ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2003. Серия 1. Том 10, № 1, 14–40

УДК 519.172

ИНТЕРВАЛЬНАЯ РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ НЕОРИЕНТИРОВАННОГО МУЛЬТИГРАФА*)

В. Г. Визинг

Раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа называется интервальной p-раскраской, если

a) инциденторы раскрашены правильно;

b) ребра p-раскрашены, т. е. модуль разности между цветами инциденторов одного и того же ребра не меньше p;

c) множество цветов инциденторов при каждой вершине представляет собой интервал.

Наименьшее число цветов, необходимое для интервальной p-раскраски всех инциденторов мультиграфа, называется интервальным p-хроматическим числом. Приводятся нижние и верхние оценки, а в некоторых случаях указываются точные значения интервального p-хроматического числа.

1. Основные понятия и предварительные сведения

Стандартные понятия теории графов, не определяемые в статье, можно найти в [6, 7].

Под мультиграфом $G = (V, E)$, если нет специальных оговорок, понимается конечный неориентированный мультиграф без петель с непустыми множествами вершин $V = V(G)$ и ребер $E = E(G)$. Через $d(v) = d_G(v)$ будем обозначать степень вершины $v \in V(G)$, а через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ — соответственно максимальную и минимальную степени вершин мультиграфа G. Мультиграф G называется мультиграфом степени Δ, если $\Delta(G) = \Delta$.

Если ребро e инцидентно вершине v, то пару (v, e) назовем *инцидентором,* примыкающим к вершине v (или инцидентором при вершине v). Таким образом, каждое ребро имеет два инцидентора, которые называются *сопряженными.* Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначается через $I(G)$. Два различных инцидентора называются *смежными,* если они примыкают к одной и той же вершине.

*) Исследование выполнено при поддержке INTAS (проект INTAS–OPEN–97–1001).

Под числами, если нет специальных оговорок, понимаются целые числа. Иногда числа называются точками. *Интервалом* $[a, b]$, где $a \leqslant b$, называется множество точек c, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant c \leqslant b$; число $b - a + 1$ называется *длиной* интервала $[a, b]$.

Пусть $[a', b']$ и $[a'', b'']$ — непересекающиеся интервалы. Будем говорить, что интервал $[a', b']$ расположен левее интервала $[a'', b'']$, а $[a'', b'']$ — правее $[a', b']$, если $b' < a''$.

Пусть $h \geqslant 0$. Будем говорить, что интервал $[a + h, b + h]$ получен в результате *сдвига вправо* на h интервала $[a, b]$; аналогично интервал $[a - h, b - h]$ — результат *сдвига влево* на h интервала $[a, b]$. Пусть имеется множество интервалов $\{[a_j, b_j] \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$ таких, что интервал $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ расположен правее интервала $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Пусть $b \geqslant b_n$. *Максимальным осторожным сдвигом* множества S *вправо* к точке b называется такой набор сдвигов $\{h_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\}$, при котором интервал $[a_{i+1} + h_{i+1}, b_{i+1} + h_{i+1}]$ расположен правее интервала $[a_i + h_i, b_i + h_i]$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, и теоретико-множественное объединение интервалов $[a_j + h_j, b_j + h_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ представляет собой интервал с правым концом b. Аналогично определяется максимальный осторожный сдвиг влево к точке $a \leqslant a_1$.

Будем считать, что цветами являются натуральные числа; множество цветов обозначим через C.

(Частичная) *раскраска инциденторов* мультиграфа G — это отображение какого-либо подмножества $I(G)$ в C. При этом если раскрашиваются все элементы множества $I(G)$, то раскраска инциденторов называется *полной.* Под раскраской с помощью m цветов понимается раскраска цветами из интервала $[1, m]$.

Пусть имеется раскраска φ некоторого множества S инциденторов. Будем говорить, что раскраска ψ является результатом *монотонной перекраски* инциденторов из множества S, если для любых $i', i'' \in S$ таких, что $\varphi(i') < \varphi(i'')$, выполняется неравенство $\psi(i') < \psi(i'')$. Таким образом, различно окрашенные инциденторы после монотонной перекраски остаются различно окрашенными.

Раскраска инциденторов называется *правильной,* если смежные инциденторы окрашены в различные цвета.

Пусть $p \geqslant 0$. Будем говорить, что при раскраске φ инциденторов ребро e является p-раскрашенным, если раскрашены оба инцидентора i_1 и i_2 этого ребра и $|\varphi(i_1) - \varphi(i_2)| \geqslant p$. Раскраска инциденторов называется *p-раскраской,* если каждое ребро, оба инцидентора которого окрашены, является p-раскрашенным. Наименьшее число цветов, с помощью которых можно построить полную p-раскраску инциденторов

мультиграфа G, обозначается через $\chi(p, G)$. В статье [5] показано, что

$$\chi(p, G) = \max\{\Delta(G), \lceil \Delta(G)/2 \rceil + p\}. \quad (1)$$

Пусть имеется раскраска φ инциденторов мультиграфа G в цвета из некоторого подмножества $C' \subseteq C$. Будем говорить, что цвет c *присутствует* при вершине v (в раскраске φ), если хотя бы один инцидентор при v окрашен в цвет c. В противном случае цвет $c \in C'$ называется *отсутствующим* в вершине v.

Раскраска инциденторов мультиграфа называется *интервальной,* если она правильная, и множество цветов, присутствующих в каждой вершине, образует интервал. Наименьшее натуральное k, при котором существует полная интервальная p-раскраска инциденторов мультиграфа G с использованием цветов из $[1, k]$, называется *интервальным p-хроматическим числом* мультиграфа G и обозначается через $\gamma(p, G)$.[1)]

Пусть имеется некоторая правильная раскраска инциденторов мультиграфа G. Если множество присутствующих в вершине v цветов не является интервалом, то вершина v называется *дефектной* (при этой раскраске). Если v — дефектная вершина и $[\alpha, \beta]$ — интервал наименьшей длины, содержащий все присутствующие в v цвета, то каждый цвет, отсутствующий в вершине v и принадлежащий интервалу $[\alpha, \beta]$, называется *просветом* в вершине v.

При изучении интервальной p-раскраски особый интерес представляют вершины, степень которых не меньше $2p$. В связи с этим дадим такое определение. Пусть $p > 0$. Правильная p-раскраска инциденторов мультиграфа называется *квазиинтервальной,* если при ней либо нет дефектных вершин, либо они есть, но степень каждой дефектной вершины меньше $2p$.

Введем понятие (T, p)-гладкого мультиграфа, которое позволит нам в дальнейшем существенно сократить изложение. Мультиграф G степени Δ называется *(T, p)-гладким,* если выполняется одно из следующих условий:

a) $T > \Delta$;

b) T — четное число, равное Δ;

c) T — нечетное число, равное Δ, причем $T \geqslant 2p + 3$ и мультиграф G обладает тем свойством, что каждая его вершина степени T смежна только с вершинами, степени которых больше $2p + 1$.

Несколько слов об ориентированных мультиграфах. Пусть $H = (V, A)$ — ориентированный мультиграф с множеством вершин V и множеством дуг A. Пусть $a = (v', v'')$ — дуга мультиграфа. Инцидентор (v', a) называется *начальным,* инцидентор (v'', a) — *конечным.* Два

[1)] Если мультиграф G не имеет ребер, то будем считать, что $\gamma(p, G) = 0$.

инцидентора называются *однотипными,* если они являются либо начальными, либо конечными. Дуга, оба инцидентора которой окрашены, считается p-раскрашенной, если разность между цветом конечного инцидентора и цветом начального инцидентора не меньше p. Остальные понятия, связанные с раскраской инцидентеров, переносятся на ориентированные мультиграфы без изменений.

Задача раскраски инцидентеров впервые рассматривалась в [8]. Что же касается идеи интервальной раскраски, то она возникла в задаче раскраски ребер [1].

Интервальную раскраску ребер имеет не каждый мультиграф, и вопрос о существовании такой раскраски является NP-полной проблемой даже в случае двудольных графов [9]. Неизвестны ответы на многие на первый взгляд простые вопросы, касающиеся интервальной раскраски ребер [11].

Интервальная p-раскраска инцидентеров ориентированных мультиграфов рассмотрена в [3]. В этой работе показано, что гарантировать существование полной интервальной p-раскраски инцидентеров ориентированного мультиграфа можно только при $p \leqslant 1$; однако если ориентированный мультиграф не имеет контуров, то полная интервальная p-раскраска существует при любом p. Из последнего обстоятельства вытекает, что в случае неориентированного мультиграфа полная интервальная p-раскраска существует при любом p. Впрочем, в этом легко убедиться с помощью следующего простого рассуждения.

Каждой вершине мультиграфа припишем интервал цветов, длина которого равна степени этой вершины, причем сделаем это так, чтобы приписанные различным вершинам интервалы не пересекались и отстояли друг от друга на расстоянии не менее p; после этого инцидентеры при каждой вершине правильно раскрасим в предписанные этой вершине цвета. Получим полную интервальную p-раскраску инцидентеров неориентированного мультиграфа. Таким образом, числовая характеристика $\gamma(p, G)$ определена для любого неориентированного мультиграфа G при любом p.

В настоящей статье даются нижние и верхние оценки интервального p-хроматического числа, а для некоторых классов мультиграфов указываются его точные значения.

2. Нижние оценки интервального p-хроматического числа

Для любого мультиграфа G степени Δ имеет место следующее очевидное неравенство:

$$\gamma(p, G) \geqslant \chi(p, G), \tag{2}$$

где $\chi(p, G)$ вычисляется по формуле (1). Зададим вопрос: точна ли нижняя оценка (2) интервального p-хроматического числа в том смысле, что для любого $\Delta \geqslant 2$ и любого p существует такой мультиграф G степени Δ, что
$$\gamma(p, G) = \chi(p, G)? \tag{3}$$
Ответ на этот вопрос отрицательный. Но сначала рассмотрим случаи, когда равенство (3) имеет место.

