью $v - \lfloor v \rfloor$ и округляя v до $\lfloor v \rfloor$ с вероятностью $1 - v + \lfloor v \rfloor$. Важным свойством такого округления является то, что математическое ожидание при этом равно v.

Как это можно использовать для нахождения приближенных решений задач (2)–(3)? Рассмотрим, например, задачу (3). Пусть найдено решение ее линейной релаксации $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и значение оптимума этой линейной программы есть q. Положим $x_i = \frac{x_i^*}{k}$, где $k > 1$ — некоторый параметр, значение которого выбирается позднее. Определим случайный вектор $\mathbf{z} \in \mathbf{Z}^n$ следующим образом. Независимо для каждого i положим $z_i = \lfloor x_i \rfloor + 1$ с вероятностью $p_i = x_i - \lfloor x_i \rfloor$ и $z_i = \lfloor x_i \rfloor$ с вероятностью $1 - p_i = 1 - (x_i - \lfloor x_i \rfloor)$.

Отметим, что $\mathbf{E}[z_i] = x_i$. Следовательно, для i-го неравенства в (3) и для целевой функции справедливы соотношения

$$\mathbf{E}[(\mathbf{Az})_i] = (\mathbf{Ax})_i \leqslant \frac{b_i}{k},$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{cz}] = \frac{q}{k}.$$

Чтобы показать, что все ограничения в (3) выполнены и $\mathbf{cz}$ не сильно отличается от q, определим событие E_i как $(\mathbf{Az})_i > b_i$, и пусть для некоторого $d > 1$ событие E_{m+1} заключается в том, что $\mathbf{cz} < q/(kd)$. Тогда $\mathbf{z}$ является kd-приближенным решением (3), если произошло событие

$$\bigwedge_{i=1}^{m+1} \overline{E}_i.$$

Используя неравенство

$$\mathbf{P}\Big(\bigvee_{i=1}^{m+1} E_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}\{E_i\},$$

подбираем значения k и $d > 1$ такими, чтобы для функционала $F = \sum\limits_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}\{E_i\}$ выполнялось неравенство $F < 1$.

Для этого используются неравенства для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин.

Лемма 2 [37, 47]. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины, причем x_i принимает два значения 0 и a_i, $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, с вероятностями*

$$\mathbf{P}\{x_i = a_i\} = p_i, \quad \mathbf{P}\{x_i = 0\} = 1 - p_i.$$

Тогда для $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ *и* $\mathbf{E}X = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_i$ *выполнены следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}\{X - \mathbf{E}X > \delta \mathbf{E}X\} \leqslant \exp\{(\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta))\mathbf{E}X\}$$

для любого $\delta > 0$,

$$\mathbf{P}\{X - \mathbf{E}X < -\delta \mathbf{E}X\} \leqslant \exp\{-(\delta^2/2)\mathbf{E}X\}$$

при $0 \leqslant \delta \leqslant 1$.

Аналогичный подход дает приближенное решение задачи (2).

Стандартный анализ описанного процесса вероятностного округления и подбор параметров k и d гарантирует нахождение целочисленных решений со значением целевой функции, отличающихся от оптимума линейной релаксации не более чем в $O(m^{1/B})$ раз для задач типа упаковки и не более чем в $1 + O(\max\{(\ln m)/B, \sqrt{(\ln m)/B}\})$ раз для задач типа покрытия. В обоих случаях $B = \min\limits_i b_i$. Особенность этих аппроксимаций в том, что оба значения стремятся к 1 при $B/(\ln m) \to \infty$. В [12] показано, что эти оценки для задач ЦЛП типа упаковки существенно неулучшаемы.

