ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2003. Серия 1. Том 10, № 1, 3–13

УДК 519.718

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСАХ $\{\rightarrow, {}^{-}\}, \{\rightarrow, 0\}$ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

М. А. Алехина

Получены нижние оценки ненадежности в базисах $\{\rightarrow, {}^{-}\}, \{\rightarrow, 0\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов. Показано, что почти все булевы функции в этих базисах можно реализовать схемами, асимптотически наилучшими с точки зрения надежности, т. е. функционирующими с ненадежностью 2γ (γ — вероятность неисправности одного элемента) при $\gamma \rightarrow 0$.

Введение

Рассматривается задача синтеза схем, реализующих булевы функции, с асимптотически наибольшей надежностью при однотипных константных неисправностях на выходах элементов. Задача минимизации сложности схемы при этом не исследуется. Получены нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах. Эти оценки оказываются достаточно точными — они асимптотически совпадают с верхними оценками ненадежности схем, построенных автором в работе [2]. Доказано, что почти каждая булева функция может быть реализована в указанных базисах асимптотически наилучшей по надежности схемой, ненадежность которой асимптотически равна 2γ.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [7]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $f(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\bar{f}(\tilde{x})$. Для построения надежных схем Дж. Нейман предложил итерационный метод, который при некотором ограничении на ε (вероятность перехода элемента в неисправное состояние) с каждым шагом итерации позволяет уменьшать вероятность ошибки на выходе схемы.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке научной программы «Университеты России» (проект 04.01.003) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–01–00053).

При этом сложность схемы увеличивается экспоненциально (примерно в 3^k раз, где k — используемое число итераций). В этом его главный недостаток, особенно при необходимости осуществления многократных итераций.

Затем схемы с такими же неисправностями рассматривались в работах других авторов (например, в [8, 10]), причем главное внимание уделялось сложности схем (задача синтеза схем наилучших по надежности не ставилась). Речь идет о реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов в произвольном конечном базисе [6]. Каждому элементу базиса приписано положительное число — вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что все элементы схемы независимым образом с вероятностью ε переходят в неисправные состояния. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах. Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \ \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leqslant p$, а максимум — по всем булевым функциям от n переменных.

С. И. Ортюков [8] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев ε_n с ростом n, а именно если последовательности p_n и ε_n таковы, что $QL_g\varepsilon_n < p_n < 1/2$, где $Q > 1$ и L_g — сложность реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе, то $L_{p_n,\varepsilon_n} \sim \rho 2^n/n$.

Для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки ε Д. Улиг [10] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к 1, если вероятность сбоя ε ограничена константой. При этом ненадежность схемы асимптотически не превосходит εL_g. Нижняя оценка ненадежности не приводится.

Упомянутые авторы решали задачу на минимум сложности схем, реализующих булевы функции с заданной вероятностью (надежностью). Задача на максимум надежности ими не рассматривалась.

Возможность максимально надежной реализации почти всех булевых функций в некоторых базисах при однотипных константных неисправностям на выходах элементов установлена автором в работах [1, 4].

Ниже рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных элементов в базисах $\{\to, {}^{-}\}$ и $\{\to, 0\}$ [6]. Схема реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе

схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Все элементы схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния с вероятностью γ ($\gamma < 1/2$). Неисправности типа 0 на выходах элементов характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном — константу 0. Аналогично определяются неисправности типа 1 на выходах функциональных элементов.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Следовательно, надежность схемы равна $1 - P(S)$.

При однотипных константных неисправностях на выходах элементов произвольную булеву функцию нельзя реализовать схемой сколь угодно высокой надежности [9]. Возникает вопрос, какой максимальной надежности можно добиться при использовании ненадежных элементов, подверженных однотипным константным неисправностям на выходах? Ответ на него зависит от базиса и типа неисправностей.

Определение. Схема, реализующая булеву функцию, отличную от константы, называется *a-схемой,* если для любых наборов $\tilde{a}, \tilde{b}$ из равенства $f(\tilde{a}) = f(\tilde{b})$ следует равенство $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a}) = P_{\overline{f}(\tilde{b})}(S, \tilde{b})$.

