ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2003. Серия 1. Том 10, № 1, 41–60

УДК 519.71

О ЧИСЛЕ БЕСПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee, \oplus, -\}$

О. В. Зубков

Рассматриваются бесповторные булевы функции в базисе $\{\&, \vee, \oplus, -\}$. Указывается канонический вид формул для бесповторных функций в этом базисе. Приводится метод построения множества таких формул от n переменных и производится подсчет числа его элементов. С использованием этих результатов получены верхняя и нижняя оценки для числа бесповторных булевых функций от n переменных в рассматриваемом базисе.

Введение

Формула Φ над базисом B называется *бесповторной,* если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется *бесповторной* в базисе B, если найдется бесповторная формула Φ над B, представляющая функцию f.

Число бесповторных булевых функций от n переменных в каком-либо базисе является его важной характеристикой. Наиболее полно это число было исследовано для бесповторных булевых функций в базисах $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ и $B_1 = \{\&, \vee, \oplus, -\}$. В работах [3, 4] были получены рекуррентные формулы для числа бесповторных функций в базисах B_0 и B_1 соответственно. Эти формулы позволяют найти число бесповторных функций от n переменных, но не дают возможности оценить это число при достаточно больших значениях n. В [1] автором данной статьи была получена формула для числа бесповторных булевых функций в базисе B_0, не содержащая рекуррентности в явном виде. Эта формула позволяет найти верхнюю и нижнюю оценки для числа таких функций. В настоящей работе обосновывается метод получения аналогичной формулы для числа бесповторных функций в базисе B_1.

Отметим, что для любой подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ формулы Φ, где $* \in \{\&, \vee, \oplus\}$, можно однозначно указать формулы Φ_1 и Φ_2, из которых состоит рассматриваемая подформула. В таких случаях будем говорить, что Φ_1 подставлена на место первой переменной, а Φ_2 — на место второй переменной рассматриваемого вхождения функции $*$ в формулу Φ.

Базисные функции от двух переменных xy, $x \vee y$ и $x \oplus y$ в дальнейшем будем называть бинарными.

1. Построение канонической формулы для бесповторной функции в базисе B_1

Для нахождения числа бесповторных булевых функций от n переменных в базисе B_1 воспользуемся следующим способом. Каждой такой функции f поставим в соответствие бесповторную формулу над B_1, представляющую f и имеющую строго фиксированный вид. Формулы этого вида далее будем называть *упорядоченными* над B_1. Так как любая бесповторная функция в базисе B_1 может быть представлена упорядоченной формулой над B_1 единственным образом, то, находя число таких формул от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем число бесповторных функций от n переменных.

Определение 1. *Упорядоченной* формулой над B_1 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть формулу над B_1, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) формула Φ является бесповторной;

2) в формуле Φ отрицания могут быть только над переменными;

3) для любой подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ формулы Φ, где $* \in \{\&, \vee, \oplus\}$, переменная с наименьшим индексом среди всех переменных подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ содержится в подформуле Φ_1;

4) в формуле Φ не содержится подформул вида $(\Phi_1 \& \Phi_2) \& \Phi_3$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3$, $(\Phi_1 \oplus \Phi_2) \oplus \Phi_3$;

5) для любой подформулы $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ формулы Φ переменная с наименьшим индексом среди переменных подформулы Φ_2 входит в Φ_2 без отрицания.

Нетрудно заметить, что для любой бесповторной над B_1 функции f от n переменных существует по крайней мере одна представляющая ее упорядоченная над B_1 формула. Действительно, так как функция f бесповторная над B_1, то существует бесповторная формула над B_1 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая представляет f. В этой формуле с помощью эквивалентных преобразований вида $\overline{\Psi_1 \& \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 \vee \overline{\Psi}_2$, $\overline{\Psi_1 \vee \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 \& \overline{\Psi}_2$ и $\overline{\Psi_1 \oplus \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 \oplus \Psi_2$ необходимо опустить все отрицания на переменные, в силу чего будет выполнено условие 2 упорядоченности формулы над B_1. Очевидно, что, используя те же эквивалентности, а также преобразование вида $\overline{\Psi}_1 \oplus \Psi_2 = \Psi_1 \oplus \overline{\Psi}_2$, для каждого вхождения $\oplus$ в формулу можно добиться выполнения условия 5. Далее в силу коммутативности базисных функций легко добиться выполнения условия 3, а в силу их ассоциативности однозначно расставить скобки с учетом условия 4.

Полученная в результате этих преобразований формула представляет функцию f и является упорядоченной над B_1.

Покажем, что упорядоченная над B_1 формула является единственной для представляемой ей функции.

Пусть Φ — упорядоченная над B_1 формула. Обозначим через $\_\Phi$ упорядоченную над B_1 формулу, полученную из формулы $\overline{\Phi}$ путем опускания отрицаний на переменные.

Лемма 1. *В каждой паре упорядоченных над B_1 термов Ψ и $\_\Psi$ ровно один не имеет отрицания над наименьшей по индексу переменной.*

Доказательство проведем индукцией по числу переменных формулы Ψ.

Для формул одной переменной утверждение леммы очевидно. Пусть упорядоченная над B_1 формула Ψ зависит от n переменных.

Если $\Psi = \Psi_1 \& \Psi_2$, то $\_\Psi = \_\Psi_1 \vee \_\Psi_2$ и по предположению индукции среди формул Ψ_1 и $\_\Psi_1$ ровно одна не имеет отрицания над наименьшей по индексу переменной. Так как такая переменная в подформуле Ψ_1 является наименьшей по индексу переменной в формуле Ψ и аналогичное утверждение верно для формул $\_\Psi_1$ и $\_\Psi$, то утверждение леммы для формул вида $\Psi_1 \& \Psi_2$ верно.

Аналогично доказывается лемма для случая $\Psi = \Psi_1 \vee \Psi_2$.

Если $\Psi = \Psi_1 \oplus \Psi_2$, то $\_\Psi$ равен либо $\_\Psi_1 \oplus \Psi_2$, либо $\Psi_1 \oplus \_\Psi_2$. Сначала покажем, что случай $\_\Psi = \Psi_1 \oplus \_\Psi_2$ невозможен. Действительно, формулы Ψ и $\_\Psi$ являются упорядоченными над B_1, но по предположению индукции среди формул Ψ_2 и $\_\Psi_2$ одна имеет отрицание над наименьшей по индексу переменной. Это означает, что либо Ψ, либо $\_\Psi$ не удовлетворяет условию 5 упорядоченности над B_1. Таким образом, $\_\Psi = \_\Psi_1 \oplus \Psi_2$. По предположению индукции среди формул Ψ_1 и $\_\Psi_1$ ровно одна не имеет отрицания над наименьшей по индексу переменной. Так как такая переменная в подформуле Ψ_1 является наименьшей по индексу переменной в формуле Ψ и аналогичное утверждение верно для формул $\_\Psi_1$ и $\_\Psi$, то утверждение леммы для формул вида $\Psi_1 \oplus \Psi_2$ верно. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Среди формул, представляющих бесповторную функцию f над базисом B_1, содержится ровно одна упорядоченная над B_1 формула.*

Доказательство проведем индукцией по числу существенных переменных функции f.