В [47] метод вероятностного округления при аппроксимации целочисленных программ типа покрытия и упаковки получил дальнейшее развитие. Вместо оценки

$$\mathbf{P}\Big(\bigvee_{i=1}^{m+1} E_j\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}(E_i)$$

в [47] использовано так называемое FKG неравенство, которое для задач ЦЛП типа покрытия и упаковки влечет оценку

$$\mathbf{P}\Big(\bigwedge_{i=1}^{m+1} \overline{E}_i\Big) \geqslant \prod_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}(\overline{E}_i).$$

С использованием вместо описанного выше функционала F функционала

$$F = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - \mathbf{P}\{E_i\}) + \mathbf{P}\{E_{m+1}\}$$

для задач ЦЛП типа покрытия в [47] доказано существование целочисленных решений, отличающихся от оптимума линейной релаксации не более чем в

$$1 + O\Big(\max\Big\{(\ln(mB/q))/B, \sqrt{(\ln(mB/q))/B}\Big\}\Big)$$

раз, где, как и ранее, $B = \min\limits_i b_i$.

Интересно распространить технику вероятностного округления на общие классы целочисленных программ. В частности, в [11, 39] поставлен вопрос о нахождении классов целочисленных программ, для которых справедливы аппроксимации, подобные тем, что имеются для задач ЦЛП типа покрытия. В [10] сделан шаг в этом направлении: для класса программ, включающего задачи ЦЛП типа покрытия, предложен вероятностный алгоритм и получена верхняя оценка точности.

Ключевой момент в [10] (наряду со стандартными оценками вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин) — это рассмотрение вспомогательной нелинейной программы и некоторого параметра D^*, вычислимого в полиномиальное время, который (в некотором смысле) характеризует баланс между положительными и отрицательными элементами в матрице A. Полученные в [10] оценки точности зависят от D^*, причем для задач ЦЛП типа покрытия соответствуют известным (для таких программ $D^* = 1$). Кроме того, они дают явные достаточные условия для близости мультипликативной точности к 1.

Вероятностное округление применяется и в нелинейных целочисленных программах. В [7] на основе этого метода предложены вероятностные приближенные алгоритмы для так называемых гладких нелинейных целочисленных программ. В частности, для квадратичных программ доказано следующее утверждение.

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n с коэффициентами $a_{ij} = O(1)$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$, $b_j = O(n)$ и пусть $\mathbf{Opt}$ — значение оптимума следующей квадратичной целочисленной программы: найти

$$\max \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} \tag{4}$$

при

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \{0,1\}^n.$$

Тогда существует вероятностный алгоритм, который для произвольного $\varepsilon > 0$ за время $n^{O(1/\varepsilon^2)}$ находит вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ из нулей и единиц такой, что

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{y} + \mathbf{b}^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{Opt} - \varepsilon n^2. \tag{5}$$

Этот результат используется при построении PTAS для задачи MAX CUT с плотным входом (в n-вершинном графе должно быть $\Omega(n^2)$ ребер — см. следующий раздел).

Хотя в [15] доказано, что для любого фиксированного $\delta > 0$ не существует полиномиального $(1-\delta)\ln m$-приближенного алгоритма для задачи о покрытии (а значит, и для задач ЦЛП типа покрытия), если не выполнено включение $\mathbf{NP} \subseteq \mathrm{DTIME}[n^{O(\log\log n)}]$, тем не менее для задач о покрытии специального вида существуют вероятностные процедуры,

гарантирующие лучшие приближения. Это так называемые асимптотически хорошие покрытия и упаковки, существование которых в терминах целочисленных программ означает совпадение асимптотики оптимума соответствующей задачи ЦЛП и оптимума ее линейной релаксации (с ростом числа переменных).

Существование таких покрытий (и упаковок) впервые доказано в [41] с помощью вероятностной процедуры, названной впоследствии Rödl nibble. Идея этого вероятностного алгоритма состоит в построении хорошего решения поэтапно, выборе на каждом этапе случайного подмножества и отбрасывании всех подмножеств, которые пересекаются с уже выбранными. Этот алгоритм был впоследствии упрощен в [46, 42], где было показано, что так называемый жадный вероятностный алгоритм, заключающийся в предварительном случайном упорядочении подмножеств и выборе на каждом шаге первого в этом порядке подмножества, не пересекающегося с уже выбранными подмножествами, обеспечивает нахождение асимптотически хороших решений.