При $\Delta = 1$ любая правильная p-раскраска инциденторов является интервальной. Поэтому при $\Delta = 1$ и любом p имеет место равенство $\gamma(p, G) = \chi(p, G) = p + 1$.

Теорема 1. *Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$. Тогда при $p \leqslant 1$ выполняется равенство $\gamma(p, G) = \Delta$.*

Доказательство. Так как $\gamma(p, G) \geqslant \Delta$, то нужно доказать, что $\gamma(p, G) \leqslant \Delta$. Пусть $p = 0$. Раскрасим правильно все инциденторы мультиграфа так, чтобы для любой вершины v цвета́ инциденторов при этой вершине образовывали интервал $[1, d(v)]$. Получим интервальную 0-раскраску инциденторов с использованием Δ цветов. Следовательно, $\gamma(0, G) = \Delta$. Пусть теперь $p = 1$. Рассмотрим двудольный мультиграф H, который получится из G, если на каждом ребре мультиграфа G разместить вершину, разбив таким образом каждое ребро на два ребра. Каждому ребру (x, y) мультиграфа H предпишем множество цветов $[1, k]$, где $k = \max\{d(x), d(y), 2\}$. Воспользуемся следующей теоремой из [10]: если каждому ребру двудольного мультиграфа предписано не меньше цветов, чем максимальная степень вершины, которой инцидентно это ребро, то существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа в предписанные цвета. Применив эту теорему к мультиграфу H, правильно раскрасим все ребра H в предписанные цвета. Окрасив каждый инцидентор мультиграфа G в тот цвет, в который окрашено соответствующее ребро мультиграфа H, получим полную интервальную 1-раскраску инциденторов мультиграфа G с помощью Δ цветов. Теорема 1 доказана.

Нас будут интересовать случаи, когда $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$.

Нижнюю оценку интервального p-хроматического числа, отличную от оценки (2), дает

Теорема 2. *Пусть $p \geqslant 2$ и G — мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$. Тогда*
$$\gamma(p, G) \geqslant \max\{\Delta, \min\{2p, \Delta + p\}\}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $\gamma(p, G) \geqslant \Delta$, то достаточно доказать, что $\gamma(p, G) \geqslant \min\{2p, \Delta + p\}$. Пусть имеется полная интервальная p-раскраска инциденторов мультиграфа G с использованием $\gamma(p, G) = \gamma$

цветов. Нужно доказать, что выполняется по меньшей мере одно из неравенств $\gamma \geqslant 2p$ и $\gamma \geqslant \Delta + p$. Пусть v — вершина степени Δ и $[\alpha, \beta]$ — интервал длины Δ, который образуют цвета инцидентов при вершине v. Тогда $\Delta \leqslant \alpha + \Delta - 1 = \beta \leqslant \gamma$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $p < \alpha$. Тогда $\beta = \alpha + \Delta - 1 > p + \Delta - 1$, т. е. $\gamma \geqslant \beta \geqslant \Delta + p$.

Случай 2. Пусть $p > \beta$. Обозначим через i инцидентор, сопряженный с тем инцидентором при вершине v, который окрашен в цвет β. Цвет инцидентора i не меньше чем $\beta + p \geqslant \Delta + p$. Отсюда следует, что $\gamma \geqslant \Delta + p$.

Случай 3. Пусть $\alpha \leqslant p \leqslant \beta$. Это означает, что при вершине v есть инцидентор, окрашенный в цвет p. Цвет сопряженного с ним инцидентора не меньше чем $p + p = 2p$, т. е. $\gamma \geqslant 2p$. Теорема 2 доказана.

Из формулы (1) и теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Если G — мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$ и $p > \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\gamma(p, G) > \chi(p, G)$.*

Таким образом, нижняя оценка (2) интервального p-хроматического числа не является точной в указанном выше смысле. Что же касается оценки (4), то она достигается на деревьях. Это устанавливается в теореме 4. Сначала рассмотрим двудольные мультиграфы.

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 2$ и $G = (V, E)$ — двудольный мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$. Тогда $\gamma(p, G) \leqslant \Delta + p$, причем если $p \geqslant \Delta$, то $\gamma(p, G) = \Delta + p$.*

Доказательство. Обозначим через X и Y подмножества вершин мультиграфа G соответственно первой и второй долей. С использованием Δ цветов раскрасим правильно все ребра мультиграфа G, затем увеличим на p цвета инцидентов, примыкающих к вершинам множества Y. Получим правильную p-раскраску всех инцидентов с использованием $\Delta + p$ цветов. Для каждой вершины $x \in X$ произведем такую монотонную перекраску инцидентов при этой вершине, чтобы после перекраски цвета инцидентов образовывали интервал $[1, d(x)]$. Для каждой вершины $y \in Y$ произведем такую монотонную перекраску примыкающих к этой вершине инцидентов, чтобы после перекраски цвета инцидентов образовывали интервал с правым концом $\Delta + p$. Получим полную интервальную p-раскраску инцидентов мультиграфа G с использованием $\Delta + p$ цветов. Значит, $\gamma(p, G) \leqslant \Delta + p$. Но при $p \geqslant \Delta$ из формулы (4) имеем $\gamma(p, G) \geqslant \Delta + p$. Следовательно, $\gamma(p, G) = \Delta + p$ при $p \geqslant \Delta$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть* $p \geqslant 2$ *и* G — *дерево степени* $\Delta \geqslant 2$. *Тогда* $\gamma(p, G) = \max\{\Delta, \{\min\{2p, \Delta + p\}\}\}$.

Доказательство. Пусть $M = \max\{\Delta, \{\min\{2p, \Delta + p\}\}\}$. Если $p \geqslant \Delta$, то $M = \Delta + p$ и теорема справедлива в силу теоремы 3. Пусть теперь $p \leqslant \Delta - 1$. Тогда $M = \max\{\Delta, 2p\}$. Неравенство $\gamma(p, G) \geqslant M$ доказано в теореме 2; осталось доказать, что $\gamma(p, G) \leqslant M$.

Предположим противное: пусть H — такое поддерево дерева G с наименьшим числом вершин, что $\gamma(p, H) > M = \max\{\Delta, 2p\}$. Тогда в H имеется больше двух вершин, так как в противном случае $\gamma(p, H) = p + 1 < M$. Пусть v — висячая вершина поддерева H, v' — смежная с ней вершина. Удалим из H вершину v и ребро $e = (v, v')$. Получим такое дерево T, что $\gamma(p, T) \leqslant M$. Построим интервальную p-раскраску всех инциденторов дерева T с использованием цветов из интервала $[1, M]$. Пусть цвета инциденторов при вершине v' образуют интервал $[a, b]$. Так как длина интервала $[a, b]$ меньше Δ, то $\{a - 1, b + 1\} \cap [1, M] \neq \varnothing$. Пусть $t \in \{a-1, b+1\} \cap [1, M]$. Обратимся к дереву H. Сохраним раскраску всех тех инциденторов дерева H, которые принадлежат дереву T, и окрасим в цвет t инцидентор (v', e) дерева H. Инцидентор (v, e) дерева H окрашиваем в цвет $t + p$, если $t \leqslant p$; при этом имеем $t + p \leqslant 2p \leqslant M$. Если же $t > p$, то инцидентор (v, e) дерева H окрашиваем в цвет 1. Получаем интервальную p-раскраску всех инциденторов дерева H с использованием M цветов, что противоречит предположению $\gamma(p, H) > M$. Теорема 4 доказана.

Что же касается нижней оценки (2), то она не всегда достигается и при $p \leqslant \Delta/2$. Это следует из утверждения 2. Сначала докажем

Утверждение 1. *Пусть* G_3 — *однородный мультиграф степени* 3, *не имеющий однородного* 2*-фактора.*[2] *Тогда* $(2, G_3) \geqslant 6$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует полная интервальная 2-раскраска инциденторов мультиграфа G_3 с использованием цветов из интервала $[1, 5]$. Обозначим через E_3 подмножество ребер мультиграфа, один из инциденторов которых окрашен в цвет 3. Так как каждая вершина мультиграфа имеет степень 3 и цвета инциденторов при каждой вершине образуют интервал длины 3, принадлежащий интервалу $[1, 5]$, то в каждой вершине присутствует цвет 3. Инцидентор любого ребра из E_3, сопряженный инцидентору цвета 3 этого ребра, имеет цвет либо 1, либо 5. Поскольку цвета 1, 3 и 5 одновременно не могут присутствовать в одной и той же вершине, то каждой вершине инцидентно не более двух ребер из E_3, а так как число ребер

[2] Мультиграф $G_2 = (V, E')$ мы называем однородным 2-фактором мультиграфа $G = (V, E)$, если G_2 — однородный мультиграф степени 2 и $E' \subseteq E$.

в подмножестве E_3 равно числу вершин мультиграфа, то каждой вершине мультиграфа инцидентно ровно два ребра из E_3. Это противоречит тому, что мультиграф G_3 не имеет однородного 2-фактора. Утверждение 1 доказано.

Если G — мультиграф степени 4, то по формуле (1) имеем $\chi(2, G) = 4$. Вместе с тем справедливо

Утверждение 2. *Существует такой мультиграф G_4 степени 4, что $\gamma(2, G_4) \geqslant 6$.*

Доказательство. Мультиграф G_3 из утверждения 1, очевидно, существует. Добавив к нему компоненту связности, представляющую собой произвольный мультиграф степени 4, получим требуемый мультиграф G_4. Утверждение 2 доказано.

В заключение этого раздела приведем достаточное условие выполнения равенства $\gamma(p, G) = \Delta$ при $p \geqslant 2$. Предварительно обратимся к ориентированным мультиграфам.

Для ориентированного мультиграфа $H = (V, A)$ будем обозначать через $d^+(v)$ и $d^-(v)$ полустепени исхода и захода вершины v соответственно, величина $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ — это степень вершины v. Мультиграф H называется *уравновешенным,* если $d^+(v) = d^-(v)$ для любой вершины v, и *квазиуравновешенным,* если для любой вершины v выполняется соотношение $|d^+(v) - d^-(v)| \leqslant 1$.