Для функций одного переменного утверждение леммы очевидно.

Шаг индукции. Пусть имеются две упорядоченные над B_1 формулы Φ и Ψ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющих одну и ту же функцию f. Обозначим через g внешнюю функцию формулы Φ.

Очевидно, что $g \in \{\&, \vee, \oplus\}$. Через $g(z_1, \ldots, z_k)$ обозначим многоместную функцию g. Тогда формулу Φ можно записать в виде $g(\Phi_1(\tilde{y}_1), \ldots, \Phi_s(\tilde{y}_s))$, где $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_s$ — разбиение множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на непересекающиеся подмножества. Внешние функции подформул $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ отличны от g. Обозначим через h_i функцию, которую представляет подформула Φ_i.

Согласно доказательству известного результата А. В. Кузнецова [2] о бесповторных булевых функциях любая бесповторная формула Ψ, представляющая функцию f, должна иметь вид $g(\Psi_1(\tilde{y}_1), \ldots, \Psi_s(\tilde{y}_s))$, где подформула Ψ_i представляет либо h_i, либо $\overline{h}_i$. Покажем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, из упорядоченности над B_1 формулы Ψ следует, что Ψ_i представляет функцию h_i.

Пусть $g = \&$. Допустим, что для некоторого m, $1 \leqslant m \leqslant s$, формула Ψ_m представляет функцию $\overline{h}_m$. Так как функция f не является тождественно нулевой, то найдется двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Обозначим через $\tilde{\alpha}_m$ ту часть набора $\tilde{\alpha}$, которая подставляется вместо переменных $\tilde{y}_m$ в подформулу Φ_m. В силу того, что $g = \&$ и $\Phi(\tilde{\alpha}) = 1$, получаем $\Phi_m(\tilde{\alpha}_m) = 1$. Значит, $\Psi_m(\tilde{\alpha}_m) = 0$, т. е. при подстановке набора $\tilde{\alpha}$ в формулу Ψ получим 0, а это означает, что формула Ψ не может представлять функцию f. Полученное противоречие показывает, что указанного m не существует, т. е. для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, подформула Ψ_i представляет функцию h_i.

Аналогично рассматривается случай $g = \vee$.

Пусть $g = \oplus$. Так как Φ_i — подформула упорядоченной над B_1 формулы Φ, то Φ_i — упорядоченная над B_1 формула от переменных $\tilde{y}_i$. Формула Φ имеет вид $\Phi_1 \oplus (\Phi_2 \oplus (\Phi_3 \oplus \cdots \oplus (\Phi_{s-1} \oplus \Phi_s) \cdots))$. Поэтому по условию 5 упорядоченности над B_1 подформулы $\Phi_s, \Phi_{s-1}, \ldots, \Phi_3, \Phi_2$ не имеют отрицания над своими наименьшими по индексу переменными. То же самое можно сказать и о подформулах $\Psi_s, \Psi_{s-1}, \ldots, \Psi_3, \Psi_2$ в формуле Ψ. Если формула Φ_i, $2 \leqslant i \leqslant s$, представляет функцию h_i, то упорядоченная над B_1 формула $\_\Phi_i$ представляет функцию $\overline{h}_i$. По предположению индукции формула Φ_i является единственной упорядоченной над B_1 для функции h_i. То же самое верно в отношении формулы $\_\Phi_i$ и функции $\overline{h}_i$. Так как упорядоченная над B_1 формула Ψ_i может представлять либо h_i, либо $\overline{h}_i$, то формула Ψ_i совпадает или с Φ_i, или с $\_\Phi_i$. По лемме 1 и в силу того, что терм Φ_i не имеет отрицания над наименьшей по индексу переменной, следует, что формула $\_\Phi_i$ имеет отрицание над такой переменной. Отсюда и из упорядоченности над B_1 формулы Ψ следует, что подформулы $\Psi_2, \ldots, \Psi_s$ совпадают соответственно с подформулами $\Phi_2, \ldots, \Phi_s$. Отсюда следует, что подформула Ψ_1 должна представлять функцию h_1 и совпадать с подформулой Φ_1.

Осталось заметить, что в силу условий 3 и 4 упорядоченности над B_1 формул Φ и Ψ скобки у внешней многоместной функции g, а также порядок следования подформул $\Phi_i(\tilde{y}_i)$ установлены однозначно и одинаково. Таким образом, формулы Φ и Ψ совпадают. Лемма 2 доказана.

2. Построение множества цепей и подсчет числа его элементов

Определение 2. Формулу над базисом B_1 одной переменной x будем называть цепью, если она может быть получена по индукции:

1) $x\&x$, $x\&\overline{x}$, $x \vee x$, $x \vee \overline{x}$, $x \oplus x$ — цепь;

2) если Φ_1 цепь и ее внешняя функция не $\&$, то $\Phi_1\&x$ и $\Phi_1\&\overline{x}$ — цепи;

3) если Φ_2 цепь и ее внешняя функция не $\vee$, то $\Phi_2 \vee x$ и $\Phi_2 \vee \overline{x}$ — цепи;

4) если Φ_3 цепь и ее внешняя функция не $\oplus$, то $\Phi_3 \oplus x$ — цепь.

Длиной цепи называется число вхождений в нее символов бинарных функций из B_1. Следует отметить, что на место первого аргумента самого первого (при записи цепи в строку) вхождения символа бинарной функции из B_1 подставлена переменная x без отрицания. Это место в дальнейшем будем называть ключевым для рассматриваемой цепи. Отметим также, что на место второго аргумента любого вхождения операции $\oplus$ в цепь подставлена переменная без отрицания.

Пример 1.

$\Phi_1 = (((x\&x) \vee \overline{x}) \oplus x)\&\overline{x}$ — цепь.

$\Phi_2 = ((x \oplus x) \vee \overline{x}) \vee x$ — не цепь, так как два раза подряд встречается вхождение $\vee$.

$\Phi_3 = (\overline{x} \vee x) \oplus x$ — не цепь, так как на ключевом месте находится переменная x с отрицанием.

$\Phi_4 = (x\&x) \oplus \overline{x}$ — не цепь, так как имеется вхождение операции $\oplus$, у которой на место второго аргумента подставлена переменная x с отрицанием.