Интересный класс целочисленных программ соответствует известной задаче о размещении предприятий без ограничений на объемы производства UFLP (uncapacitated facility location problem), которая записывается следующим образом в виде линейной программы: найти минимум функции

$$\sum_{i\in F}\sum_{j\in D} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in F} f_i y_i$$

при условиях

$$\begin{gathered}\sum_{i\in F} x_{ij} = 1, \quad j\in D,\\ x_{ij}\leqslant y_i, \quad i\in F, \quad j\in D,\\ x_{ij}\geqslant 0, \quad i\in F, \quad j\in D,\\ y_i\in\{0,1\} \quad i\in F.\end{gathered}$$

Для общего случая задачи (c не обязательно удовлетворяет неравенству треугольника) в [25] предложен $(1+\ln n)$-приближенный алгоритм. Известно также, что рассматриваемая задача по крайней мере так же трудна для аппроксимации, как и задача о покрытии. Учитывая известный результат [15] о том, что существование полиномиального $(1-\delta)\ln n$-приближенного алгоритма для задачи о покрытии влечет $\mathrm{NP}\subseteq \mathrm{DTIME}(n^{\log\log n})$, задача UFLP в общем случае не имеет приближенного алгоритма с точностью лучше логарифмической.

Однако гораздо больше интересных результатов получено для случая, когда c удовлетворяет неравенству треугольника (т. е. для метрической версии задачи). В работе [22] доказано, что существование

полиномиального 1.463-приближенного алгоритма для метрической задачи UFLP влечет включение NP $\subseteq$ DTIME($n^{\log\log n}$). С другой стороны, в [43] предложен полиномиальный 3.16-приближенный алгоритм для метрической задачи, что породило несколько статей, постепенно улучшающих качество аппроксимации. Упомянем лишь некоторые из них: в [22] получен 2.408-приближенный алгоритм, в [26] — 1.61-приближенный алгоритм, наконец, в [50] — 1.528-приближенный алгоритм для этой задачи. В последней работе использована оригинальная техника детерминированного округления решений релаксаций исходной задачи, разработанная в [4]. Отметим, что для варианта задачи UFLP на максимум наилучший результат получен недавно в [5], где предложен 0.828-приближенный алгоритм.

3. MAX CUT

Известная задача MAX CUT заключается в нахождении разбиения вершин (возможно взвешенного) графа на два множества (2-разбиения), максимизирующего число ребер (или сумму весов ребер) с концами в разных частях разбиения. Эта задача NP-трудна, но давно известен простой 0.5-приближенный алгоритм [33].

Затем вероятностный алгоритм с наилучшей известной мультипликативной точностью 0.878 был предложен в [21]. Он основан на использовании новой идеи вероятностных округлений решений релаксаций нелинейных программ (semidefinite programming). Основная идея — это снова формулировка задачи в виде целочисленной программы (правда, нелинейной) и использовании ее релаксаций нового типа. Для графа $G = (V, E)$ программа выглядит так:

$$\max \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}(1 - y_i y_j) \quad y_i \in \{-1, 1\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6}$$

При этом разрез (V_1, V_2) задается условием $V_1 = \{i \mid y_i = 1\}$ и $V_2 = \{i \mid y_i = -1\}$, а член $(1 - y_i y_j)/2$ вносит w_{ij} в сумму, если $y_i \neq y_j$ и 0 — в противном случае.

Релаксация заключается в замене скалярных величин y_i на n-мерные вещественные векторы $\mathbf{y}_i$ такие, что $\|\mathbf{y}_i\| = 1$:

$$\max \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}(1 - \mathbf{y}_i \mathbf{y}_j) \quad \|\mathbf{y}_i\| = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{7}$$

Важной особенностью таких релаксаций является тот факт, что они разрешимы в полиномиальное время методом эллипсоидов или другими вариантами метода внутренней точки.

Решение исходной программы (6) находится следующим вероятностным алгоритмом Vector Round.

Шаг 1. Находится решение (7) $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$.

Шаг 2. Выбирается случайный вектор $\mathbf{r}$, равномерно распределенный на единичной n-мерной сфере, т. е. $\|\mathbf{r}\| = 1$.

Шаг 3. Полагается $V_1 = \{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{r} \geqslant 0\}$, $V_2 = V \setminus V_1$.