Поскольку любой мультиграф можно сделать эйлеровым, добавив в него некоторое паросочетание, очевидна следующая

Лемма 1. *Ребро любого неориентированного мультиграфа можно сориентировать так, чтобы получился квазиуравновешенный мультиграф.*

В работах [2, 4] изучалась полуправильная раскраска инциденторов и двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа. Напомним эти понятия. Раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа называется *полуправильной,* если смежные однотипные инциденторы окрашиваются различно. Двудольный неориентированный мультиграф $B(H)$ называется *двудольной интерпретацией* ориентированного мультиграфа $H = (V, A)$, если каждой вершине v мультиграфа H соответствуют две вершины v^+ и v^- мультиграфа $B(H)$, а каждой дуге $(x, y) \in A$ соответствует ребро (x^+, y^-) мультиграфа $B(H)$ и никаких других ребер и вершин в мультиграфе $B(H)$ нет. Очевидно, что $d^+(v) = d_B(v^+)$, где $d_B(v^+)$ — степень вершины v^+ в мультиграфе $B(H)$. Аналогично $d^-(v) = d_B(v^-)$. Правильной раскраске ребер мультиграфа $B(H)$ соответствует полуправильная 0-раскраска инциденторов мультиграфа H, при которой оба инцидентора каждой дуги мультиграфа H

окрашиваются в тот цвет, в который окрашено соответствующее этой дуге ребро мультиграфа $B(H)$.

Лемма 2. *Пусть $p \geqslant 2$ и G — неориентированный мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$. Пусть число $T \geqslant 2p$ таково, что мультиграф G является (T,p)-гладким. Тогда существует такая полная квазиинтервальная p-раскраска φ инциденторов мультиграфа G с использованием цветов из $[1,T]$, при которой цвета, присутствующие в каждой вершине степени не более $2p$ (если такие вершины есть), принадлежат интервалу $[k-p+1, k+p]$, где $k = \lfloor T/2 \rfloor$.*

Доказательство. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\Delta = T$ и $\delta(G) = 2p$. Действительно, если $\Delta < T$, то добавим к G компоненту связности, являющуюся полным $(2k+1)$-вершинным графом, и будем доказывать лемму для полученного мультиграфа степени $2k$, считая, что $T = 2k$. Аналогично если $\delta(G) > 2p$, то добавим компоненту связности, являющуюся полным $(2p+1)$-вершинным графом, и будем доказывать лемму для полученного мультиграфа. Если же $\delta(G) < 2p$, то возьмем второй экземпляр мультиграфа G и каждую вершину мультиграфа G степени менее $2p$ соединим с одноименной вершиной второго экземпляра пучком параллельных ребер, мощность которого равна разности между $2p$ и степенью вершины. Получим (T,p)-гладкий мультиграф G' с $d(G') = 2p$. Доказав лемму для мультиграфа G' и построив требуемую раскраску инциденторов, вернемся к мультиграфу G, удалив второй экземпляр и добавленные ребра. Раскраска инциденторов мультиграфа G будет искомой. Итак, считаем, что $\Delta = T$ и $\delta(G) = 2p$. Но тогда очевидно, что квазиинтервальная раскраска инциденторов φ, отвечающая требованиям леммы, будет автоматически интервальной. Превратим G в квазиуравновешенный ориентированный мультиграф H; это возможно по лемме 1. Достаточно доказать существование полной интервальной p-раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа H цветами из $[1,T]$, при которой цвета, присутствующие в каждой вершине степени $2p$, образуют интервал $[k-p+1, k+p]$.

Рассмотрим двудольную интерпретацию $B(H)$ мультиграфа H. Каждому ребру (x^+, y^-) мультиграфа $B(H)$ предпишем интервал цветов следующим образом. Если $d(x) = 2k+1$, то ребру предписываем интервал $[1, k+1]$. Если $d(x) \leqslant 2k$, то ребру предписываем интервал $[k - d_B(x^+) + 1, k - d_B(x^+) + \max\{d_B(x^+), d_B(y^-)\}]$. В силу упоминавшегося в теореме 1 результата из [10] существует правильная раскраска φ всех ребер мультиграфа $B(H)$ в предписанные цвета. При раскраске φ цвета, присутствующие в произвольной вершине v^+ мультиграфа $B(H)$, не меньше $\max\{1, k - d_B(v^+) + 1\}$.

Оценим сверху цвета, присутствующие в вершине v^-. Рассмотрим любое ребро вида (z^+, v^-) мультиграфа $B(H)$. Если $d(v) = 2k+1$, то присутствующие в v^- цвета не больше $2k+1-p$. Действительно, если $d(z) = 2k+1$, то ребру предписан интервал $[1, k+1]$ и цвет ребра не больше $k+1 \leqslant 2k+1-p$; если же $d(z) \leqslant 2k$, то ребру предписан интервал $[k - d_B(z^+) + 1, k - d_B(z^+) + d(v^-)]$ и цвет ребра не больше $k - d_B(z^+) + d(v^-) \leqslant k - p + k + 1 = 2k + 1 - p$. Пусть теперь $d(v) \leqslant 2k$; тогда присутствующие в v^- цвета не больше $k + d(v^-) - p$. Действительно, если $d(z) = 2k+1$, то ребру (z^+, v^-) предписан интервал $[1, k+1]$, а так как G является (T, p)-гладким мультиграфом, то выполняется неравенство $d(v) \geqslant 2p+2$; поэтому $d_B(v^-) \geqslant p+1$ и $k+1 \leqslant k + d_B(v^-) - p$. Если же $d(z) \leqslant 2k$, то правый конец интервала, предписанного ребру (z^+, v^-), равен $k - d_B(z^+) + \max\{d_B(z^+), d_B(v^-)\}$. Если $d_B(z^+) \geqslant d_B(v^-)$, то он равен $k \leqslant k + d_B(v^-) - p$; если $d_B(v^-) > d_B(z^+)$, то он равен $k + d_B(v^-) - d_B(z^+) \leqslant k + d_B(v^-) - p$.

Обратимся теперь к мультиграфу H. Оба инцидентора каждой дуги (x, y) мультиграфа H окрасим в тот цвет, в который окрашено ребро (x^+, y^-) мультиграфа $B(H)$; после этого увеличим на p цвета всех конечных инциденторов. Получим полную полуправильную p-раскраску ψ инциденторов ориентированного мультиграфа H. Каждой вершине v мультиграфа H соответствует интервал $[\alpha(v), \beta(v)]$ такой, что при раскраске ψ цвета начальных инциденторов при v не меньше $\alpha(v)$, а цвета конечных инциденторов при v не больше $\beta(v)$. При этом если $d(v) = 2k+1$, то $[\alpha(v), \beta(v)] = [1, 2k+1]$, а если $d(v) \leqslant 2k$, то $[\alpha(v), \beta(v)] = [k - d^+(v) + 1, k + d(v^-)] \subseteq [1, 2k]$.

При каждой вершине v сделаем такую монотонную перекраску начальных инциденторов, чтобы после перекраски их цвета образовывали интервал, левый конец которого совпадает с $\alpha(v)$, и такую монотонную перекраску конечных инциденторов, чтобы после перекраски их цвета образовывали интервал, правый конец которого совпадает с $\beta(v)$. Так как длина интервала $[\alpha(v), \beta(v)]$ равна степени вершины v, то полученная после перекраски полная p-раскраска φ инциденторов будет интервальной. При раскраске φ цвета, присутствующие при каждой вершине степени $2p$, образуют интервал $[k-p+1, k+p]$; при этом если $T = \Delta = 2k+1$, то φ использует цвета из $[1, 2k+1]$, а если $T = \Delta = 2k$, то φ использует цвета из $[1, 2k]$. Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть $p \geqslant 2$ и $G = (V, E)$ — мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$. Тогда $\gamma(p, G) = \Delta$, если*

a) Δ — *четное число и $\delta(G) \geqslant 2p$;*

b) Δ — *нечетное число и $\delta(G) \geqslant 2p+1$;*

c) Δ — *нечетное число,* $\delta(G) \geqslant 2p$ *и мультиграф* G *является* (Δ, p)-*гладким.*

Доказательство. Утверждения a) и c) непосредственно следуют из леммы 2. Докажем b). Пусть Δ — нечетное число и $\delta(G) \geqslant 2p + 1$. Добавим к G паросочетание M, насыщающее все вершины нечетной степени (число таких вершин четно). Получим мультиграф F с $\Delta(F) = \Delta+1$ и $d(F) \geqslant 2p+2 = 2(p+1)$. Так как F — мультиграф четной степени, то $\gamma(p+1, F) = \Delta(F) = \Delta + 1$. Построим полную интервальную $(p+1)$-раскраску φ инциденторов мультиграфа F с использованием цветов из $[1, \Delta + 1]$. Удалив добавленное паросочетание, получим мультиграф G. Пусть v — произвольная вершина нечетной степени мультиграфа G, и пусть c тот цвет, который при раскраске φ имел примыкающий к v инцидентор ребра из M. Уменьшим на 1 цвета тех инциденторов при v, которые при раскраске φ были больше c. Сделаем это для каждой вершины нечетной степени. Затем рассмотрим все те вершины четной степени, в которых присутствует цвет $\Delta + 1$. Уменьшим на 1 цвета всех инциденторов при каждой такой вершине. После указанных перекрасок получим полную интервальную p-раскраску инциденторов мультиграфа G с использованием Δ цветов. Следствие 2 доказано.