Из этого определения ясно, что вероятность ошибки на выходе a-схемы одинакова для всех нулевых (единичных) входных наборов схемы.

В работе [1] доказана

Лемма 1. *Если подсхема A, содержащая выход схемы S и реализующая неконстантную функцию, является a-схемой с вероятностями ошибок p_0 и p_1, $p_0 + p_1 \leqslant 1$, то $P(S) \geqslant P(A)$.*

Пусть в схеме S, реализующей булеву функцию, отличную от константы, выделена подсхема B, содержащая выход схемы и реализующая тождественную функцию. Обозначим через A подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы B. Если выполнено неравенство $P(S) > P(A)$, то будем говорить, что схема A надежнее схемы S и получается из S удалением подсхемы B.

Определение. Схема S, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, называется *b-схемой,* если из S нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, реализующей тождественную функцию.

В работе [1] доказана

Лемма 2. *Пусть схема A, реализующая булеву функцию f, является b-схемой, и пусть при $\gamma < d$, d — некоторая константа, выполнено*

условие $P(A) \leqslant c(\gamma)$, где $c(\gamma)$ — некоторая функция от γ. Если в схеме A можно выделить подсхему B, реализующую тождественную функцию с такими вероятностями ошибок p_0 и p_1, что $0 < p_0 + p_1 < 1$, то при $\gamma < d$ верно неравенство

$$\min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1},\ \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \leqslant c(\gamma).$$

Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, и S — любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию g с ненадежностью $P(C) \leqslant 1/2$. Обозначим через $p_{11}, \ldots, p_{1k}$ всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы C при таких входных наборах $\tilde{b}$, что $g(\tilde{b}) = 0$. Аналогично пусть $p_{01}, \ldots, p_{0m}$ — всевозможные различные вероятности ошибок на выходе схемы C при таких входных наборах $\tilde{b}$, что $g(\tilde{b}) = 1$. Полагаем $p^1 = \min\{p_{11}, \ldots, p_{1k}\}$, $p^0 = \min\{p_{01}, \ldots, p_{0m}\}$.

В [4] доказана

Лемма 3. *Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам*

$P_1(S,\tilde{a}) \geqslant p^1$, если $f(\tilde{a}) = 0$;

$P_0(S,\tilde{a}) \geqslant p^0$, если $f(\tilde{a}) = 1$.

Замечание 1. Из леммы 3 следует, что $P(S) \geqslant p^i,\ i = 0,1$.

Далее будем считать, что базисные элементы $x \to y$ и $\bar{x}$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах, и при этом предположении докажем леммы 4 и 5.

Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы. Пусть выходному элементу E схемы S приписана функция $\to$. Первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E — с выходом некоторой подсхемы S_2. Обозначим через $P_{\bar{f}_i}(S_i,\tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i, реализующей функцию f_i, $i = 1,2$.

Лемма 4. *Вероятности ошибок на выходе схемы S равны*

$P_0(S,\tilde{a}) = \gamma + P_1(S_1,\tilde{a})(1 - P_1(S_2,\tilde{a}))(1-\gamma)$, если набор $\tilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 0,\ i = 1,2$;

$P_0(S,\tilde{a}) = \gamma + (1 - P_0(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a})(1-\gamma)$, если набор $\tilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 1,\ i = 1,2$;

$P_0(S,\tilde{a}) = \gamma + P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-\gamma)$, если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$P_1(S,\tilde{a}) = (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_1(S_2,\tilde{a}) - P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a}))(1-\gamma)$, если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 1$ и $f_2(\tilde{a}) = 0$.

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы. Пусть в S можно выделить подсхему B, имеющую один вход и реализующую инверсию. Пусть $P_1(B,\tilde{a})$ и $P_0(B,\tilde{a})$ — вероятности ошибок схемы B на таких входных наборах $\tilde{a}$, что $f(\tilde{a})=0$ и $f(\tilde{a})=1$ соответственно.

Лемма 5. *Вероятности ошибок на выходе схемы S равны*

$P_1(S,\tilde{a}) = P_0(B,\tilde{a})(1-\gamma)$, *если набор $\tilde{a}$ является таким, что $f(\tilde{a})=0$;*

$P_0(S,\tilde{a}) = \gamma + P_1(B,\tilde{a})(1-\gamma)$, *если набор $\tilde{a}$ является таким, что $f(\tilde{a})=1$.*

Для доказательства достаточно вычислить вероятности ошибок.