Лемма 3. *Пусть L_n есть число цепей длины n. Тогда*

$$L_n = \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}.$$

Доказательство. Очевидно, что $L_1 = 5$. Пусть $L_n^{\&}$ — число цепей длины n с внешней функцией $\&$. По аналогии определим числа $L_n^{\vee}$ и $L_n^{\oplus}$. Видно, что $L_n = L_n^{\&} + L_n^{\vee} + L_n^{\oplus}$. Из построения цепи следует, что $L_n^{\&} = 2(L_{n-1}^{\vee} + L_{n-1}^{\oplus})$; $L_n^{\vee} = 2(L_{n-1}^{\&} + L_{n-1}^{\oplus})$; $L_n^{\oplus} = L_{n-1}^{\&} + L_{n-1}^{\vee}$.

В силу закона двойственности имеем $L_n^{\&} = L_n^{\vee}$. Поэтому

$$L_n = 2L_n^{\&} + L_n^{\oplus} = 2L_n^{\&} + 2L_{n-1}^{\&}. \tag{1}$$

$$L_n^{\&} = 2L_{n-1}^{\vee} + 2(L_{n-2}^{\&} + L_{n-2}^{\vee}) = 2L_{n-1}^{\&} + 4L_{n-2}^{\&}.$$

Решим рекуррентное уравнение $L_n^{\&} - 2L_{n-1}^{\&} - 4L_{n-2}^{\&} = 0$. Корнями соответствующего квадратного уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$ являются $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{5}$. Решение ищем в виде

$$L_n^{\&} = c_1\left(1 + \sqrt{5}\right)^n + c_2\left(1 - \sqrt{5}\right)^n,$$

где c_1 и c_2 — неопределенные коэффициенты, которые можно найти из начальных условий $L_1^{\&} = 2$ и $L_2^{\&} = 6$. Решая систему относительно c_1 и c_2, получаем

$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{4\sqrt{5}}; \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$L_n^{\&} = \frac{\sqrt{5}+3}{4\sqrt{5}}\left(1 + \sqrt{5}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{4\sqrt{5}}\left(1 - \sqrt{5}\right)^n.$$

Подставляя это выражение в (1), получаем

$$\begin{aligned} L_n = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} & \left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^n + \left(1 + \sqrt{5}\right)^{n-1}\right] \\ & + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left[\left(1 - \sqrt{5}\right)^n + \left(1 - \sqrt{5}\right)^{n-1}\right] \\ & = \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\left(1 + \sqrt{5}\right)^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\left(1 - \sqrt{5}\right)^{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 3 доказана.

3. Построение множества упорядоченных над B_1 формул и подсчет числа его элементов

Определение 3. На множестве невозрастающих последовательностей натуральных чисел введем бинарное отношение. Будем говорить, что последовательность M_2 можно получить из последовательности $M_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ w способами, если M_2 может быть получена из M_1 либо

а) путем увеличения какого-то числа q_i в последовательности M_1 на единицу, в этом случае $w = (q_i + 1) \cdot R(q_i)$, где $R(q_i)$ — количество вхождений числа q_i в M_1;

б) путем приписывания справа к M_1 единицы, в этом случае $w = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i - k + 1$.

Определение 4. *Путем* к невозрастающей последовательности M называется набор невозрастающих последовательностей $M_1, M_2, \ldots, M_N$, где M_1 — последовательность, состоящая из одной единицы, $M_N = M$; последовательность M_{i+1} можно получить из последовательности M_i одним из двух путей, приведенных в определении 3. Обозначим через w_i число способов получения M_{i+1} из M_i. *Ценой* этого пути назовем величину $\prod\limits_{i=1}^{s-1} w_i$.

Определение 5. *Ценой* невозрастающей последовательности M называется величина $P(M)$, равная сумме цен по множеству всех путей к последовательности M. Цена последовательности, состоящей из одной единицы, по определению равна 1.

Пример 2. Построим всевозможные пути к последовательности (2, 2, 1, 1) и определим ее цену. Представим эти пути в виде ориентированного графа, в вершинах которого находятся невозрастающие последовательности; если последовательность M_i можно получить из последовательности M_j w_{ij} способами, то соответствующие вершины соединены ориентированной дугой кратности w_{ij} (при этом рядом с дугой кратности w_{ij} будем писать ее кратность.) Граф, содержащий всевозможные пути к последовательности (2, 2, 1, 1), изображен на рис. 1.

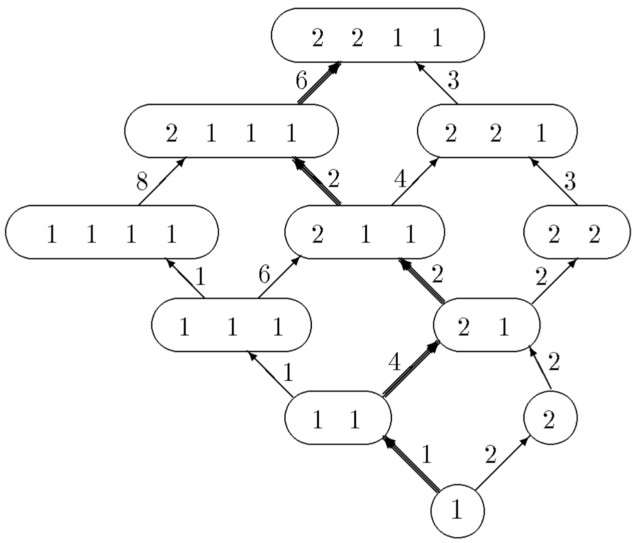

Рис. 1

Всего к этой последовательности существует девять путей:

$P(2,2,1,1) = (1\cdot1\cdot1\cdot8\cdot6)+(1\cdot1\cdot6\cdot2\cdot6)+(1\cdot1\cdot6\cdot4\cdot3)+(1\cdot4\cdot2\cdot2\cdot6)+(1\cdot4\cdot2\cdot4\cdot3)+(1\cdot4\cdot2\cdot3\cdot3)+(2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot6)+(2\cdot2\cdot2\cdot4\cdot3)+(2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3) =$

$48 + 72 + 72 + 96 + 96 + 72 + 96 + 96 + 72 = 720.$

Теорема 1. *Число S_n бесповторных булевых функций от n переменных в базисе B_1 задается формулой*

$$S_n = 2 \sum_{M \in T_{n-1}} \left(P(M) \prod_{i=1}^{k} L_{q_i} \right),$$

где T_{n-1} — множество невозрастающих последовательностей натуральных чисел, у каждой из которых сумма элементов равна $n-1$; $P(M)$ — цена соответствующей последовательности $M = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$;

$$L_q = \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{q-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^{q-1}.$$

Доказательство. По лемме 2 каждой бесповторной булевой функции в B_1 взаимно однозначно ставится в соответствие упорядоченная над B_1 формула, которая ее представляет. Таким образом, подсчитав число упорядоченных над B_1 формул от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим число бесповторных функций от n переменных в B_1.