3. Верхние оценки интервального p-хроматического числа

Теорема 5. *Пусть* $p \geqslant 2$ *и* $G = (V, E)$ — *мультиграф степени* $\Delta \geqslant 2$. *Тогда*

$$\gamma(p, G) \leqslant 2\Delta + p(p-1)/2. \tag{5}$$

Доказательство. Сначала правильно раскрасим все вершины мультиграфа G следующим образом: раскрашиваем вершины в произвольном порядке, окрашивая очередную вершину в наименьший цвет, в который не окрашена ни одна из смежных вершин. Тогда множество использованных цветов образует некоторый интервал $[1, m]$, а множество V разбивается на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_m$, где V_j — подмножество вершин, окрашенных в цвет $j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$. При такой раскраске любая вершина, имеющая цвет $k \geqslant 2$, смежна по крайней мере с одной вершиной цвета w, каким бы ни был цвет w из интервала $[1, k-1]$. Для каждого множества V_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ определим *особый цвет* c_j следующим образом:

$$c_j = \begin{cases} \Delta + \sum\limits_{q=1}^{j-1}(p-q), & \text{если } j \leqslant p; \\ \Delta + p(p-1)/2, & \text{если } j \geqslant p+1. \end{cases}$$

Пусть $c(v) = c_j$, если $v \in V_j$. Приступим к интервальной p-раскраске инциденторов. Для каждой вершины v множество примыкающих к v инциденторов разбиваем на два подмножества: $I_1(v)$ — инциденторы тех ребер, которые соединяют v с вершинами, цвет которых больше цвета вершины v; $I_2(v)$ — инциденторы тех ребер, которые соединяют v с вершинами, цвет которых меньше цвета вершины v. (Разумеется, множества $I_1(v)$ или $I_2(v)$ могут быть пустыми.) Раскрашиваем правильно все инциденторы множества $I_1(v)$ с соблюдением единственного требования: их цвета должны образовывать интервал с правым концом $c(v)$. Все инциденторы множества $I_2(v)$ раскрашиваем правильно так, чтобы их цвета образовывали интервал с левым концом $c(v)+1$; при этом должно выполняться условие: если i', i'' — различные инциденторы из $I_2(v)$, причем инцидентор, сопряженный с i', примыкает к вершине с меньшим цветом, чем цвет той вершины, к которой примыкает инцидентор, сопряженный с i'', то инцидентор i' окрашивается в меньший цвет, чем инцидентор i''. После раскраски всех инциденторов мультиграфа G получится полная раскраска инциденторов, которую обозначим через φ. Раскраска φ является, очевидно, интервальной. Так как любой особый цвет не больше $\Delta + p(p-1)/2$, то φ использует не более $2\Delta + p(p-1)/2$ цветов. Осталось доказать, что φ является p-раскраской.

Пусть $e=(v', v'')$ — произвольное ребро мультиграфа, причем $v' \in V_s$ и $v'' \in V_t$, где $1 \leqslant s < t \leqslant m$. Инциденторы ребра e при вершинах v' и v'' обозначим через i_1 и i_2 соответственно. Тогда $\varphi(i_1) \leqslant c_s$. С другой стороны, $\varphi(i_2) \geqslant c_t + s$. Действительно, при $s = 1$ это очевидно, а при $s \geqslant 2$ это вытекает из того, что вершина v'' смежна по крайней мере с одной вершиной из каждого множества $V_1, \ldots, V_{s-1}$. Поэтому при v'' есть не менее $s-1$ инциденторов, цвета которых больше c_t, но меньше $\varphi(i_2)$. Таким образом, имеем

$$\varphi(i_2) - \varphi(i_1) \geqslant c_t - c_s + s. \tag{6}$$

Так как по определению особого цвета $c_t \geqslant c_s$, то при $s \geqslant p$ из (6) вытекает, что $\varphi(i_2) - \varphi(i_1) \geqslant p$. Если же $s \leqslant p-1$, то по определению особого цвета имеем $c_s = \Delta + \sum\limits_{q=1}^{s-1}(p-q)$, а $c_t \geqslant c_{s+1} = \Delta + \sum\limits_{q=1}^{s}(p-q)$. Поэтому $c_t - c_s + s \geqslant \sum\limits_{q=s}^{s}(p-q) + s = p - s + s = p$; из (6) снова получаем, что $\varphi(i_2) - \varphi(i_1) \geqslant p$. Таким образом, φ является p-раскраской. Теорема 5 доказана.

Прежде чем обсуждать вопрос о точности оценки (5), рассмотрим мультиграфы степени 2.

Теорема 6. *Пусть $p \geqslant 2$ и G — мультиграф степени 2. Тогда если*

G не имеет циклов нечетной длины, то $\gamma(p,G) = p+2$. Если же G имеет циклы нечетной длины, то

$$\gamma(p,G) = \begin{cases} 5 & \text{при } p = 2; \\ 2p & \text{при } p \geqslant 3. \end{cases}$$

Доказательство. Если мультиграф G не имеет циклов нечетной длины, то он является двудольным и равенство $\gamma(p,G) = p+2$ справедливо по теореме 3. Предположим, что G имеет циклы нечетной длины. Пусть Q — простой цикл нечетной длины n. Неравенство $\gamma(2,G) \leqslant 5$ следует из формулы (5). Докажем, что $\gamma(2,G) \geqslant 5$. Предположим противное: пусть $\gamma(2,G) \leqslant 4$. Рассмотрим интервальную 2-раскраску всех инциденторов цикла Q с использованием цветов из [1,4]. Обозначим через I_j подмножество инциденторов цикла, окрашенных в цвет j ($j = 1,2,3,4$). Легко видеть, что различные вершины цикла, при которых есть инциденторы из I_1, не могут быть смежными. Так как мощность любого множества попарно несмежных вершин цикла Q не больше $(n-1)/2$, то $|I_1| \leqslant (n-1)/2$. Аналогично $|I_4| \leqslant (n-1)/2$. Поэтому $|I_1 \cup I_4| \leqslant n-1$. Так как общее число инциденторов цикла Q равно $2n$, то $|I_2 \cup I_3| \geqslant n+1$. Это означает, что цикл Q имеет ребро, оба инцидентора которого принадлежат $I_2 \cup I_3$, что невозможно, так как такое ребро не будет 2-раскрашенным. Следовательно, $\gamma(2,G) \geqslant 5$. Равенство $\gamma(2,G) = 5$ доказано.

Предположим, что $p \geqslant 3$. Сначала покажем, что $\gamma(p,G) \leqslant 2p$. Удалим из Q одно ребро $e = (v', v'')$ и «склеим» вершины v' и v''. Получится цикл Q' четной длины. Возьмем интервальную p-раскраску всех инциденторов цикла Q' с использованием $p+2$ цветов; при этой раскраске цвета инциденторов при каждой вершине Q' образуют либо интервал [1,2], либо интервал $[p+1, p+2]$. Пусть при вершине, полученной в результате склеивания, этот интервал есть $[p+1, p+2]$. «Расклеим» вершины v' и v''. Пусть инцидентор при v' имеет цвет $p+1$, а инцидентор при v'' — цвет $p+2$. Перекрасим инцидентор при v'' в цвет $2p-1 \geqslant p+2$. После этого инцидентор (v', e) цикла Q окрасим в цвет p, а инцидентор (v'', e) — в цвет $2p$; получим интервальную p-раскраску всех инциденторов цикла Q. Поступая аналогично для остальных компонент графа G, получим $\gamma(p,G) \leqslant 2p$.

Неравенство $\gamma(p,G) \geqslant 2p$ доказывается так. Построим полную интервальную p-раскраску φ инциденторов мультиграфа G с использованием $\gamma(p,G)$ цветов. Затем мультиграф G превратим в ориентированный мультиграф H, заменив каждое ребро дугой, начальный инцидентор которой имеет меньший цвет, чем конечный. Так как G не является двудольным мультиграфом, то в H существует путь длины 2. Пусть этот путь имеет вид v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, где v_1, v_2, v_3 — вершины H, а a_1, a_2 —

дуги, которые образовались соответственно из ребер e_1, e_2 мультиграфа G. Рассмотрим следующие инциденторы мультиграфа G: $i_1 = (v_1, e_1)$, $i_2 = (v_2, e_1)$, $i_3 = (v_2, e_2)$, $i_4 = (v_3, e_2)$. Имеем $\varphi(i_4) \geqslant \varphi(i_3) + p \geqslant \varphi(i_2) - 1 + p \geqslant \varphi(i_1) + p - 1 + p \geqslant 2p$. Следовательно, $\gamma(p, G) \geqslant 2p$. Теорема 6 доказана.

Таким образом, в случае $\Delta = 2$ оценка (5) достигается только при $p = 2$.

Пусть $p \geqslant 2$, $\Delta \geqslant 2$, и пусть $\Gamma(p, \Delta) = \max\{\gamma(p, G) \mid \Delta(G) = \Delta\}$. Если G — мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$, то $\gamma(p, G) \leqslant \Gamma(p, \Delta)$ и такую верхнюю оценку интервального p-хроматического числа естественно считать точной. Из теорем 5 и 6 вытекает, что $\Gamma(p, \Delta) \leqslant 2\Delta + p(p-1)/2$ и

$$\Gamma(p, 2) = \begin{cases} 5, & \text{если } p = 2; \\ 2p, & \text{если } p \geqslant 3. \end{cases}$$

В разделе 5 настоящей работы будут указаны точные значения функции $\Gamma(p, \Delta)$ при $p = 2$, а также получены утвердительные ответы на следующие вопросы.

1. Существует ли функция $f(p)$ такая, что $\Gamma(p, \Delta) \leqslant \Delta + f(p)$?

2. Существует ли функция $F(p)$ такая, что $\Gamma(p, \Delta) = \Delta$ при всех $\Delta \geqslant F(p)$?

4. Интервальный p-образ последовательности

Материал этого раздела является вспомогательным. Он будет использован при изучении точных верхних оценок интервального p-хроматического числа. Введем ряд новых понятий.

На протяжении всего раздела будем считать, что $p \geqslant 2$. Число c' назовем *p-образом* точки c, если $|c' - c| \geqslant p$. При $c' > c$ точка c' называется *правым,* а при $c' < c$ — *левым* p-образом точки c. Таким образом, каждая точка имеет два типа p-образов — левые и правые.