Теорема 3 [21]. *Алгоритм Vector Round является* 0.878*-приближенным алгоритмом для* MAX CUT.

С другой стороны, про задачу MAX CUT известно [35], что она MAX SNP-трудна и, следовательно, не имеет PTAS, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$.

Тем не менее известна PTAS для случая плотных входов (dense case): в n-вершинном графе должно быть $\Omega(n^2)$ ребер [7, 16]. Этот результат является следствием результатов из [7], поскольку задача MAX CUT допускает формулировку в виде «гладкой» квадратичной целочисленной программы. Для этого достаточно ввести переменную x_v для каждой вершины графа $v \in V$ и рассмотреть программу:

$$\begin{gathered} \max \sum_{v \in V} \Big((1 - x_v) \sum_{u \in \Gamma(v)} x_u \Big) \\ x_v \in \{0, 1\}, \quad v \in V. \end{gathered} \tag{8}$$

Интерпретируя $x_v = 0$ как принадлежность v левой части разбиения, а $x_v = 1$ как принадлежность v правой части разбиения, получаем стандартную задачу максимизации разреза в графе.

Для метрической версии задачи MAX CUT (вершины соответствуют точкам метрического пространства) в [17] предложена вероятностная полиномиальная ε-приближенная схема (PTAS). Она основана на сведении метрической задачи к задаче с плотным входом (dense MAX CUT).

Для специальной разновидности задачи о максимальном разрезе, когда заданы размеры частей (скажем, p вершин в одной части и $n-p$ — в другой), 1/2-приближенный алгоритм представлен недавно в [4]. Для частного случая $p = n/2$ (так называемая бисекция графа) известен 0.65-приближенный алгоритм [19], основанный на вероятностном округлении оптимального решения semidefinite program.

4. Задача коммивояжера

Задача коммивояжера заключается в нахождении в полном графе с приписанными ребрам весами гамильтонова цикла минимального суммарного веса (задача на минимум). Рассматривают также и задачу коммивояжера на максимум. Это классическая NP-трудная задача

дискретной оптимизации, для которой в общем случае не существует эффективных приближенных алгоритмов. Однако для ограниченных версий задачи (метрической, евклидовой) ситуация значительно лучше. Несмотря на то, что даже евклидова версия задачи NP-трудна [34], для метрической задачи коммивояжера (расстояния удовлетворяют неравенству треугольника) давно известен 3/2-приближенный полиномиальный алгоритм [13].

Недавно в [6] разработана PTAS для евклидовой версии задачи коммивояжера. Напомним, что в евклидовой постановке на входе имеется n точек d-мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^d$. При этом расстояния между точками — это расстояния в евклидовом пространстве. Основные идеи вероятностного алгоритма из [6]: предварительное возмущение исходных данных для обеспечения целочисленности координат (ценой увеличения оптимума не более чем в $1+\varepsilon$ раз); случайное подразбиение пространства; доказательство того, что с вероятностью не менее 1/2 существует хорошо структурированный обход, превосходящий оптимум (по длине) не более чем в $1+\varepsilon$ раз; использование техники динамического программирования для нахождения такого обхода.

В [40] вероятностный алгоритм из [6] был улучшен путем комбинирования техники динамического программирования с так называемыми спэннерами. Алгоритм из [40] находит ε-приближенный тур за время $(\sqrt{d}/\varepsilon)^{O(d(\sqrt{d}/\varepsilon)^{d-1})}n + O(dn\log n)$ с вероятностью не менее 1/2. Заметим, что в этих алгоритмах время зависит дважды экспоненциально от размерности d. Ввиду результата [51], где показано, что евклидова задача коммивояжера MAX SNP-трудна в $\mathbf{R}^{\log n}$, такая зависимость неизбежна, если только любая задача из NP не имеет субэкспоненциального алгоритма решения.

Отметим, что для метрической задачи коммивояжера на максимум наилучший результат получен в [23], где предложен вероятностный полиномиальный 7/8-приближенный алгоритм. Этот алгоритм существенно использует идеи двух предыдущих алгоритмов для этой задачи из [3] и [1].