§ 1. Неисправности типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\to, \bar{\ }\}$

Пусть базисные элементы $x \to y$ и $\bar{x}$ ($x \to y = \bar{x} \vee y$) подвержены неисправностям типа 0 на выходах, причем вероятность неисправности каждого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходах базисных элементов — приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

x	y	$x \to y$	p_0	p_1
0	0	1	γ	$1-\gamma$
0	1	1	γ	$1-\gamma$
1	0	0	1	0
1	1	1	γ	$1-\gamma$

Таблица 2

x	$\bar{x}$	p_0	p_1
0	1	γ	$1-\gamma$
1	0	1	0

В [2] доказана

Теорема 1. *При неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \to y, \bar{x}$ и $\gamma \leqslant 1/140$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 108\gamma^2$.*

Пусть $g(\tilde{x})$ — произвольная булева функция ($\tilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$). Обозначим через $A(n)$ множество булевых функций вида $f(\tilde{x}) = \bar{x}_i \vee g(\tilde{x})$ или $f(\tilde{x}) = \overline{\bar{x}_i \vee g(\tilde{x})}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теорема 2. *Пусть выходы элементов $x \to y$ и $\bar{x}$ подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma \leqslant 1/140$, $f(\tilde{x})$ — булева функция, $f \notin A(n)$, и S — любая схема, состоящая из вышеуказанных элементов и реализующая функцию f с ненадежностью $P(S) \leqslant 2\gamma + 108\gamma^2$. Тогда $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 2\gamma + 108\gamma^2$ ($\gamma \leqslant 1/140$). Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\rightarrow$. Поскольку $f \notin A(n)$, входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3.

1.1. Если элементам E_2 и E_3 приписана функция $\rightarrow$, то первый вход элемента E_3 не может быть соединен с полюсом ($f \notin A(n)$). Следовательно, он соединен с выходом некоторого элемента E_4. Независимо от того, какая базисная функция приписана элементу E_4, вероятность p_1 ошибки на выходе схемы, состоящей из элементов E_3 и E_4, равна $p_1 = \gamma(1-\gamma)$. Тогда вероятность ошибки P_1 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, по лемме 4 равна

$$P_1 = (\gamma + \gamma(1-\gamma) - \gamma^2(1-\gamma))(1-\gamma) = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma).$$

По лемме 3 с учетом замечания 1 имеем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.

1.2. Если элементу E_2 приписана функция $\rightarrow$, а элементу E_3 — инверсия, то вход элемента E_3 не может быть соединен с полюсом ($f \notin A(n)$), следовательно, соединен с выходом некоторого элемента E_4. Независимо от того, какая базисная функция приписана элементу E_4, вероятность p_1 ошибки на выходе схемы, состоящей из элементов E_3 и E_4, равна $p_1 = \gamma(1-\gamma)$. Тогда вероятность ошибки P_1 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, по лемме 4 равна

$$P_1 = (\gamma + \gamma(1-\gamma) - \gamma^2(1-\gamma))(1-\gamma) = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma).$$

По лемме 3 с учетом замечания 1 имеем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.

1.3. Если элементу E_2 приписана инверсия, а элементу E_3 — функция $\rightarrow$, то первый вход элемента E_3 не может быть соединен с полюсом ($f \notin A(n)$). Следовательно, он соединен с выходом некоторого элемента E_4. Повторяя рассуждения п. 1.1, получим $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.

1.4. Если элементам E_2 и E_3 приписана инверсия, то вход элемента E_3 не может быть соединен с полюсом ($f \notin A(n)$). Следовательно, он соединен с выходом некоторого элемента E_4. Повторяя рассуждения п. 1.2, получаем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$.

2. Пусть элементу E_1 приписана инверсия.