Будем называть *r-последовательностью* конечную числовую последовательность, имеющую r членов.

Пусть $c_1, \dots, c_r$ — последовательность, которую будем именовать начальной. *p-образом* этой *начальной последовательности* называется множество $\{c'_1, \dots, c'_r\}$, в котором c'_j является p-образом c_j и точки c'_1, c'_r попарно различны ($j = 1, \dots, r$). p-образ начальной последовательности называется *интервальным,* если он состоит из точек, образующих интервал (длины r). Если все точки интервального p-образа последовательности принадлежат некоторому интервалу, то будем говорить, что интервальный p-образ последовательности принадлежит этому интервалу.

Лемма 3. *Пусть $2 \leqslant r \leqslant 2p$ и c_i и c_j — различные члены начальной r-последовательности такие, что $c_i \leqslant c_j$. Пусть c_i' и c_j' — p-образы точек c_i и c_j соответственно в некотором интервальном p-образе последовательности. Тогда c_i' и c_j' либо являются p-образами одного и того же типа, либо c_i' — правый p-образ точки c_i, а c_j' — левый p-образ точки c_j.*

Доказательство. Пусть c_i' и c_j' — p-образы точек c_i и c_j соответственно — принадлежат интервальному p-образу начальной последовательности. Так как интервальный p-образ r-последовательности является интервалом длины r, то $|c_j' - c_i'| \leqslant r - 1 \leqslant 2p - 1$. Если бы, вопреки утверждению леммы, c_i' был левым p-образом точки c_i, а c_j' — правым p-образом точки c_j, то выполнялись бы неравенства $c_i' \leqslant c_j - p$, $c_j' \geqslant c_j + p$. Следовательно, $c_j' - c_i' \geqslant 2p$, что невозможно. Лемма 3 доказана.

Следом r-последовательности назовем множество $S = \{q_1, \ldots, q_t\}$, состоящее из тех и только тех чисел, которые встречаются среди членов последовательности. Число t называется *длиной* следа. *Кратностью* $\kappa(q_j)$ точки q_j следа называется число членов последовательности, равных q_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$. Число $r = \sum_{j=1}^{t} \kappa(q_j)$ называется *мощностью* следа.

Будем считать, что при $t \geqslant 2$ выполняются неравенства $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$; при этом точки q_i и q_{i+1} будем называть *соседними* $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$.

Если точка q следа имеет кратность κ, то ее *p-образом* будем называть множество, состоящее из κ различных точек, каждая из которых является p-образом точки q. Если все эти p-образы правые, то будем говорить о правом p-образе, а если левые, то о левом p-образе точки q. Объединение непересекающихся p-образов точек следа называется *p-образом следа.* Если это объединение является интервалом, то такой p-образ следа называется *интервальным.*

Ясно, что любая начальная последовательность и ее след имеют одни и те же p-образы. Поэтому для p-образа начальной последовательности и для p-образа ее следа справедливы одни и те же утверждения. В частности, по лемме 3 при $r \leqslant 2p$ любая точка следа начальной r-последовательности в интервальном p-образе этого следа имеет только правый или только левый p-образ.

Пусть некоторая точка q следа имеет кратность κ. Интервал $[q + p, q + p + \kappa - 1]$ называется *ближайшим правым p-образом,* интервал $[q - p - \kappa + 1, q - p]$ — *ближайшим левым p-образом* точки q.

След $\{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$ длины $t \geqslant 2$ называется *разреженным,* если для любых соседних точек q_i и q_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant t - 1)$ выполняется неравенство

$$q_{i+1} - q_i \geqslant \max\{\kappa(q_i), \kappa(q_{i+1})\}.$$

Очевидно, что для любых различных точек q' и q'' разреженного следа выполняется неравенство $|q' - q''| \geqslant \max\{\kappa(q'), \kappa(q'')\}$.

Лемма 4. *Пусть $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ — разреженный след длины $t \geqslant 2$, q' и q'' — различные точки следа такие, что $q' < q''$. Тогда ближайший p-образ точки q' какого-либо типа (правого или левого) не пересекается с ближайшим p-образом точки q'' того же типа и расположен левее его.*

Доказательство проведем только в случае правых p-образов; случай левых p-образов доказывается аналогично.

Пусть $\kappa' = \kappa(q')$, $\kappa'' = \kappa(q'')$. Ближайшими правыми p-образами точек q' и q'' являются интервалы $[q' + p, q' + p + \kappa' - 1]$ и $[q'' + p, q'' + p + \kappa'' - 1]$ соответственно. Так как след является разреженным, то $q'' - q' \geqslant \max\{\kappa', \kappa''\} > \kappa' - 1$. Следовательно, $q'' + p > q' + p + \kappa' - 1$, т. е. ближайший правый p-образ точки q' расположен левее ближайшего правого p-образа точки q''. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ — разреженный след длины $t \geqslant 2$ и мощности r. Пусть $[a, b]$ — интервал, длина которого не меньше r. Если ближайший правый (левый) p-образ точки q_t (точки q_1) принадлежит $[a, b]$, то существует интервальный p-образ следа, принадлежащий $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть ближайший правый p-образ точки q_t принадлежит $[a, b]$. По лемме 4 ближайшие правые p-образы остальных точек расположены левее и попарно не пересекаются. Сделав максимальный осторожный сдвиг вправо к точке b ближайших p-образов всех точек следа, получим интервал длины r, принадлежащий $[a, b]$ и являющийся интервальным p-образом следа. Аналогично если ближайший левый p-образ точки q_1 принадлежит $[a, b]$, то в результате максимального осторожного сдвига влево к точке a ближайших p-образов всех точек следа получим интервальный p-образ следа, принадлежащий $[a, b]$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть $\{q_1, q_2, \dots, q_t\}$ — разреженный след длины $t \geqslant 2$ и мощности r. Пусть $[a, b]$ — интервал длины не менее r, который содержит все точки следа. Предположим, что q' и q'' — соседние точки следа такие, что*

a) $q' < q''$;

b) *ближайший правый p-образ точки q' принадлежит $[a, b]$;*

c) *ближайший левый p-образ точки q'' принадлежит $[a, b]$. Тогда если*

$$q'' - q' \geqslant 2p - r - 1 + \kappa(q') + \kappa(q''), \tag{7}$$

то существует интервальный p-образ следа, принадлежащий $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $[\alpha', \beta']$ и $[\alpha'', \beta'']$ — ближайший правый p-образ точки q' и ближайший левый p-образ точки q'' соответственно. По лемме 4 ближайшие правые p-образы всех точек следа, меньших q'

(если такие точки есть), расположены левее $[\alpha', \beta']$. Так как по условию все точки следа принадлежат $[a, b]$ и $[\alpha', \beta'] \subseteq [a, b]$, то правые p-образы всех точек следа, не больших q', принадлежат $[a, b]$. Аналогично левые p-образы всех точек следа, не меньших q'', принадлежат $[a, b]$. Обозначим через S' множество ближайших правых p-образов всех точек следа, не больших q', а через S'' — множество ближайших левых p-образов всех точек следа, не меньших q''. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\beta' < \alpha''$. Сделаем максимальный осторожный сдвиг множества S' вправо к точке $\alpha'' - 1$ и максимальный осторожный сдвиг множества S'' влево к точке α''. Получим интервальный p-образ следа, принадлежащий $[a, b]$.

Случай 2. $\beta' \geqslant \alpha''$. Из неравенства (7) следует, что $\beta' - \alpha'' = (q' + p + \kappa(q') - 1) - (q'' - p - \kappa(q'') + 1 \leqslant r - 1$. Поэтому существует интервал $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ длины r, содержащий точки α'' и β'. Сделаем максимальный осторожный сдвиг множества S' вправо к точке β и максимальный осторожный сдвиг множества S'' влево к точке α. Получим интервальный p-образ следа, принадлежащий $[a, b]$. Лемма 6 доказана.

Пусть $p \geqslant 2$ и $r \geqslant 1$. Обозначим через $l(p, r)$ наименьшее натуральное такое, что для любой начальной r-последовательности и любого интервала длины $l(p, r)$ существует интервальный p-образ начальной последовательности, все члены которого принадлежат этому интервалу.

Корректность определения $l(p, r)$ устанавливается следующими простыми рассуждениями. Пусть имеется произвольная начальная r-последовательность. Рассмотрим произвольный интервал длины $(r+1)(r+2p-2)$. Разобьем его на $r + 1$ интервалов, длина каждого из которых равна $r + 2p - 2$. По крайней мере один из них не содержит ни одного члена начальной последовательности; пусть $[g, h]$ — такой интервал. Тогда $h - g + 1 = r + 2p - 2$. Положим $\alpha = g + p - 1$, $\beta = h - p + 1$. Длина интервала $[\alpha, \beta]$ равна $\beta - \alpha + 1 = h - g - 2p + 3 = r$. Легко видеть, что любая последовательность, составленная из r различных точек интервала $[\alpha, \beta]$, является интервальным p-образом начальной последовательности. Таким образом, число $l(p, r)$ существует при любых $p \geqslant 2$, $r \geqslant 1$ и $l(p, r) \leqslant (r+1)(r+2p-2)$.