5. Дерандомизация

Во многих случаях вероятностные алгоритмы могут быть конвертированы в детерминированные. Такое преобразование называется дерандомизацией. Имеется общий метод условных вероятностей [45, 37, 2], идея которого заключается в последовательном определении значений переменных путем вычислений функционала

$$F = \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}(E_i)$$

с фиксированными значениями первых переменных $x_1 = d_1, \ldots, x_k = d_k$. Будем использовать обозначение

$$F(z_1 = d_1, \ldots, z_k = d_k) = \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{P}(E_i \mid z_1 = d_1, \ldots, z_k = d_k).$$

Вычислим $F(z_1 = \lfloor x_1 \rfloor + 1)$ и $F(z_1 = \lfloor x_1 \rfloor)$ и сравним их значения. Если меньше первое значение, полагаем $z_1 = \lfloor x_1 \rfloor + 1$; в противном случае полагаем $z_1 = \lfloor x_1 \rfloor$. Далее, зафиксировав найденное значение z_1, вычисляем $F(z_1 = d_1, z_2 = \lfloor x_2 \rfloor + 1)$ и $F(z_1 = d_1, z_2 = \lfloor x_2 \rfloor)$. Сравниваем их и полагаем $z_2 = \lfloor x_2 \rfloor + 1$, если $F(z_1 = d_1, z_2 = \lfloor x_2 \rfloor + 1) < F(z_1 = d_1, z_2 = \lfloor x_2 \rfloor)$, и $z_2 = \lfloor x_2 \rfloor$ в противном случае. Продолжая этот процесс, найдем значение последней переменной z_n и завершим работу.

Нетрудно проверить, что для полученного вектора $(d_1, \ldots, d_n)$ выполнено неравенство $F(x_1 = d_1, \ldots, x_n = d_n) \leqslant F$.

Эффективность такой процедуры сильно зависит от способа вычисления условных вероятностей (или их аппроксимаций) на известных вычислительных моделях типа RAM. Для получения полиномиального алгоритма достаточно уметь вычислять условные вероятности $\mathbf{P}(E_i \mid z_1 = d_1, \ldots, z_k = d_k)$ в полиномиальное время, однако часто это оказывается трудной вычислительной проблемой. По этой причине в [37] разработан метод «пессимистических оценок», в котором вместо вычисления условных вероятностей вычисляются их верхние оценки (оценки вероятностей больших уклонений). Однако при таком подходе возникают трудности в задачах с коэффициентами, отличными от 0 и 1, поскольку неизвестен способ вычисления транцендентных функций на вычислительных моделях типа RAM. Позднее эти трудности были преодолены в [48], где описан общий алгоритм дерандомизации. Однако это привело к достаточно сложной конструкции «пессимистического оценивателя» и соответственно самого алгоритма.

В [2] предложен другой подход к вычислению условных вероятностей, не использующий метод «пессимистических оценок». Он основан на предварительном усечении и масштабировании системы неравенств и применении затем техники динамического программирования для нахождения точного решения усеченной системы. Вместе с использованием утверждения об аппроксимации решения «усеченной» задачи через решение исходной это дает детерминированный алгоритм с гарантированной оценкой точности получаемого решения.

Необходимо также отметить, что в последнее время появились новые оригинальные методы детерминированного округления нецелочисленных решений различных релаксаций исходной задачи до целочисленных [4], что позволяет во многих задачах строить детерминированные

приближенные алгоритмы с лучшими на сегодняшний день оценками точности аппроксимации.