Если вход элемента E_1 соединен с выходом другого инвертора E_2, то подсхема из этих элементов реализует тождественную функцию. Ее вероятности ошибок равны $p_0 = \gamma$, $p_1 = \gamma(1-\gamma)$. Применима лемма 2, согласно которой

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} \leqslant 2\gamma + 108\gamma^2,$$

что неверно, так как

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma-\gamma^2},\ \frac{\gamma-\gamma^2}{2\gamma-\gamma^2}\right\} = \frac{1-\gamma}{2-\gamma} > \frac{1-\gamma}{2} > 2\gamma + 108\gamma^2$$

при $\gamma \leqslant 1/140$.

Следовательно, рассматриваемая схема не является подсхемой схемы S.

Если вход элемента E_1 соединен с выходом элемента E_2, которому приписана функция $\to$, то, поскольку $f \notin A(n)$, входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_3 и E_4. Все возможные варианты для элементов E_3 и E_4 были рассмотрены в п. 1.1–1.4. Там же доказано, что для функции $f \notin A(n)$ вероятность ошибки P_1 равна $P_1 = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma)$. Тогда по лемме 5 вероятность ошибки P_0 на выходе схемы S равна $P_0 = \gamma + P_1(1-\gamma) = 3\gamma - 6\gamma^2 + 7\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, рассматриваемая подсхема не является подсхемой схемы S. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что при $\gamma \leqslant 1/140$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 1 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ ($f \notin A(n)$), является асимптотически наилучшей по надежности.

Найдем число функций в классе $A(n)$. Поскольку $\bar{x}_i \vee g(\tilde{x}) = \bar{x}_i \vee g(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, имеем $|A(n)| = 2n2^{2^{n-1}}$. Число $|A(n)|$ мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных, причем с ростом n величина $|A(n)|/2^{2^n}$ быстро стремится к 0.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \to y$ и $\bar{x}$ показано, что почти все булевы функции в базисе из этих элементов можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \not\to y, \bar{x}\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов [3]. Следовательно, при неисправностях типа 1 на выходах элементов $x \not\to y$ и $\bar{x}$ почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

§ 2. Неисправности типа 0 на выходах элементов в базисе $\{x \to y, 0\}$

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами в базисе $\{x \to y, 0\}$ при неисправностях типа 0 на выходах, когда вероятность неисправности любого элемента равна γ.

Вероятности p_0 и p_1 — вероятности появления 0 и 1 на выходе базисного элемента $x \to y$ — приведены в табл. 1. Элемент, реализующий константу 0, работает абсолютно надежно.

В [2] доказана

Теорема 3. *При неисправностях типа 0 на входах элементов $x \to y$ и 0, при вероятности $\gamma \leqslant 1/140$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 110\gamma^2 - 2\gamma^3$.*

Докажем утверждение о нижней оценке.

Теорема 4. *Пусть выходы элементов $x \to y$ и 0 подвержены неисправностям типа 0 с вероятностью $\gamma \leqslant 1/140$, $f(\tilde{x})$ — булева функция, $f \notin A(n)$, и S — любая схема, состоящая из указанных выше элементов и реализующая функцию f с ненадежностью $P(S) \leqslant 2\gamma + 110\gamma^2 - 2\gamma^3$. Тогда $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S, ненадежность которой $P(S) \leqslant 2\gamma + 110\gamma^2 - 2\gamma^3$ ($\gamma \leqslant 1/140$). Без ограничения общности схему S можно считать b-схемой. Выделим в схеме S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

Поскольку функция f отлична от константы 0, элементу E_1 приписана функция $\to$, причем входы элемента E_1 соединены с выходами разных элементов E_2 и E_3.

1. Если элементам E_2 и E_3 приписана функция $\to$, то первый вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента E_4, причем элементу E_4 приписана $\to$ (поскольку $f \notin A(n)$). Вероятность p_1 ошибки на выходе схемы, состоящей из элементов E_3 и E_4, равна $p_1 = \gamma(1 - \gamma)$. Тогда вероятность ошибки P_1 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, по лемме 4 равна

$$P_1 = (\gamma + \gamma(1 - \gamma) - \gamma^2(1 - \gamma))(1 - \gamma) = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma).$$

По лемме 3 с учетом замечание 1 имеем $P(S) \geqslant (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1 - \gamma)$.

2. Если элементу E_2 приписана константа 0, то на выходе схемы S реализуется константа 1, что противоречит условию $f \notin A(n)$.