С другой стороны,

$$l(p, r) \geqslant 2r + 2p - 2. \tag{8}$$

Действительно, пусть начальная r-последовательность такова, что все ее члены равны 0. Легко видеть, что не существует интервального p-образа такой начальной последовательности, принадлежащего интервалу $[-p - r + 2, p + r - 2]$, длина которого равна $2p + 2r - 3$. Отсюда следует (8). Точная формула для функции $l(p, r)$ при любых $p \geqslant 2$, $r \geqslant 1$

имеется в теореме 7, которая будет сформулирована после нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 7. *Пусть $r \leqslant 2p-2$. Тогда $l(p,r) = 2pr - r^2 + r$.*

Доказательство. Сначала докажем, что

$$l(p,r) \leqslant 2pr - r^2 + r. \tag{9}$$

По определению $l(p,r)$ существует такая начальная r-последовательность, не имеющая интервального p-образа, принадлежащего некоторому интервалу $[a,b]$ длины $l(p,r)-1$. Среди последовательностей, не имеющих интервального p-образа в $[a,b]$, выберем ту, след которой $\{q_1,\ldots,q_t\}$ имеет наименьшую длину. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что все точки следа принадлежат интервалу $[a+p-1, b-p+1]$.[3] Действительно, члены начальной последовательности, меньшие $a+p-1$, можно заменить на $a+p-1$, а члены, большие $b-p+1$, — на $b-p+1$; получится начальная последовательность, не имеющая интервального p-образа в $[a,b]$; при этом след новой последовательности не длиннее следа прежней последовательности. Итак, считаем, что $q_j \in [a+p-1, b-p+1]$ при любом $j=1,\ldots,t$. Если $t=1$, то все члены начальной последовательности равны некоторому числу $c \in [a,b]$, а так как интервальный p-образ начальной последовательности не принадлежит $[a,b]$, то выполняются неравенства $c-p-r+1 \leqslant a-1$ и $c+p+r-1 \geqslant b+1$. Следовательно, $l(p,r) = b-a+2 \leqslant 2r+2p-2 = 2pr-r^2+r-(r-1)(2p-2-r) \leqslant 2pr-r^2+r$. Таким образом, при $t=1$ неравенство (9) доказано.

Пусть $t \geqslant 2$. Покажем, что след $\{q_1, q_2 \ldots, q_t\}$ является разреженным. Действительно, пусть вопреки этому утверждению существуют соседние точки q' и q'', $q' < q''$, кратностей κ' и κ'' соответственно, такие, что $q''-q' < \max\{\kappa', \kappa''\}$. Обозначим через q одну из точек q' и q'', кратность которой равна $\max\{\kappa',\kappa''\}$. Изменим начальную последовательность, сделав равными q те элементы, которые были равны q' и q''. След новой последовательности будет иметь меньшую длину, и поэтому существует интервальный p-образ нового следа, принадлежащий $[a,b]$. При этом точка q нового следа имеет кратность $\kappa'+\kappa''$. Здесь возможны два случая.

Случай 1. Интервальному p-образу нового следа принадлежит правый p-образ точки q. Обозначим через P' множество, состоящее из κ' меньших точек, а через P'' — множество, состоящее из κ'' больших

[3] У интервала правый конец не меньше левого. Здесь соблюдается это требование, что легко показывается с помощью неравенства (8): $b-a = l(p,r)-2 \geqslant 2r+2p-4$, откуда $b-p+1 \geqslant a+p-1+2r-2 \geqslant a+p-1$.

точек правого p-образа точки q. Так как $q' \leqslant q$ и все точки правого p-образа точки q не меньше $q + p \geqslant q' + p$, то множество P' является правым p-образом точки q'. Покажем, что множество P'' является правым p-образом точки q'', т. е. каждая точка множества P'' не меньше $q'' + p$. Действительно, каждая точка P'' не меньше $q + p + \kappa'$. Поэтому если $q = q''$, то она не меньше $q'' + p$. Если же $q = q'$, то $\kappa' = \max\{\kappa', \kappa''\}$ и согласно предположению имеем $q'' < q' + \kappa'$. Следовательно, $q + p + \kappa' > q'' + p$. Таким образом, интервальный p-образ нового следа, принадлежащий $[a, b]$, является интервальным p-образом старого следа, что невозможно. Значит, след $\{q_1, q_2 \dots, q_t\}$ является разреженным.

Случай 2. Интервальному p-образу нового следа принадлежит левый p-образ точки q.

То, что и в этом случае след является разреженным, показывается аналогично.

Обозначим для краткости $\kappa_j = \kappa(q_j)$ $(j = 1, 2, \dots, t)$. В силу леммы 5 ближайший левый p-образ точки q_1 не принадлежит $[a, b]$. Поэтому

$$q_1 - p - \kappa_1 + 1 < a \quad \text{или} \quad q_1 - a \leqslant p + \kappa_1 - 2. \tag{10}$$

Аналогично $q_t + p + \kappa_t - 1 > b$, откуда

$$b - q_t \leqslant p + \kappa_t - 2. \tag{11}$$

Так как $q_1 \geqslant a+p-1$, то ближайший левый p-образ точки q_1 содержит точку $a - 1$. В силу леммы 4 ближайший левый p-образ любой другой точки следа не содержит точки $a - 1$, т. е. принадлежит отрезку $[a, b]$. Аналогично ближайший правый p-образ любой точки следа, отличной от q_t, принадлежит $[a, b]$. Тогда по лемме 6 при любом $j = 1, \dots, t - 1$ выполняется неравенство

$$q_{j+1} - q_j \leqslant 2p - r - 2 + \kappa_{j+1} + \kappa_j. \tag{12}$$

Учитывая (10), (11) и (12), имеем

$$\begin{aligned} l(p, r) = b - a + 2 = b - q_t + \sum_{j=1}^{t-1}(q_{j+1} - q_j) + q_1 - a + 2 \leqslant p + \kappa_t - 2 \\ + 2 + \sum_{j=1}^{t-1}(2p - r - 2 + \kappa_{j+1} + \kappa_j) + p + \kappa_1 - 2 + 2 = 2pt \\ + 2\sum_{i=1}^{t}\kappa_i - r(t - 1) - 2t = 2pt + 2r - r(t - 1) - 2t \\ = (2p - r - 2)t + 3r \leqslant (2p - r - 2)r + 3r = 2pr - r^2 + r. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (9) доказано. Теперь для завершения доказательства леммы остается убедиться в том, что

$$l(p,r) \geqslant 2pr - r^2 + r. \tag{13}$$

Рассмотрим начальную последовательность $c_1, \ldots, c_r$, члены которой вычисляются так:

$$c_j = p + (j-1)(2p - r) \quad (j = 1, \ldots, r). \tag{14}$$

Докажем, что в интервале $[a,b] = [1, 2pr - r^2 + r - 1]$ эта последовательность не имеет интервального p-образа; тем самым неравенство (13) будет доказано. При $r = 1$ имеем $c_1 = p$, $b = 2p - 1$ и ни правый, ни левый p-образы точки c_1 не принадлежат интервалу $[1, 2p-1]$. Пусть теперь $r \geqslant 2$. Предположим противное: пусть $[\alpha, \beta]$ — интервальный p-образ начальной последовательности, принадлежащий интервалу $[a,b]$. Поскольку $c_1 - p = 0 < \alpha$, то c_1 имеет правый p-образ в $[\alpha, \beta]$; поскольку $c_r + p = p + (r-1)(2p-r) + p = 2pr - r^2 + r > \beta$, то c_r имеет левый p-образ в $[\alpha, \beta]$. Следовательно, в последовательности (14) есть два таких члена c_k и c_{k+1}, что c_k имеет правый, а c_{k+1} — левый p-образ в $[\alpha, \beta]$. Пусть c'_k и c'_{k+1} — указанные p-образы точек c_k и c_{k+1} соответственно. Тогда $c'_k \geqslant c_k + p = p + (k-1)(2p-r) + p = 2pk - kr + r$; $c'_{k+1} \leqslant c_{k+1} - p = p + k(2p-r) - p = 2pk - kr$. Отсюда следует, что $c'_k - c'_{k+1} \geqslant r$. Это противоречит тому, что точки c'_k и c'_{k+1} принадлежат интервалу $[\alpha, \beta]$ длины r. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *При $r \geqslant 2p-2$ справедливо равенство $l(p,r) = 2r + 2p - 2$.*

Доказательство. По лемме 7 при $r = 2p-2$ справедливо равенство $l(p,r) = 2p(2p-2) - (2p-2)^2 + 2p - 2 = 2(2p-2) + 2p - 2 = 2r + 2p - 2$. Осталось доказать, что при $r \geqslant 2p-2$ справедливо неравенство $l(p, r+1) \leqslant l(p,r) + 2$. Докажем это. Пусть имеется начальная $(r+1)$-последовательность, и пусть $[a,b]$ — произвольный интервал длины $l(p,r)+2$. Нужно доказать, что начальная последовательность имеет интервальный p-образ в $[a,b]$. Рассмотрим интервал $[a+1, b-1]$ длины $l(p,r)$. Из начальной последовательности удалим произвольный член c и построим интервальный p-образ $[\alpha,\beta] \subseteq [a+1, b-1]$ получившейся начальной последовательности. Имеем $\beta - \alpha + 1 = r$; поэтому $((\beta + 1) - c) + (c - (\alpha - 1)) = \beta - \alpha + 2 = r + 1 \geqslant 2p - 1$. Отсюда следует, что справедливо по крайней мере одно из неравенств $(\beta + 1) - c \geqslant p$ и $c - (\alpha - 1) \geqslant p$. В первом случае интервал $[\alpha, \beta + 1]$, а во втором случае интервал $[\alpha - 1, \beta]$ будет интервальным p-образом исходной начальной $(r+1)$-последовательности. Каждый такой интервал является подмножеством $[a,b]$. Лемма 8 доказана.

Из лемм 7 и 8 вытекает

Теорема 7. *Пусть $p \geqslant 2$ и $r \geqslant 1$. Тогда*

$$l(p,r) = \begin{cases} 2pr - r^2 + r & \text{при } r \leqslant 2p-2; \\ 2r + 2p - 2 & \text{при } r \geqslant 2p-2. \end{cases} \tag{15}$$

Следствие 3. *При любом $r \geqslant 1$ справедливо равенство $l(2,r) = 2r+2$.*

Доказательство. В силу теоремы 7 имеем $l(2,1) = 4 = 2 \cdot 1 + 2$; $l(2,r) = 2r+2$ при $r \geqslant 2$. Следствие 3 доказано.

Пусть $p \geqslant 2$, $r \geqslant 1$, и пусть $L(p,r) = \max\{l(p,r') \mid 1 \leqslant r' \leqslant r\}$.