Пусть формула Ψ является упорядоченной над B_1 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для нее определим две формулы, имеющие такую же структуру, что и Ψ. Обозначим их через $SSI(\Psi)$ и $SSFO(\Psi)$.

Определение 6. Структурой, сохраняющей индексы упорядоченной над B_1 формулы Ψ, назовем формулу $SSI(\Psi)$, которая получается из Ψ путем замены в ней всех символов бинарных базисных функций на символ $\circ$ и удаления всех отрицаний над переменными.

Символ $\circ$ в $SSI(\Psi)$ обозначает, что на его месте в Ψ находится некоторая бинарная функция из B_1, и соответственно для каждого вхождения $\circ$ в $SSI(\Psi)$ можно указать подформулы, находящиеся на месте его первого и второго аргументов.

Определение 7. Структурой, сохраняющей функции и отрицания упорядоченной над B_1 формулы Ψ, назовем формулу $SSFO(\Psi)$, которая получается из Ψ путем замены в ней всех переменных на некоторую переменную x (отрицания над переменной в $SSFO(\Psi)$ сохраняются в тех местах, где они были в Ψ).

Пример 3. Проиллюстрируем эти определения на примере. Пусть $\Psi = \overline{x}_1 \oplus ((x_2 \vee ((\overline{x}_4 \vee x_7) \oplus x_6)) \oplus (x_3 \& \overline{x}_5))$. Тогда

$SSI(\Psi) = x_1 \circ ((x_2 \circ ((x_4 \circ x_7) \circ x_6)) \circ (x_3 \circ x_5))$,

$SSFO(\Psi) = \overline{x} \oplus ((x \vee ((\overline{x} \vee x) \oplus x)) \oplus (x \& \overline{x}))$.

Представление этих формул в виде дерева изображено на рис. 2. Видно, что одна структура вида SSI может одновременно соответствовать нескольким упорядоченным над B_1 формулам. То же самое можно сказать и о структурах вида $SSFO$.

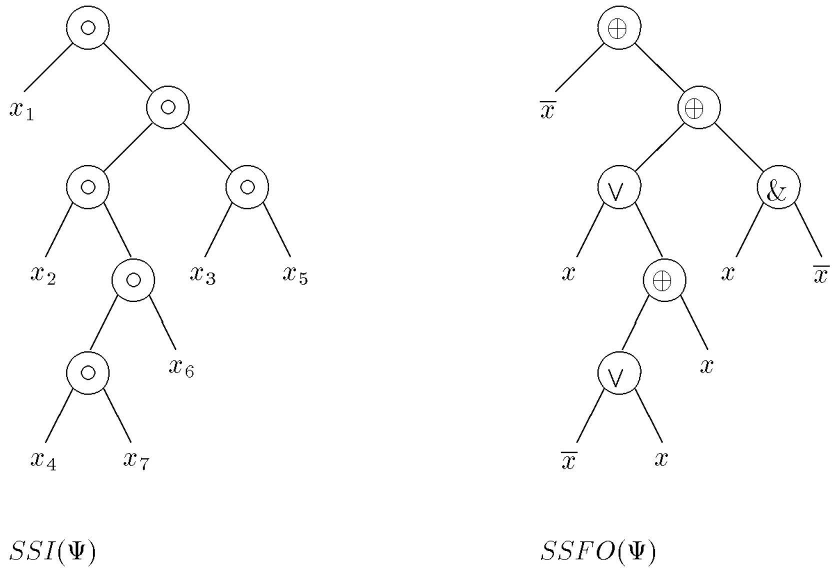

Рис. 2

Определение 8. Будем говорить, что структура A вида SSI совместна со структурой B вида $SSFO$, если найдется упорядоченная над B_1 формула Ψ такая, что $SSI(\Psi) = A$ и $SSFO(\Psi) = B$. Очевидно, что пара совместных структур однозначно определяет упорядоченную над B_1 формулу.

Половину структур вида $SSFO$ можно получить из цепей, следуя определению 9.

Определение 9. 1) Любая цепь является структурой вида $SSFO$;

2) при подстановке на неключевое место любой цепи Z_1, входящей в структуру вида $SSFO$, вместо некоторого вхождения x произвольной цепи Z_2 получается структура вида $SSFO$. (Z_1 и Z_2 могут, вообще говоря, совпадать.)

Если подстановка цепи Z_2 производится на место аргумента, на котором находилась переменная с отрицанием, то при помощи законов де Моргана и тождества $\overline{\Phi_1 \oplus \Phi_2} = \overline{\Phi}_1 \oplus \Phi_2$ необходимо опустить это отрицание на переменные в добавляемой цепи. Очевидно, что в этом случае на ключевом месте у добавляемой цепи будет переменная x с отрицанием.

У любой структуры вида $SSFO$ внешняя для всей структуры базисная функция входит в состав ровно одной цепи. Цепь, содержащую внешнюю для всей структуры базисную функцию, будем называть ее внешней цепью. Часть упорядоченной над B_1 формулы Ψ, которая находится на месте внешней цепи ее $SSFO(\Psi)$, по аналогии назовем внешней цепью для формулы Ψ. Отметим, что на ключевом месте внешней цепи у Ψ всегда содержится переменная с наименьшим индексом.

Все получаемые при помощи определения 9 структуры вида $SSFO$ на ключевом месте своей внешней цепи имеют переменную x без отрицания. Для того чтобы получить множество всех структур вида $SSFO$, нужно рассмотреть также те структуры, у которых на ключевом месте внешней цепи находится переменная с отрицанием. Эта вторая половина получается из первой путем добавления отрицания над переменной, находящейся на ключевом месте внешней цепи.

Необходимо отметить, что так как на месте второго аргумента любого вхождения $\oplus$ в цепь Z_1 находится переменная без отрицания, то при подстановке на это место любой цепи Z_2 на ее ключевом месте будет находиться переменная без отрицания. Этим обеспечивается выполнение условия 5 из определения упорядоченной над B_1 формулы Ψ. Действительно, именно на ключевом месте подставляемой цепи Z_2 будет находиться наименьшая по индексу переменная подформулы Φ_2, если $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ — подформула, для которой внешним является рассматриваемое вхождение $\oplus$.

Пример 4. Для упорядоченной над B_1 формулы

$$\Psi = \overline{x}_1 \oplus \Big((x_2 \vee ((\overline{x}_4 \vee x_7) \oplus x_6)) \oplus (x_3 \& \overline{x}_5)\Big)$$

из примера 3 произведем разбиение $SSFO(\Psi)$ на цепи. Нагляднее произвести его, представив формулу $SSFO(\Psi)$ в виде дерева, изображенного на рис. 3. Видно, что вся структура разбивается на четыре цепи, выделенные прямоугольниками. Справа приведен первоначальный вид каждой цепи.