В этом кратком обзоре приведены лишь некоторые результаты, относящиеся к построению приближенных вероятностных алгоритмов для задач дискретной оптимизации. Даже из этого небольшого списка рассмотренных задач и процитированных результатов видно, что это направление переживает период быстрого развития, сопровождаемый как большим количеством интересных результатов, так и не меньшим числом открытых проблем. В заключение автор благодарит рецензента за полезные замечания и библиографические ссылки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Косточка А. В., Сердюков А. И.** Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 26. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 55–59.
2. **Кузюрин Н. Н.** Асимптотически точные полиномиальные алгоритмы в целочисленном линейном программировании // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 78–85.
3. **Сердюков А. И.** Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы: Сб. науч. тр. Вып. 25. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 80–86.
4. **Ageev A. A., Sviridenko M. I.** Approximation algorithms for maximum coverage and MAX CUT with given sizes of parts // Integer programming and combinatorial optimization (Graz, 1999). Berlin: Springer, 1999. P. 17–30. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 1610).
5. **Ageev A. A., Sviridenko M. I.** An 0.828-approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem // Discrete Appl. Math. 1999. V. 93, N 2–3. P. 149–156.
6. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems // Proc. of the 37th annual symposium on foundations of computer science. Los Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1996. P. 2–11.
7. **Arora S., Karger D., Karpinski M.** Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems // Proc. of the 27th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1995. P. 284–293.
8. **Asano T., Ono T., Hirata T.** Approximation algorithms for the maximum satifiability problem // Nordic J. Comput. 1996. V. 3, N 4. P. 388–404.
9. **Asano T, Williamson D. P.** Improved approximation algorithms for MAX SAT // Proc. of the 11th ACM-SIAM simposium on discrete algorithms. Philadelphia: SIAM, 2000. P. 96–105.

10. **Asratian A., Kuzjurin N.** Optima of generalized covering programs // Research Rep. 1999-07. Lulea Univ.
11. **Bertsimas D., Vohra R.** Rounding algorithms for covering problems // Math. Programming. 1998. V. 80, N 1. P. 63–89.
12. **Chekuri C., Khanna S.** On multi-dimensional packing problems // Proc. of the 10th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms. New York: ACM Press, 1999. P. 185–194.
13. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Techn. Rep. CS–93–13. Carnegie Mellon Univ., 1976.
14. **Dyer M., Frieze A., Kannan R.** A random polynomial algorithm for approximating the volume of convex bodies // J. Assoc. Comput. Mach. 1991. V. 38, N 1. P. 1–17.
15. **Feige U.** A threshold of $\ln n$ for the approximating set cover // Proc. of the 28th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1996. P. 314-318.
16. **Fernandez de la Vega W.** Max-cut has a randomized approximation scheme in dense graphs // Random Structures and Algorithms. 1989. V. 8, N 3. P. 187–198.
17. **Fernandez de la Vega W., Kenyon C.** A randomized approximation scheme for metric MAX-CUT // Proc. of the 39th annual symposium on foundations of computer science. Los Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1998. P. 468–471.
18. **Freivalds R.** Probabilistic machines can use less running time // Inform. Process. 77. Proc. of IFIP congr. 77. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 839–842.
19. **Frieze A., Jerrum M.** Improved approximation algorithms for MAX k-CUT and MAX BISECTION // Algorithmica. 1997. V. 18, N 1. P. 67–81.
20. **Goemans M. X., Williamson D. P.** New 3/4-approximation algorithms for the maximum satissiability problem // SIAM J. Discrete Math. 1994. V. 7, N 4. P. 656–666.
21. **Goemans M. X., Williamson D. P.** 0.878-approximation algorithms for MAX CUT and MAX-2SAT // Proc. of the 26th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1994. P. 422–431.
22. **Guha S., Khuller S.** Greedy strikes back: improved facility location algorithms // J. Algorithms. 1999. V. 31, N 1. P. 228–248.
23. **Hassin R., Rubinstein S.** A 7/8-approximation algorithm for metric MAX TSP // Inform. Process. Lett. 2002. V. 81, N 5. P. 247–251.
24. **Hastad J.** Some optimal inapproximability results // Proc. of the 28th ACM annual symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 1–10.