Очевидно, что при фиксированном p функция $L(p,r)$ монотонно не убывает с ростом r. Что же касается функции $l(p,r)$, то по следствию 3 при $p = 2$ она монотонно возрастает с ростом r; поэтому $L(2,r) = l(2,r) = 2r+2$. Далее, простой анализ формулы (15) показывает, что при $p \geqslant 3$ функция $l(p,r)$, рассматриваемая как функция одного переменного r, монотонно возрастает на интервале $[1,p]$, монотонно убывает на интервале $[p+1, 2p-2]$ и снова монотонно возрастает при $r \geqslant 2p-2$. При этом $l(p,p) = l(p,p+1) = p^2+p$. Поэтому при $p \geqslant 3$ имеем

$$L(p,r) = \begin{cases} 2pr - r^2 + r, & \text{если } r \leqslant p-1; \\ \max\{p^2+p, 2r+2p-2\}, & \text{если } r \geqslant p. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $p = 2$ выполняется равенство

$$2r+2 = \begin{cases} 2pr - r^2 + r & \text{при } r \leqslant p-1; \\ \max\{p^2+p, 2r+2p-2\} & \text{при } r \geqslant p. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. *Пусть $p \geqslant 2$ и $r \geqslant 1$. Тогда*

$$L(p,r) = \begin{cases} 2pr - r^2 + r & \text{при } r \leqslant p-1; \\ \max\{p^2+p, 2r+2p-2\} & \text{при } r \geqslant p. \end{cases} \tag{16}$$

5. О точной верхней оценке интервального p-хроматического числа

Введем понятие (t,p)-критического мультиграфа. Пусть $t > 0$ и $p \geqslant 2$. Мультиграф $K = (V,E)$ называется (t,p)-*критическим,* если $\gamma(p,K) \geqslant t$ и для любого собственного подграфа[4)] H мультиграфа K выполняется неравенство $\gamma(p,H) \leqslant t-1$. Очевидно, что (t,p)-критический мультиграф является связным. Далее, легко видеть, что любой мультиграф G с $\gamma(p,G) \geqslant t > 0$ имеет (t,p)-критический подграф: таковым является, например, связный подграф, имеющий наименьшее число ребер среди подграфов с интервальным p-хроматическим числом, не меньшим t.

[4)] Мультиграф $G' = (V',E')$ называется собственным подграфом мультиграфа $G = (V,E)$, если либо $V' \subset V$, $E' \subseteq E$, либо $V' = V$, $E' \subset E$.

Лемма 9. *Пусть $K = (V, E)$ является (t, p)-критическим мультиграфом степени $\Delta \geqslant 2$, причем $t \geqslant \Delta + 1$. Если $\delta(K) \geqslant p + 1$ и $t > 3p + 1$, то мультиграф K является $(t - 1, p)$-гладким.*

Доказательство. Утверждение очевидно, если $t-1$ — четное число или $t - 1 > \Delta$. Пусть теперь $t - 1 = \Delta$, причем Δ — нечетное число. Предположим, что, вопреки утверждению леммы, в K есть ребро $e = (x, y)$, где $\delta(x) = \Delta$ и $\delta(y) \leqslant 2p + 1$. Удалим это ребро; пусть φ — полная интервальная p-раскраска получившегося мультиграфа H цветами из $[1, \Delta]$. Тогда при вершине x мультиграфа H отсутствует либо цвет 1, либо цвет Δ. Без ограничения общности рассуждений (ибо можно рассматривать раскраску $\psi = t - \varphi$) будем считать, что при вершине x мультиграфа H отсутствует цвет 1. Пусть $[\alpha, \beta]$ — интервал, который образуют цвета, присутствующие при вершине y при раскраске φ. Так как степень вершины y в мультиграфе H не меньше p, то $\beta \geqslant p$. Поэтому если $\beta < \Delta$, то, окрасив инцидентор (x, e) в цвет 1, а инцидентор (y, e) — в цвет $\beta + 1$, получим полную интервальную p-раскраску инциденторов мультиграфа K с использованием цветов из $[1, \Delta]$, что противоречит неравенству $\gamma(p, K) \geqslant t$. Если же $\beta = \Delta$, то, поскольку длина интервала $[\alpha, \beta]$ не больше $2p$, имеем $\Delta - \alpha + 1 \leqslant 2p$. Следовательно, $\alpha - 1 \geqslant \Delta - 2p \geqslant p + 1$. Окрасив инцидентор (x, e) в цвет 1, а инцидентор (y, e) — в цвет $\alpha - 1$, снова получим полную интервальную p-раскраску инциденторов мультиграфа K с использованием цветов из $[1, \Delta]$, что невозможно. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $K = (V, E)$ — (t, p)-критический мультиграф степени $\Delta \geqslant 2$, причем $t > \Delta$. Если число $r \geqslant 1$ таково, что $t > L(p, r)$, то $\delta(K) \geqslant r + 1$.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению мультиграф K имеет вершину v такую, что $\delta(v) \leqslant r$. Так как K — связный мультиграф, то $\delta(v) \geqslant 1$. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — инцидентные вершине v ребра ($s = \delta(v) \leqslant r$). Обозначим через H подграф мультиграфа K, порожденный вершинами $V \setminus \{v\}$. Построим полную интервальную p-раскраску инциденторов мультиграфа H с использованием цветов из $[1, t - 1]$. Так как $t - 1 \geqslant \Delta$, то, не изменяя раскраски инциденторов H, цветами из $[1, t - 1]$ можно так раскрасить не примыкающие к v инциденторы ребер $e_1, \ldots, e_s$, чтобы получилась частичная интервальная p-раскраска инциденторов мультиграфа K, при которой неокрашенными являются только инциденторы при вершине v. Пусть c_j — цвет не примыкающего к v инцидентора ребра e_j ($j = 1, \ldots, s$). Так как $r \geqslant s$ и $t - 1 \geqslant L(p, r) \geqslant l(p, s)$, то существует интервальный p-образ $c'_1, \ldots, c'_s$ последовательности $c_1, \ldots, c_s$, принадлежащий интервалу $[1, t - 1]$, где c'_j — p-образ точки c_j ($j = 1, \ldots, s$). Окрасив в цвет c'_j примыкающий

к v инцидентор ребра e_j $(j = 1, \dots, s)$, получим полную интервальную p-раскраску инциденторов мультиграфа K с использованием цветов из $[1, t-1]$. Это противоречит неравенству $\gamma(p, K) \geqslant t$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant L(p, 2p-1)$. Тогда $\Gamma(p, \Delta) = \Delta$.*

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению выполняется неравенство $\gamma(p, G) \geqslant \Delta + 1$. Пусть $t = \Delta + 1$. Мультиграф G в качестве подграфа содержит (t, p)-критический мультиграф K. Очевидно, что $\Delta(K) \leqslant \Delta < t$. Так как $t > L(p, 2p-1)$, то по лемме 10 выполняется неравенство $\delta(K) \geqslant 2p > p + 1$. Покажем, что $t > 3p + 1$. Действительно, $t > \Delta \geqslant L(p, 2p-1) \geqslant l(p, 2p-1)$, а в силу неравенства (8) имеем $l(p, 2p-1) \geqslant 2(2p-1) + 2p - 2 = 3p + 1 + 3p - 5 > 3p + 1$. По лемме 9 мультиграф K является (Δ, p)-гладким. Так как $\delta(K) \geqslant 2p$, то по следствию 2 выполняется равенство $\gamma(p, K) = \Delta$, что противоречит неравенству $\gamma(p, K) \geqslant t = \Delta + 1$. Лемма 11 доказана.

Утверждение леммы 11 будет усилено в теореме 9. Но сначала докажем

Утверждение 3.

$$L(p, 2p-1) = \begin{cases} p^2 + p + 2, & \text{если } 2 \leqslant p \leqslant 3; \\ p^2 + p, & \text{если } p \geqslant 4. \end{cases} \tag{17}$$

При всех $p \geqslant 2$ справедливо равенство

$$L(p, 2p-2) = p^2 + p. \tag{18}$$

Доказательство. По формуле (16) имеем $L(p, 2p-1) = \max\{p^2 + p, 2(2p-1) + 2p - 2\} = \max\{p^2 + p, p^2 + p - (p-1)(p-4)\}$. Отсюда следует формула (17). Далее, имеем $L(p, 2p-2) = \max\{p^2 + p, 2(2p-2) + 2p - 2\} = \max\{p^2 + p, p^2 + p - (p-2)(p-3)\}$, откуда следует (18). Утверждение 3 доказано.