Ход построения рассматриваемой структуры такой: на неключевое место цепи 1 подставляется цепь 2, затем на два ее неключевых места подставлены цепи 3 и 4. Цепь 1 является внешней для всей $SSFO(\Psi)$, так как содержит внешнюю базисную функцию всей формулы. На ключевое место внешней цепи подставлена переменная с отрицанием, т. е. рассматриваемая $SSFO(\Psi)$ входит во вторую, дополнительную половину всех структур вида $SSFO$. Цепи 2 и 3 подставлены на место второго аргумента операции $\oplus$, поэтому у них на ключевом месте находится переменная без отрицания.

Если сравнить рис. 3 с левой частью рис. 2, то можно заметить, что при совмещении $SSI(\Psi)$ и $SSFO(\Psi)$ на ключевом месте любой цепи будет находиться переменная с наименьшим индексом в подформуле, для которой эта цепь является внешней.

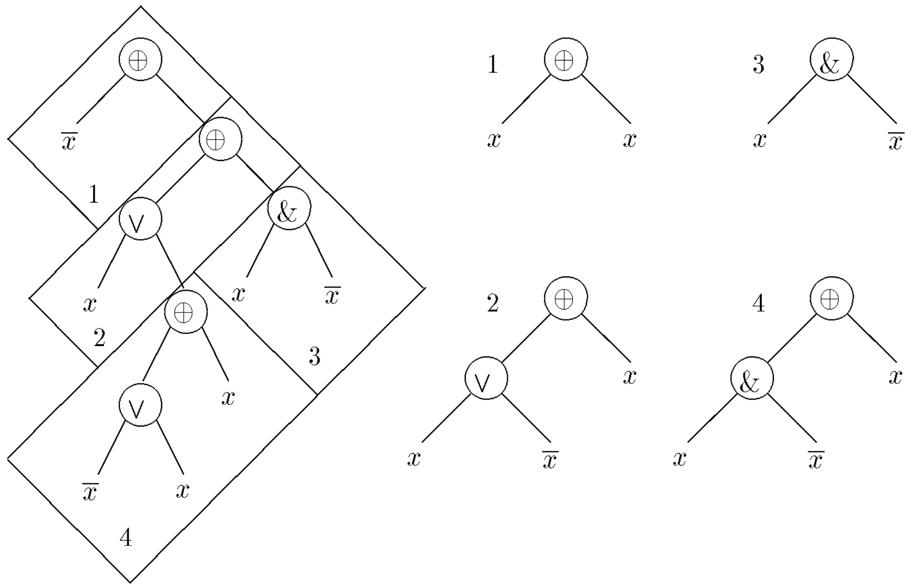

Рис. 3

Например, на ключевом месте цепи 2 находится наименьшая по индексу переменная x_2 подформулы $\Phi_2 = (x_2 \vee ((\overline{x}_4 \vee x_7) \oplus x_6)) \oplus (x_3 \& \overline{x}_5)$, для которой цепь 2 является внешней. Переменная x_2 входит в Ψ без отрицания, чем достигается выполнение условия 5 упорядоченности над B_1 для одного из вхождений $\oplus$ в Ψ, на месте второго аргумента которого находится Φ_2. То же самое можно сказать и о цепи 3, внешней для подформулы $\Phi_2' = (x_3 \& \overline{x}_5)$, находящейся на месте второго аргумента другого вхождения $\oplus$ в Ψ. Цепь 4 подставляется вместо переменной с отрицанием, которое затем опускается на ее переменные. В результате на ее ключевом месте оказывается переменная с отрицанием.

Ясно, что любую структуру вида $SSFO$ можно получить при помощи определения 9, при необходимости добавив на ключевое место внешней цепи переменную с отрицанием. Это построение структуры из цепей однозначно. В связи с этим будем говорить, что структура вида $SSFO$ разбивается на цепи $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, если она может быть из них построена, следуя определению 9.

Пусть структура вида $SSFO$ разбивается на цепи $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$, имеющие длины $q_1, q_2, \ldots, q_k$ соответственно. Тогда этой структуре, а вместе с ней и всем упорядоченным над B_1 формулам, имеющим эту структуру, поставим в соответствие последовательность натуральных чисел $M = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Для удобства договоримся, что она упорядочена и является невозрастающей, т. е. если $i < j$, то $q_i \geqslant q_j$. Последовательность $M(\Psi)$ для формулы Ψ из примеров 3 и 4 имеет вид

$(2,2,1,1)$ и строится по длинам цепей, на которые разбита структура $SSFO(\Psi)$. Заметим, что цена этой последовательности была подсчитана в примере 2.

Очевидно, что по аналогии можно разбить на цепи и структуры вида SSI, но так как в дальнейшем в структурах вида SSI будут учитываться лишь длины цепей, то эти структуры не будем разбивать на отдельные части, а лишь будем иметь в виду, что они состоят из цепей определенной длины. Эти цепи, если нужно, будем называть цепями вида SSI. Если Ψ — упорядоченная над B_1 формула и $M(\Psi) = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ — невозрастающая последовательность, соответствующая формуле Ψ, то структура $SSI(\Psi)$ так же состоит из k цепей, длины которых равны $q_1, q_2, \ldots, q_k$, и $M(\Psi) = M(SSI(\Psi))$.

Теперь для данной невозрастающей последовательности натуральных чисел M найдем число структур вида SSI, которым она соответствует.

Определение 10. Пусть имеются две структуры вида SSI, которые обозначим через A и B, причем структура A зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, а структура B — от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будем говорить, что структуру B можно получить из структуры A путем добавления переменной x_n, если в структуре A найдется подформула Φ такая, что при ее замене на подформулу $\Phi \circ x_n$ получится структура B. В этом случае будем говорить, что x_n добавлена к Φ.

Так как в структуре B переменная с наибольшим индексом одна, то структуру A, из которой получена структура B добавлением переменной, определена однозначно. Таким образом, можно проследить порядок построения любой структуры вида SSI из минимальной структуры $x_1 \circ x_2$.

Пример 5. Проследим порядок построения структуры $SSI(\Psi)$ для терма Ψ из предыдущих примеров (рис. 4).

Каждой из изображенных на рис. 4 структур поставим в соответствие невозрастающую последовательность, которой она соответствует. В результате получим путь к последней последовательности $(2,2,1,1)$, который можно записать в виде (1), $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,1,1)$, $(2,1,1,1)$, $(2,2,1,1)$. Этот путь на рис. 1 выделен более жирными линиями. Очевидно, что любую структуру вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно получить из минимальной структуры $x_1 \circ x_2$ путем последовательного добавления переменных, как в примере 5, причем единственным способом.