3. Если элементу E_2 приписана функция $\to$, а элементу E_3 — 0, то входы элемента E_2 соединены с выходами разных элементов E_4 и E_5 ($f \notin A(n)$).

3.1. Если элементам E_4 и E_5 приписана функция $\to$, то первый вход элемента E_5 соединен с выходом некоторого элемента E_6, причем

элементу E_6 приписана $\to$ $(f \notin A(n))$. Вероятность p_1 ошибки на выходе схемы, состоящей из элементов E_5 и E_6, равна $p_1 = \gamma(1-\gamma)$. Тогда вероятность ошибки P_1 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_3, E_4, E_5 и E_6, по лемме 4 равна

$$P_1 = (\gamma + \gamma(1-\gamma) - \gamma^2(1-\gamma))(1-\gamma) = (2\gamma - 2\gamma^2 + \gamma^3)(1-\gamma).$$

Вероятность ошибки P_0 на выходе подсхемы, состоящей из элементов E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6, по лемме 5 равна

$$P_0 = \gamma + P_1(1-\gamma) = 3\gamma - 6\gamma^2 + 7\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5.$$

По лемме 3 с учетом замечания 1 имеем $P(S) \geqslant 3\gamma - 6\gamma^2 + 7\gamma^3 - 4\gamma^4 + \gamma^5$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, рассматриваемая схема не является подсхемой схемы S.

3.2. Если элементу E_4 приписана константа 0, то на выходе схемы S реализуется константа 0, что противоречит условию $f \notin A(n)$.

3.3. Если элементу E_4 приписана функция $\to$, а элементу E_5 — константа 0, то подсхема, состоящая из элементов E_1, E_2, E_3 и E_4, реализует тождественную функцию и является a-схемой с вероятностями ошибок $p_0 = \gamma, p_1 = \gamma(1-\gamma)$. По лемме 2 имеем

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma - \gamma^2}, \frac{\gamma - \gamma^2}{2\gamma - \gamma^2}\right\} \leqslant 2\gamma + 110\gamma^2 - 2\gamma^3,$$

что неверно, так как при $\gamma \leqslant 1/140$

$$\min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma - \gamma^2}, \frac{\gamma - \gamma^2}{2\gamma - \gamma^2}\right\} = \frac{1-\gamma}{2-\gamma} > \frac{1-\gamma}{2} > 2\gamma + 110\gamma^2 - 2\gamma^3.$$

Следовательно, рассматриваемая схема не является подсхемой схемы S. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что при $\gamma \leqslant 1/140$ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая булеву функцию $f(\tilde{x})$ $(f \notin A(n))$, является асимптотически наилучшей по надежности. Число функций в классе $A(n)$ мало по сравнению с общим числом булевых функций от n переменных.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \to y$ и 0 показано, что в базисе из этих элементов почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

Приведенные утверждения справедливы для двойственных функций в двойственном базисе $\{x \not\to y, 1\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов [3]. Следовательно, при неисправностях типа 1 на выходах элементов $x \not\to y$ и 1 почти все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для почти всех функций.

В заключение автор благодарит проф. Н. П. Редькина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** О надежности схем из ненадежных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. математика. 1993. Т. 5, вып. 2. С. 59–74.

2. **Алехина М. А.** Верхние оценки ненадежности схем в базисах из двухвходовых функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы Четвертой молодежной науч. школы по дискрет. математике и ее приложениям (Москва, 18–23 сентября 2000 г.). М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2000. С. 12–20.

3. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгос. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 6–8.

4. **Алехина М. А.** О надежности схем в базисах $\{\not\to, \sim\}$, $\{\not\to, ^{-}\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Материалы XII Междунар. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Пенза, 15–21 октября 2001 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. фак. МГУ, 2001. С. 9–13.

5. **Алехина М. А.** Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 3. С. 3–28.

6. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

7. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.

8. **Ортюков С. И.** Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Проблемы передачи информации. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 84–97.

9. **Тарасов В. В.** К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 3. С. 391–400.

10. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // Fundamentals of computation theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский
государственный университет,
ул. Красная, 40,
440026 Пенза, Россия.
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
14 октября 2002 г.