25. **Hohbaum D.** Heuristics for the fixed cost median problem // Math. Programming. 1982. V. 22, N 2. P. 148–162.
26. **Jain K., Mahdian M., Saberi A.** A new greedy approach for facility location problems // Proc. of the 34th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 2002. P. 731–740.
27. **Johnson D. S.** Approximation algorithms for combinatorial problems // J. Comput. System Sci. 1974. V. 9, N 3. P. 256–278.
28. **Karloff H., Zwick U.** A $(7/8\text{-}\varepsilon)$-approximation algorithm for MAX 3SAT // Proc. of the 38th annual symposium on foundations of computer science. Los Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1997. P. 406–415.
29. **Karmarkar N.** A new polynomial-time algorithm for linear programming // Combinatorica. 1984. V. 4, N 4. P. 373–395.
30. **Khachijan L. G.** Polynomial algorithm for linear programming // DAN USSR. 1979. V. 244, N 5. P. 1093–1096 (in Russian).
31. **Kohli R., Krishnamurti R.** Average performance of heuristics for satisfiability // SIAM J. Discrete Math. 1989. V. 2, N 4. P. 508–523.
32. **Lieberherr K., Specker E.** Complexity of partial satisfaction // J. Assoc. Comput. Mach. 1981. V. 28, N 2. P. 411–421.
33. **Motwani R., Raghavan P.** Randomized algorithms. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
34. **Papadimitriou C. H.** Euclidean traveling salesman problem is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. V. 4, N 3. P. 237–244.
35. **Papadimitriou C., Yannakakis M.** Optimization, approximation and complexity classes // J. Comput. System Sci. 1991. V. 43, N 3. P. 425–440.
36. **Rabin M. O.** Probabilistic algorithm for testing primality // J. Number Theory. 1980. V. 12, N 1. P. 128–138.
37. **Raghavan P.** Probabilistic construction of deterministic algorithms: approximating packing integer programs // J. Comput. System Sci. 1988. V. 37, N 2. P. 130–143.
38. **Raghavan P., Tompson C. D.** Randomized rounding: a technique for provably good algorithms and algorithmic proofs // Combinatorica. 1987. V. 37, N 4. P. 365–374.
39. **Rajagopalan S., Vazirani V. V.** Primal-dual RNC approximation algorithms for (multi)-set (multi)-cover and covering integer programs // Proc. of the annual symposium on foundations of computer science. Los Alamitos, CA: IEEE Comput. Soc. Press, 1993. P. 322–331.
40. **Rao S., Smith W. D.** Improved approximation schemes for geometric graphs via «spanners» and «banyans» // Proc. of the 30th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1998. P. 540–550.
41. **Rödl V.** On a packing and covering problem // European J. Combin. 1985. V. 6, N 1. P. 69–78.

42. **Rödl V., Thoma L.** Asymptotic packing and the random greedy algorithm // Random Structures and Algorithms. 1996. V. 8, N 3. P. 161–177.
43. **Shmoys D., Tardos E., Aardal K.** Approximation algorithms for facility location problems // Proc. of the 29th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 265–274.
44. **Solovay R., Strassen V.** A fast Monte-Carlo test for primality // SIAM J. Comput. 1977. V. 6, N 1. P. 84–85.
45. **Spencer J.** Ten lectures on the probabilistic method. Philadelphia: SIAM, 1987.
46. **Spencer J. H.** Asymptotic packing via a branching process // Random Structures and Algorithms. 1995. V. 7, N 2. P. 167–172.
47. **Srinivasan A.** Improved approximations for packing and covering problems // Proc. of the 27th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1995. P. 268–276.
48. **Srivastav A., Stangier P.** Algorithmic Chernoff-Hoeffding inequalities in integer programming // Random Structures and Algorithms. 1996. V. 8, N 1. P. 27–58.
49. **Sviridenko M.** Best possible approximation algorithm for MAX SAT with cardinality constraint // Algorithmica. 2001. V. 30, N 3. P. 398–405.
50. **Sviridenko M.** An improved approximation algorithm for the metric uncapacitated facility location problem // Integer programming and combinatorial optimization. 9th International IPCO conference. Proc. Berlin: Springer, 2002. P. 240–257. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 2337).
51. **Trevisan L.** When Hamming meets Euclid: the approximability of geometric TSP and MST // Proc. of the 29th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM Press, 1997. P. 21–29.

Адрес автора:

Институт системного
программирования РАН,
ул. Б. коммунистическая, 25,
109004 Москва, Россия.
E-mail: nnkuz@ispras.ru

Статья поступила
2 июля 2002 г.