Теорема 9. *Пусть $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant p^2 + p$. Тогда $\Gamma(p, \Delta) = \Delta$.*

Доказательство. Так как по утверждению 3 при $p \geqslant 4$ справедливо равенство $L(p, 2p-1) = p^2 + p$, то при $p \geqslant 4$ теорема справедлива по лемме 11. При $p = 2$ и $p = 3$ по формуле (17) имеем $L(p, 2p-1) = p^2 + p + 2$, и по лемме 11 равенство $\Gamma(p, \Delta) = \Delta$ выполняется при $\Delta \geqslant p^2 + p + 2$. Осталось доказать, что при $2 \leqslant p \leqslant 3$ равенство $\Gamma(p, \Delta) = \Delta$ выполняется как при $\Delta = p^2 + p$, так и при $\Delta = p^2 + p + 1$. Пусть $p = 2$ или $p = 3$ и $\Delta = p^2 + p$ или $\Delta = p^2 + p + 1$. Предположим противное. Тогда существует такой мультиграф G степени Δ, что $\gamma(p, G) > \Delta$. Положим $t = \Delta + 1$. Пусть K — (t, p)-критический подграф мультиграфа G. Так как $t > p^2 + p = L(p, 2p-2)$, то по лемме 10 имеем $\delta(K) \geqslant 2p - 1 \geqslant p + 1$. Покажем, что K является $(t-1, p)$-гладким мультиграфом. Это следует

из определения (T, p)-гладкого мультиграфа, если $t-1$ — четное число. Пусть теперь $t-1$ — нечетное число. Так как $t-1 \geqslant p^2+p$, а p^2+p — четное число, то $t-1 \geqslant p^2+p+1 \geqslant 3p+1$. Поэтому $t > 3p+1$ и $(t-1,p)$-гладкость мультиграфа K следует из леммы 9. Следовательно, если $\delta(K) \geqslant 2p$, то по следствию 2 имеем $\gamma(p,K) = \Delta(K) \leqslant \Delta = t-1$, что невозможно. Поэтому $\delta(K) = 2p-1$. Пусть имеет место одно из равенств $\Delta = t-1 = k$ или $\Delta = t-1 = 2k+1$. Так как K является (Δ, p)-гладким мультиграфом и $\Delta \geqslant p^2+p \geqslant 2p$, то по лемме 2 существует полная квазиинтервальная p-раскраска инциденторов мультиграфа K цветами из $[1,\Delta]$, при которой цвета, присутствующие при каждой вершине степени $2p-1$, принадлежат интервалу $[k-p+1, k+p]$. Рассмотрим множество всех полных квазиинтервальных p-раскрасок инциденторов мультиграфа K цветами из $[1,\Delta]$, при которой цвета, присутствующие при каждой дефектной вершине (степень каждой такой вершины равна $2p-1$), принадлежат интервалу $[k-p+1, k+p]$. Пусть φ — та из этих раскрасок, при которой множество Z дефектных вершин имеет наименьшую мощность. Так как по предположению $\gamma(p,K) > \Delta$, то $Z \neq \varnothing$. Возьмем произвольную вершину $z \in Z$ и покажем, что, не изменяя цветов инциденторов при других вершинах мультиграфа K, можно так перекрасить инциденторы при z, используя только цвета из $[1,\Delta]$, чтобы после перекраски получилась полная правильная p-раскраска инциденторов мультиграфа K, при которой присутствующие в z цвета образуют интервал. Это противоречит выбору раскраски φ и, следовательно, доказывает теорему.

Обозначим через c просвет в вершине z при раскраске φ. Через c_j обозначим цвет инцидентора, сопряженного с инцидентором цвета j при вершине z $(j \in [k-p+1, k+p] \setminus \{c\})$. Теперь случаи $p=2$ и $p=3$ удобно рассмотреть отдельно.

Пусть $p=2$. Тогда либо $\Delta = 6$, либо $\Delta = 7$, и присутствующие при вершине z цвета принадлежат интервалу $[2,5]$. Значит, либо $c=3$, либо $c=4$. Пусть $c=3$. Если $c_2 \geqslant 5$, то инцидентор цвета 2 (при z) можно перекрасить в цвет 3. Если же $c_2 \leqslant 4$, то инцидентор цвета 2 можно перекрасить в цвет 6. В результате перекраски получится такая новая полная 2-раскраска инциденторов мультиграфа K цветами из $[1,\Delta]$, что присутствующие при z цвета образуют интервал. Аналогично если $c=4$, то либо $c_5 \leqslant 2$, либо $c_5 \geqslant 3$; в первом случае инцидентор цвета 5 можно перекрасить в цвет 4, во втором случае — в цвет 1. Таким образом, в случае $p=2$ теорема 9 доказана.

Пусть $p=3$. Тогда либо $\Delta = 12$, либо $\Delta = 13$, и присутствующие при дефектной вершине z цвета принадлежат интервалу $[4,9]$. Просвет c может принять любое значение из интервала $[5,8]$. Каждый случай

рассмотрим отдельно.

Случай 1. Пусть $c = 5$. Тогда инцидентор цвета 4 можно перекрасить либо в цвет 5 (если $c_4 \geqslant 8$), либо в цвет 10 (если $c_4 \leqslant 7$). После перекраски получится такая полная 3-раскраска инциденторов цветами из $[1, \Delta]$, что присутствующие при z цвета образуют интервал.

Случай 2. Пусть $c = 8$. Тогда инцидентор цвета 9 можно перекрасить либо в цвет 8 (если $c_9 \leqslant 5$), либо в цвет 3 (если $c_9 \geqslant 6$).

Случай 3. Пусть $c = 6$. Если какой-либо из цветов c_s, где $s \in \{4, 5, 8, 9\}$, не принадлежит интервалу $[4, 8]$, то после перекраски инцидентора цвета s в цвет 6 либо вершина z перестанет быть дефектной, либо мы окажемся в условиях одного из случаев 1 и 2. Поэтому будем считать, что указанные цвета принадлежат интервалу $[4, 8]$. Так как φ является 3-раскраской, то $c_4 \in [7, 8]$, $c_5 = 8$, $c_8 \in [4, 5]$ и $c_9 \in [4, 6]$. Кроме того, $c_7 \in [1, 4] \cup [10, \Delta]$. Если $c_7 \in [1, 4]$, то инцидентор цвета 4 перекрасим в цвет 11, цвета 5 — в цвет 12, цвета 7 — в цвет 10. После перекраски присутствующие в вершине z цвета образуют интервал $[8, 12]$. Пусть теперь $c_7 \in [10, \Delta]$. Если $c_9 = 4$, то инцидентор цвета 9 перекрасим в цвет 7, а инцидентор цвета 7 — в цвет 6; в вершине z будут присутствовать все цвета из интервала $[4, 8]$. Если же $c_9 > 4$, то инцидентор цвета 8 перекрасим в цвет 1, инцидентор цвета 9 — в цвет 2, цвета 7 — в цвет 3. Присутствующие при вершине z цвета будут образовывать интервал $[1, 5]$.

Случай 4. Пусть $c = 7$. Если в цвет 7 можно перекрасить какой-либо инцидентор при z, то после перекраски либо вершина z перестанет быть дефектной, либо мы окажемся в условиях одного из рассмотренных случаев. Если же указанной перекраски в цвет 7 не существует, то все цвета c_i, где $i \in \{4, 5, 6, 8, 9\}$, принадлежат интервалу $[5, 9]$. Отсюда и из того, что φ является 3-раскраской, следует, что $c_4 \in [7, 9]$, $c_5 \in [8, 9]$, $c_6 = 9$, $c_8 = 5$ и $c_9 \in [5, 6]$. Перекрасив инцидентор цвета 8 в цвет 1, цвета 9 в цвет 2, цвета 6 в цвет 3, получим такую полную правильную p-раскраску инциденторов мультиграфа K, что присутствующие при вершине z цвета образуют интервал $[1, 5]$. Теорема 9 доказана.

Из теоремы 9 и очевидного неравенства $\Gamma(p, \Delta + 1) \geqslant \Gamma(p, \Delta)$ вытекает

Следствие 4. *Пусть $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$. Тогда*

$$\Gamma(p, \Delta) \leqslant \max\{\Delta, p^2 + p\}. \tag{19}$$

Проблема отыскания точной верхней оценки для интервального p-хроматического числа сводится к отысканию значений функции $\Gamma(p, \Delta)$ при $\Delta \in [2, p^2 + p - 1]$. На сегодняшний день мы можем полностью решить эту проблему только в случае $p = 2$.

Теорема 10. *Имеет место равенство*

$$\Gamma(2,\Delta) = \begin{cases} 5, & \textit{если } \Delta = 2; \\ \max\{\Delta, 6\}, & \textit{если } \Delta \geqslant 3. \end{cases}$$

Доказательство. При $\Delta = 2$ утверждение следует из теоремы 6, при $\Delta \geqslant 6$ — из теоремы 9. Далее, в силу утверждения 1 имеем $\Gamma(2,3) \geqslant 6$. Так как $\Gamma(p,\Delta+1) \geqslant \Gamma(p,\Delta)$ и $\Gamma(2,6) = 6$, то при $3 \leqslant \Delta \leqslant 5$ имеем $\Gamma(2,\Delta) = 6$. Теорема 10 доказана.

Комбинируя неравенства (5) и (19), можно получить следующую верхнюю оценку для $\Gamma(p,\Delta)$.

Следствие 5. *Пусть $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$. Тогда*

$$\Gamma(p,\Delta) \leqslant \min\{2\Delta + p(p-1)/2, \max\{\Delta, p^2+p\}\}. \tag{20}$$

Следствие 6. *Пусть $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$. Тогда $\Gamma(p,\Delta) \leqslant \Delta + (3p^2+p)/4$.*

Доказательство. В силу формулы (20) достаточно доказать, что при любых $\Delta \geqslant 2$ и $p \geqslant 2$ имеет место по крайней мере одно из неравенств: $\Delta + (3p^2+p)/4 \geqslant 2\Delta + p(p-1)/2$ и $\Delta + (3p^2+p)/4 \geqslant p^2+p$. Если $2 \leqslant \Delta \leqslant (p^2+3p)/4$, то $\Delta + (3p^2+p)/4 = \Delta + (p^2+3p)/4 + p(p-1)/2 \geqslant 2\Delta + p(p-1)/2$. Если $\Delta > (p^2+3p)/4$, то $\Delta + (3p^2+p)/4 > (p^2+3p)/4 + (3p^2+p)/4 = p^2+p$. Следствие 6 доказано.

Следствие 6, конечно, положительно отвечает на первый вопрос, поставленный в конце раздела 3 настоящей статьи, однако автор предполагает, что при любых $p \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$ справедлива более сильная оценка $\Gamma(p,\Delta) \leqslant \Delta + p(p+1)/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Асратян А. С., Камалян Р. Р.** Интервальные раскраски ребер мультиграфа // Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1987. С. 25–34.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
3. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.
4. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
5. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.

6. **Евстигнеев В. А., Касьянов В. Н.** Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, 1999.
7. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
8. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
9. **Севастьянов С. В.** Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа // Методы дискрет. анализа в решении экстремальных задач: Сб. науч. тр. Вып. 50. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 61–72.
10. **Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R.** List edge and list total colourings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. V. 71, N 2. P. 184–204.
11. **Jensen T. R., Toft B.** Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65070 Одесса, Украина.
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
13 ноября 2002 г.