Теперь выясним, как последовательность $M(B)$ зависит от последовательности $M(A) = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, если B можно получить из A добавлением переменной. При этом добавляется и один символ $\circ$, а значит,

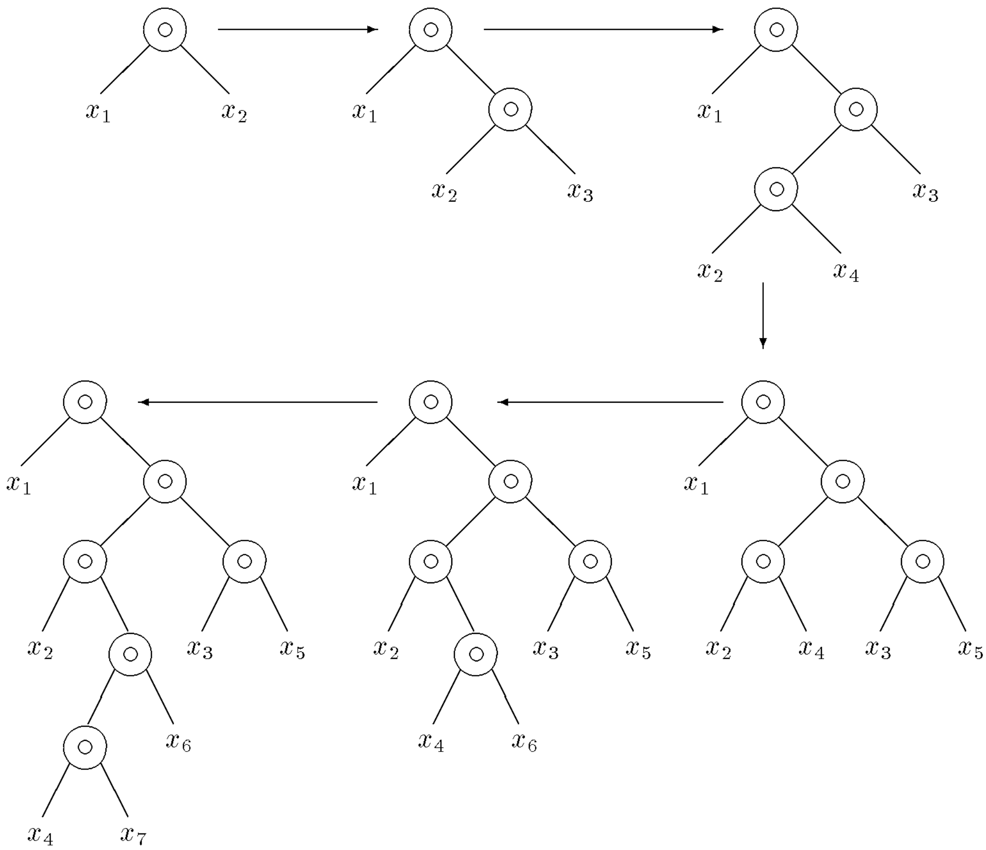

Рис. 4

сумма чисел в последовательности $M(B)$ на один больше суммы чисел в последовательности $M(A)$. Далее следует заметить, что вновь добавляемый символ $\circ$ может либо продолжить уже имеющуюся в A цепь либо образовать новую цепь длины один.

В примере 5 при первом добавлении $\circ$ образовалась новая цепь, при втором уже имеющаяся цепь удлинилась на единицу, при третьем добавлении образовалась еще одна цепь и т. д.

В случае увеличения длины q_i какой-то цепи в A на единицу в последовательности $M(B)$ чисел q_i будет на один меньше, а чисел $q_i + 1$ на один больше, чем в $M(A)$. Найдем число различных структур B, получаемых при добавлении переменной в цепь длины q_i в структуре A. Цепь длины q_i состоит из q_i символов бинарных функций и какой-либо переменной x_j, находящейся на ключевом месте этой цепи. Кроме этого, на q_i неключевых местах этой цепи находятся q_i подформул, некоторые из которых могут быть просто переменными. Легко заметить, что для

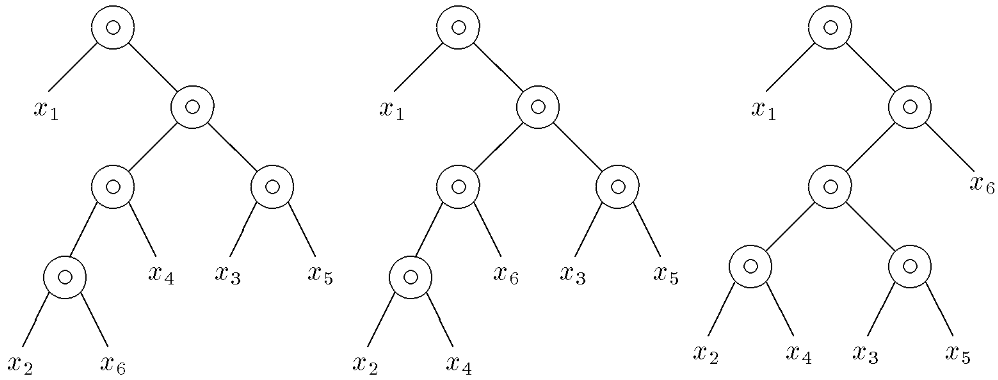

Рис. 5

удлинения рассматриваемой цепи нужно добавить новую переменную либо к x_j, либо к подформуле, для которой внешней функцией является какой-либо из q_i символов бинарных функций, входящих в состав цепи. Имеется $q_i + 1$ способ удлинения этой цепи на единицу.

Пример 6. Рассмотрим структуру $x_1 \circ ((x_2 \circ x_4) \circ (x_3 \circ x_5))$, которая получается после третьего шага в примере 5 (на рис. 4 она расположена в нижнем правом углу). Выясним, сколько имеется способов удлинения имеющейся в ней цепи длины два. Эта цепь состоит из двух символов $\circ$, переменной x_2 на ключевом месте, и на ее неключевых местах находятся подформулы x_4 и $x_3 \circ x_5$. Добавив переменную x_6 к переменной на ключевом месте, добьемся удлинения цепи и получим структуру $x_1 \circ (((x_2 \circ x_6) \circ x_4) \circ (x_3 \circ x_5))$ (рис. 5, слева). Вместо этого для удлинения цепи можно добавить x_6 к подформулам, в которых внешними являются символы $\circ$, из которых состоит цепь, т. е. к $x_2 \circ x_4$ или к $(x_2 \circ x_4) \circ (x_3 \circ x_5)$. Соответственно получатся структуры $x_1 \circ (((x_2 \circ x_4) \circ x_6) \circ (x_3 \circ x_5))$ (рис. 5, в центре) и $x_1 \circ (((x_2 \circ x_4) \circ (x_3 \circ x_5)) \circ x_6)$ (рис. 5, справа). Во всех трех случаях и только в них цепь длины два удлиняется на единицу. Каждой из вновь полученных структур соответствует последовательность $(3, 1, 1)$.

