ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2003. Серия 1. Том 10, № 1, 61–78

УДК 517.7

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ПОЛНОТА В ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ КВАЗИМОНОТОННЫХ И МОНОТОННЫХ ТРЕХЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЕТКЕ

Н. Г. Парватов

Конструктивно доказываются теоремы о функциональной полноте для замкнутых классов всех монотонных и всех квазимонотонных функций на трехэлементной полурешетке, устанавливается критерий порождаемости всех минимальных функций в классе всех монотонных функций.

Введение

Функции на полурешетках позволяют с заданной точностью описывать динамическое поведение дискретных автоматов [2]. Особый интерес вызывают монотонные, квазимонотонные и минимальные точечные функции на полурешетках. Именно квазимонотонные функции физически реализуемы (допускают схемную реализацию в физически исполнимом базисе): функции реальных элементов (транзисторов, вентилей и т. п.) являются минимально точечными, функции схем из таких элементов монотонные, а функции, реализуемые схемами, квазимонотонные [2]. В силу этого важными представляются проблемы функциональной полноты для классов монотонных и квазимонотонных k-значных функций, а также проблема порождаемости класса минимальных точечных функций системами монотонных и квазимонотонных функций. Некоторые свойства функциональных систем монотонных и квазимонотонных функций на верхней полурешетке, в том числе свойства, связанные с проблемами полноты, исследовались в [2–6]. Однако теорем о полноте, подобных теоремам, известным для множества P_k всех функций k-значной логики, для классов монотонных и квазимонотонных функций на полурешетках не установлено.

В настоящей статье рассматривается трехэлементная полурешетка, изоморфная полурешетке непустых подмножеств двухэлементного множества (упорядоченных отношением включения). Квазимонотонными

и монотонными функциями на этой полурешетке описывается динамическое поведение комбинационных переключательных и функциональных схем с двузначными сигналами. Устанавливаются критерии полноты в классах монотонных и квазимонотонных функций и критерий порождаемости всех минимальных точечных функций системами монотонных функций.

1. Основные определения

Пусть $E_3 = \{0, 1, 2\}$ и P_3 — множество всех функций f от n переменных таких, что $f : E_3^n \to E_3$, $n = 1, 2, \ldots$ Обычным образом определяются понятия существенной и фиктивной переменных функции, понятия суперпозиции и замыкания [7]. Функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных. Через $[A]$ обозначается замыкание множества $A \subseteq P_3$, и A называется *замкнутым классом*, если $A = [A]$. Если множества A и B функций из P_3 таковы, что $[A] \supseteq B$, то говорим, что множество A *порождает* множество B. Если $B = [A]$, то множество функций A называем *функционально полным* в замкнутом классе B.

На множестве E_3 определим частичный порядок $\leqslant$ с минимальными элементами 0 и 1 и с наибольшим элементом 2. Естественным образом порядок $\leqslant$ переносится на n-ю декартову степень E_3^n: считаем, что $(a_1, \ldots, a_n) \leqslant (b_1, \ldots, b_n)$, если $a_i \leqslant b_i$ при любом $i = 1, \ldots, n$. Множество E_3^n становится, таким образом, верхней полурешеткой. Точная верхняя (нижняя) грань в ней для множества наборов $A \subseteq E_3^n$ обозначается через $\sup A$ (соответственно $\inf A$).

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_3 называется *монотонной*, если она сохраняет отношение порядка $\leqslant$, т. е. если для любых наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ из E_3^n таких, что $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$, справедливо неравенство $f(\tilde{a}) \leqslant f(\tilde{b})$. Говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *реализует* функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, и пишем $f \leqslant g$, если неравенство $f(\tilde{a}) \leqslant g(\tilde{a})$ имеет место для всех наборов $\tilde{a} \in E_3^n$. Также будем писать $f < g$, если $f \leqslant g$ и $f \neq g$. Функция g из P_3 называется *квазимонотонной*, если существует такая монотонная функция f, что $f \leqslant g$. В соответствии с тестом квазимонотонности из [1, 2] функция $f : E_3^n \to E_3$ тогда и только тогда квазимонотонна, когда из существования нижней грани в E_3^n для наборов $\tilde{u}, \tilde{v} \in E_3^n$ следует существование нижней грани в E_3 для элементов $f(\tilde{u})$ и $f(\tilde{v})$. Таким образом, квазимонотонную функцию можно определить как функцию, сохраняющую бинарное отношение

$$\varepsilon(x_1, x_2) \equiv \{x_1, x_2\} \neq \{0, 1\}.$$

Замкнутые классы монотонных и квазимонотонных функций обозначаются через M и Q соответственно.

Функция $f : E_3^n \to E_3$ называется *точечным расширением* функции $g : \{0,1\}^n \to E_3$, если

$$f(\tilde{x}) = \sup\{g(\tilde{a}) \mid \tilde{a} \in \{0,1\}^n \text{ и } \tilde{a} \leqslant \tilde{x}\}$$

для всех $\tilde{x} \in E_3^n$. Точечные расширения являются монотонными функциями. Константы 0, 1, 2 рассматриваются как одноместные точечные функции.

Точечные расширения булевых функций называются *минимальными* точечными функциями. Минимальные точечные функции суть минимальные по отношению $\leqslant$ монотонные функции. Класс всех минимальных точечных функций обозначается через T. Ясно, что $T \subseteq M \subseteq Q$. Булевы функции и их точечные расширения из T будем обозначать одними и теми же символами. В свою очередь, для элементарных булевых функций используются обычные обозначения: $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \cdot x_2$ или $x_1 x_2$ — для конъюнкции, $x_1 \vee x_2$ — для дизъюнкции, $x_1 \oplus x_2$ — для сложения по модулю 2, $\neg x_1$ или $\bar{x}_1$ — для отрицания. Тождественная функция обозначается через $\tau(x_1)$.

В отличие от классов M и Q класс T не является функционально замкнутым [2]. Например, функция $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$ содержится в множестве $[T] \setminus T$, поскольку $f(2,1,1) = 2 \neq \sup\{f(0,1,1), f(1,1,1)\} = 1$.

2. Порождение минимальных точечных функций системами монотонных функций

Введем в рассмотрение следующие замкнутые классы функций из P_3: C_{02}, C_{12}, C_2 — классы функций, сохраняющих соответствующие унарные отношения:

$$\{0,2\},\ \{1,2\},\ \{2\};$$

B — класс функций, сохраняющих отношение

$$\beta(x_1, x_2) \equiv (x_1, x_2) \neq (0,1);$$

A — класс функций, сохраняющих отношение

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv \varepsilon(x_2, x_3) \wedge [\varepsilon(x_1, x_2) \vee \varepsilon(x_1, x_3)].$$

В настоящей статье устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Система функций $F \subseteq M$ тогда и только тогда порождает множество функций T, когда F не содержится целиком ни в одном из замкнутых классов C_{02}, C_{12}, C_2, B и A.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений (леммы 1–6).

Полный прообраз элемента $a \in E_3$ при отображении $f : E_3^n \to E_3$, т. е. множество всех $\tilde{d} \in E_3^n$ таких, что $f(\tilde{d}) = a$, обозначается через $f^{-1}(a)$. Число элементов в множестве $f^{-1}(a)$ обозначается через $|f^{-1}(a)|$.

Лемма 1. *Если квазимонотонная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| \geqslant 1$, то она сохраняет константу 2.*

Доказательство. Если $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| \geqslant 1$, то в E_3^n имеются наборы $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ такие, что $f(\tilde{a}) = 0$ и $f(\tilde{b}) = 1$. Так как в E_3^n набор $(2, \ldots, 2)$ имеет нижние грани с каждым из наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, то по тесту квазимонотонности в E_3 элемент $f(2, \ldots, 2)$ имеет нижние грани с каждым из значений $f(\tilde{a})$ и $f(\tilde{b})$. Это возможно, когда $f(2, \ldots, 2) = 2$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Имеются только две одноместные квазимонотонные функции, принимающие значения* 0 *и* 1, *а именно функции* τ *и* $\neg$.

Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть *слабо существенной*, если она реализуется некоторой одноместной квазимонотонной функций, т. е. существуют i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и функция $s \in Q^{(1)}$ такие, что при любых значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ из множества E_3 справедливо неравенство $s(x_i) \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$. Множество всех слабо существенных функций обозначается через Φ. Заметим, что слабо существенные функции являются квазимонотонными.

Лемма 2. *Если квазимонотонная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| \leqslant 1$, то она является слабо существенной.*

Доказательство. Если $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| < 1$, то значения функции f принадлежат одному из множеств $\{0, 2\}$ или $\{1, 2\}$ и f реализуется константой 0 или 1 соответственно. Предположим, что $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| = 1$. Тогда имеются наборы $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ такие, что $f(\tilde{a}) = 0$, $f(\tilde{b}) = 1$ и $f(\tilde{x}) = 2$ при всех $\tilde{x} \in {E_3}^n \setminus \{\tilde{a}, \tilde{b}\}$. Так как f сохраняет отношение ε, то $\{a_j, b_j\} = \{0, 1\}$ для некоторого $j, 1 \leqslant j \leqslant n$, и $x_j \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$, если $(a_j, b_j) = (0, 1)$, или $\bar{x}_j \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$, если $(a_j, b_j) = (1, 0)$. Лемма 2 доказана.

Совокупность всех n-местных функций из множества $A \subseteq P_3$ обозначается через $A^{(n)}$.

Лемма 3. *Пусть $g \in Q^{(m)} \setminus A$. Тогда имеются наборы $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ и $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_m)$ такие, что*

(3.а) $\{g(\tilde{a}), g(\tilde{b})\} = \{g(\tilde{a}), g(\tilde{c})\} = \{0, 1\}$;

(3.б) *при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, справедливо по крайней мере одно из отношений*: $\{a_j, b_j, c_j\} \not\supseteq \{0, 1\}$, $\{a_j, b_j\} = \{0, 1\} \wedge c_j = 2$, $\{a_j, c_j\} = \{0, 1\} \wedge b_j = 2$.

Доказательство. Так как функция g не сохраняет отношение α, то имеются такие наборы $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ и $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_m)$, что

(а) $(g(\tilde{a}), g(\tilde{b}), g(\tilde{c})) \notin \alpha$;

(б) $\alpha(a_j, b_j, c_j)$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Поскольку по свойству (б) наборы $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ имеют общую нижнюю грань в ${E_3}^n$, то по тесту квазимонотонности элементы $f(\tilde{b})$ и $f(\tilde{c})$ имеют общую нижнюю грань в E_3. Отсюда по свойству (а) следует свойство (3.а). Свойство (3.б) следует из (б). Лемма 3 доказана.

Весом функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется число $W_n(f)$ всевозможных пар $\tilde{u}, \tilde{v}$ элементов из E_3^n таких, что $\{f(\tilde{u}),\ f(\tilde{v})\} = \{0, 1\}$.

Будем говорить, что *функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *разлагается по функции* $f_0 \in P_3^{(m)}$ *на компоненты* f_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, если

$$f(\widetilde{X}) = f_0(f_1(\widetilde{X}), \dots, f_m(\widetilde{X})), \tag{1}$$

где $\widetilde{X} = (x_1, \dots, x_n)$. Если при этом $W_n(f_j) < W_n(f)$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, то говорим, что *функция* f *разлагается по функции* f_0 *на компоненты меньшего веса.* Вместо разложения (1) также будем писать $f = f_0(f_1, \dots, f_m)$.

Лемма 4. *Пусть* $g \in Q^{(m)} \setminus A$, $f \in Q^{(n)}$ *и* $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| > 1$. *Тогда имеется функция* $s \in Q^{(1)}$ *такая, что функция* f *разлагается по функции* $s(g)$ *на квазимонотонные компоненты меньшего веса.*