Если в структуре A имеется $R(q_i)$ цепей длины q_i, то в $M(A)$ имеется $R(q_i)$ чисел q_i. Очевидно, что в этом случае имеется $(q_i + 1) \cdot R(q_i)$ способов увеличения цепи длины q_i на единицу.

Далее рассмотрим случай, когда новый символ $\circ$ образует новую цепь длины один. Выше было показано, что после добавления новой переменной к переменной на ключевом месте какой-либо цепи или к подформуле с внешней функцией из цепи эта цепь удлиняется. Любой символ $\circ$ входит в состав какой-нибудь цепи. Таким образом, для получения новой цепи новую переменную можно добавлять лишь к переменным, причем находящимся на неключевых местах в цепях. Можно показать, что число таких переменных равно $\sum_{i=1}^{k} q_i - k + 1$. Этот факт следует из того, что в каждой цепи длины q_i имеется q_i неключевых мест. Некоторые из них, а именно $k-1$ место заняты другими цепями, остальные заняты переменными. При этом, очевидно, если $M(A) = (q_1, q_2, \dots, q_k)$, то $M(B) = (q_1, q_2, \dots, q_k, 1)$.

Из этих рассуждений следует, что при нахождении числа структур B, получающихся при добавлении очередной переменной, можно отвлечься от структуры A и опираться лишь на ее последовательность $M(A)$. При этом число получающихся структур B из структуры A при фиксированном способе увеличения (удлинении цепи длины q_i либо добавлении новой цепи длины один) равно числу способов получения последовательности $M(B)$ из последовательности $M(A)$ путем увеличения одного из чисел q_i в $M(A)$ на единицу либо путем приписывания к $M(A)$ справа единицы (см. определение 3).

Лемма 4. *Число различных структур вида SSI, которым соответствует невозрастающая последовательность натуральных чисел M, равно цене этой последовательности $P(M)$.*

Доказательство. Любую структуру A' вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно получить из минимальной структуры $x_1 \circ x_2$ путем последовательного добавления переменных. Этот метод проиллюстрирован в примере 5. В результате образуется цепь все увеличивающихся структур вида SSI $A_1, A_2, \dots, A_N$, где $A_1 = x_1 \circ x_2$, $A_N = A'$ и структура A_{i+1} получается из структуры A_i добавлением переменной x_{i+2}.

Перейдем от набора этих структур к набору соответствующих последовательностей $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_N)$. Очевидно, что этот набор будет образовывать путь к последовательности $M(A')$. Действительно, $M(A_1) = 1$, $M(A_N) = M(A')$, а два способа добавления к структуре A_i переменной x_{i+2} соответствуют двум путям получения $M(A_{i+1})$ из $M(A_i)$. Это значит, что при увеличении длины какой-либо цепи длины q_j в $M(A_i)$ одно из чисел q_j в $M(A_i)$ увеличивается на единицу; в случае же появления новой цепи при добавлении x_{i+2} к A_i к последовательности $M(A_i)$ справа приписывается единица.

По пути $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_N)$ можно получить не одну структуру A', а некоторое множество структур вида SSI. Число таких структур равно цене этого пути. Действительно, число w_i способов получения $M(A_{i+1})$ из $M(A_i)$, указанных в определении 3, совпадает с числом получения из одной структуры A такой, что $M(A) = M(A_i)$, всевозможных таких структур B, что $M(B) = M(A_{i+1})$, и B получается из A добавлением переменной. Таким образом, число структур вида SSI, которые можно получить по пути $M(A_1), M(A_2), \dots, M(A_N)$, равно $\prod\limits_{i=1}^{N-1} w_i$, т. е. цене этого пути. При этом для каждой структуры вида SSI путь из последовательностей, по которому ее можно получить, однозначен. Таким образом, для получения числа всех структур вида SSI, соответствующих данной последовательности M, необходимо просуммировать по всем путям к M цены этих путей, т. е. найти цену последовательности M. Лемма 4 доказана.

Пусть имеется некоторая структура A вида SSI, которой соответствует последовательность $M(A) = (q_1, q_2, \dots, q_k)$. Найдем число различных структур вида $SSFO$, совместных с ней (см. определение 8). Очевидно, что это число совпадает с числом упорядоченных над B_1 формул, имеющих структуру A. Будем смотреть на структуру A как на некоторую форму, в которую помещаются k цепей вида $SSFO$, длины которых равны $q_1, q_2, \dots, q_k$. Эти цепи соединяются в структуру вида $SSFO$ по определению 9. Все полученные структуры вида $SSFO$ имеют форму структуры A, т. е. совместны с ней. По лемме 3 число цепей длины q_i равно L_{q_i}. По определению 9 на неключевые места произвольной цепи можно поместить произвольную цепь, т. е. их расположение зависит не друг от друга, а от структуры A вида SSI. Особо следует отметить удвоение числа структур вида $SSFO$ за счет добавления переменной с отрицанием на ключевое место их внешней цепочки.

Пример 7. Для структуры $SSI(\Psi)$ из примера 3 (см. рис. 2) найдем число совместных с ней различных структур вида $SSFO$. Структура $SSI(\Psi)$ состоит из четырех цепей вида SSI. Пронумеруем их по аналогии с примером 4 следующим образом. Цепь 1 длины один на ключевом месте имеет x_1; цепь 2 длины два — x_2; цепь 3 длины один — x_3 и цепь 4 длины два — x_4. Последовательность $M(SSI(\Psi))$ имеет вид $(2, 2, 1, 1)$.

Имеется $L_1 = 5$ цепей вида $SSFO$ длины один, которые можно поместить в форму $SSI(\Psi)$ на место ее цепи 1. Независимо от выбора для цепи 1 на место цепи 2 структуры $SSI(\Psi)$ можно поместить $L_2 = 16$ цепей вида $SSFO$ длины два. На место цепи 3 структуры $SSI(\Psi)$ можно поместить пять цепей длины один. На место цепи 4 структуры $SSI(\Psi)$ можно поместить шестнадцать цепей длины два.

Таким образом, имеется $2\cdot(16\cdot16\cdot5\cdot5) = 12800$ структур вида $SSFO$, совместных со структурой $SSI(\Psi)$ из примера 3. Ясно, что для любой другой структуры вида SSI, которой соответствует последовательность $(2, 2, 1, 1)$, число совместных с ней структур вида $SSFO$ также равно 12800, т. е. при нахождении числа этих структур важна не структура вида SSI, а ее последовательность.

Найдем окончательную формулу для числа упорядоченных над B_1 формул от n переменных. Очевидно, что в состав каждой такой формулы Ψ входит $n-1$ бинарная базисная функция. Кроме того, ясно, что сумма чисел в $M(\Psi)$ совпадает с суммой длин цепей, из которых состоит Ψ. Каждая бинарная функция из Ψ входит ровно в одну цепь. Таким образом, сумма чисел в $M(\Psi)$ равна $n-1$.

Пусть T_{n-1} — множество невозрастающих последовательностей с суммой элементов, равной $n-1$. По лемме 4 для каждой такой последовательности $M = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ число соответствующих ей структур вида SSI равно $P(M)$. Далее, для каждой такой структуры вида SSI число совместных с ней структур вида $SSFO$ равно $2\prod\limits_{i=1}^{k} L_{q_i}$. Наконец, просуммировав полученные величины по всем последовательностям из T_{n-1}, найдем число всевозможных пар совместных структур вида SSI и вида $SSFO$, которое и равно числу упорядоченных над B_1 формул от n переменных. Учитывая единственность (лемма 2) упорядоченной над B_1 формулы для бесповторной в B_1 функции, получаем

$$S_n = 2\sum_{M\in T_{n-1}}\left(P(M)\prod_{i=1}^{k} L_{q_i}\right),$$

где T_{n-1} — множество таких невозрастающих последовательностей натуральных чисел, что сумма элементов в каждой последовательности равна $n-1$; $P(M)$ — цена соответствующей последовательности $M = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$;

$$L_q = \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{q-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^{q-1}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Оценки для числа бесповторных функций в базисе B_1

Лемма 5. *Среди величин $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i}$ для всех невозрастающих последовательностей $(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ из T_n наибольшая получается для последовательности $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})$ и равна 5^n, а наименьшая — для последовательности, состоящей из одного элемента (n), и равна $L_n > 3^n$.*

Доказательство. Покажем, что для любого $k > 1$ и для любого j, $0 < j < k$, справедливо неравенство

$$L_k < L_j \cdot L_{k-j}.$$

Этого факта, очевидно, достаточно для доказательства леммы, так как последовательность (n) — самое крупное разбиение числа n, а последовательность $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$ — самое мелкое, и любую последовательность $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ можно получить разбиением (n) на s частей, и наоборот, из любой последовательности $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ можно получить последовательность $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$ разбиением каждого элемента q_i на q_i единиц.

Оценим L_n. Согласно (2) имеем

$$L_n = \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1-\sqrt{5}\Bigr)^{n-1}.$$

В зависимости от четности $n-1$ число $\Bigl(1-\sqrt{5}\Bigr)^{n-1}$ может быть как положительным, так и отрицательным. В свою очередь,

$$\begin{aligned} L_n &\geqslant \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} - \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\Bigl(\sqrt{5}-1\Bigr)^{n-1} \\ &> \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} - \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\Bigl(\sqrt{5}+1\Bigr)^{n-1} = \frac{11}{\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_n &\leqslant \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\Bigl(\sqrt{5}-1\Bigr)^{n-1} \\ &< \frac{5\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\Bigl(\sqrt{5}+1\Bigr)^{n-1} = 5\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{n-1}. \end{aligned}$$

Пользуясь первой оценкой, получаем

$$L_j > \frac{11}{\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{j-1}, \quad L_{k-j} > \frac{11}{\sqrt{5}}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{k-j-1},$$
$$L_j \cdot L_{k-j} > \frac{121}{5}\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{k-2} > 24\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{k-2} > 6\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{k-1}.$$

С другой стороны, $L_k < 5\Bigl(1+\sqrt{5}\Bigr)^{k-1}$. Следовательно,

$$L_k < L_j \cdot L_{k-j} \text{ при любом } k > 1 \text{ и } 0 < j < k.$$

Так как $L_1 = 5$, то для последовательности $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$ величина $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i}$ равна 5^n. Таким образом, $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i} \leqslant 5^n$.

Для последовательности, состоящей из одного элемента (n), величина $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i}$ равна L_n и

$$L_n > \frac{11}{\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} > \left(1+\sqrt{5}\right)^{n} > 3^n.$$

Таким образом, $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i} \geqslant 3^n$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Число различных структур вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_n$ равно $\prod\limits_{i=2}^{n}(2i-3)$ (в дальнейшем эту величину будем обозначать через $(2n-3)!!$).*

Доказательство проведем методом индукции по числу переменных в структуре вида SSI.

Имеется единственная структура вида SSI от двух переменных, а именно $x_1 \circ x_2$, т. е. для $n = 2$ лемма верна. Положим, что число различных структур вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ равно $(2n-5)!!$. Выше было показано, что для любой структуры B вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_n$ можно однозначно указать структуру A вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, из которой структура B получается путем добавления переменной x_n. Так как в структуре A имеется $n-2$ неунарных и $n-1$ унарных подформул, то из одной структуры A можно получить $2n-3$ различных структуры вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Отсюда следует, что число различных структур вида SSI от переменных $x_1, \ldots, x_n$ равно $(2n-5)!! \cdot (2n-3) = (2n-3)!!$. Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Число S_n бесповторных булевых функций ранга n в B_1 удовлетворяет неравенствам*

$$2 \cdot 3^{n-1}(2n-3)!! < S_n < 2 \cdot 5^{n-1}(2n-3)!!,$$

где $(2n-3)!! = \prod\limits_{i=2}^{n}(2i-3)$.

Доказательство. Воспользуемся оценками для величины $\prod\limits_{i=1}^{s} L_{q_i}$ из леммы 5 и теоремой 1. В результате получим

$$2 \cdot 3^{n-1} \sum_{M \in T_{n-1}} P(M) < S_n < 2 \cdot 5^{n-1} \sum_{M \in T_{n-1}} P(M). \tag{3}$$

Здесь степень равна $n-1$, так как невозрастающие последовательности принадлежат множеству T_{n-1}. Заметим, что $\sum\limits_{M \in T_{n-1}} P(M)$ — это число всевозможных структур вида SSI от n переменных. Отсюда и из леммы 6 следует, что

$$\sum_{M\in T_{n-1}} P(M) = (2n-3)!!. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получаем утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Избранные вопросы** теории булевых функций. М.: Физматлит, 2001.
2. **Кузнецов А. В.** О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 186–225. (Труды Математического института им. В. А. Стеклова; Т. 51).
3. **Перязев Н. А.** Представление функций алгебры логики бесповторными формулами // XI Межреспубл. конф. по мат. логике: Тез. сообщений. Казань, 1992. С. 110.
4. **Перязев Н. А., Разгильдеев В. Т.** Число бесповторных булевых функций в бинарных базисах // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XI Междунар. конф. (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. С. 161–162.

Адрес автора:

Иркутский государственный
педагогический университет,
Н. Набережная, 6,
664011 Иркутск, Россия.
E-mail: oz@math.isu.ru

Статья поступила
28 сентября 2001 г.,
переработанный вариант —
2 августа 2002 г.