Доказательство. Так как $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| > 1$, то $|f^{-1}(p)| > 1$ и $|f^{-1}(q)| \geqslant 1$ для некоторых p, q из $\{0, 1\}$. Пусть $\tilde{d} = (d_1, \dots, d_n)$ — произвольный набор из $f^{-1}(p)$, а $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ и $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_m)$ — наборы, существование которых следует из леммы 3. Из свойства (3.а) следует, что $g(\tilde{b}) = g(\tilde{c}) \neq 2$. Определим одноместную функцию s, положив $s(g(\tilde{a})) = q$, $s(g(\tilde{b})) = s(g(\tilde{c})) = p$ и $s(2) = 2$. По свойству (3.а) s — одна из функций τ или $\neg$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, рассмотрим функцию $f_j : E_3^n \to E_3$, положив

$$f_j(\tilde{x}) = \begin{cases} a_j, & \text{если } f(\tilde{x}) = q, \\ b_j, & \text{если } f(\tilde{x}) = p \text{ и } \tilde{x} \neq \tilde{d}, \\ c_j, & \text{если } \tilde{x} = \tilde{d}, \\ 2, & \text{если } f(\tilde{x}) = 2. \end{cases}$$

Тогда для функции $f_0 = s(g)$ будет иметь место представление (1). Остается доказать, что компоненты f_i — квазимонотонные и $W_n(f_i) < W_n(f)$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Если $\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} \neq \{0,1\}$, то $\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} \subseteq \{p,2\}$ или $\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} \subseteq \{q,2\}$. По определению функций f_j в этом случае для каждого j множество $\{f_j(\tilde{u}), f_j(\tilde{v})\}$ содержится в одном из множеств $\{a_j,2\}$, $\{b_j,2\}$ или $\{c_j,2\}$, т. е. $\{f_j(\tilde{u}),\ f_j(\tilde{v})\} \neq \{0,1\}$. Таким образом,

$$[\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} \neq \{0,1\}] \Rightarrow [\{f_j(\tilde{u}), f_j(\tilde{v})\} \neq \{0,1\}].$$

Следовательно, $W_n(f_j) \leqslant W_n(f)$. Кроме того, функции f_j сохраняют отношение ε (поскольку f сохраняет ε) и являются квазимонотонными.

Выберем произвольные элементы $\tilde{d}_1 \in f^{-1}(p) \setminus \{\tilde{d}\}$ и $\tilde{d}_2 \in f^{-1}(q)$. По построению функций f_j имеем $\{f_j(\tilde{d}_1), f_j(\tilde{d}_2)\} = \{b_j, a_j\}$ и $\{f_j(\tilde{d}), f_j(\tilde{d}_2)\} = \{c_j, a_j\}$. Отсюда по свойству (3.б) получаем $\{f_j(\tilde{d}_1), f_j(\tilde{d}_2)\} \neq \{0,1\}$ или $\{f_j(\tilde{d}), f_j(\tilde{d}_2)\} \neq \{0,1\}$. Вместе с тем $\{f(\tilde{d}_1), f(\tilde{d}_2)\} = \{f(\tilde{d}), f(\tilde{d}_2)\} = \{0,1\}$. Поэтому $W_n(f_j) < W_n(f)$. Лемма 4 доказана.

Следствие 2. *Если $g \in Q^{(m)} \setminus A$, то $[\{g\} \cup \Phi] = Q$.*

Доказательство. Если $f \in Q \setminus \Phi$, то по лемме 2 имеем $|f^{-1}(0)| \cdot |f^{-1}(1)| > 1$ и по лемме 4 функция f разлагается по некоторой функции вида $s(g)$, где $s \in Q^{(1)}$, на квазимонотонные компоненты $f_1, \dots, f_m$ меньшего веса. Для каждой компоненты f_i, не принадлежащей Φ, разложение можно повторить и т. д. В силу конечности веса функции f через конечное число шагов получим представление функции f через функции множества $\{g\} \cup \Phi$. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Если $g \in M^{(m)} \setminus A$, то $[\{g\} \cup T^{(1)}] \supseteq T$.*

Доказательство. Поскольку $g \in Q^{(m)} \setminus A$ и $T \subseteq Q$, по следствию 2 любую функцию $f \in T$ можно выразить через функции из $\{g\} \cup \Phi$. Если затем в выражении для f каждую функцию из Φ заменить на реализующую ее функцию из $T^{(1)}$, то в результате получим выражение для некоторой монотонной функции h через функции из $\{g\} \cup T^{(1)}$. В силу монотонности функций из $\{g\} \cup T^{(1)}$ имеем $h \leqslant f$. Но функция f — минимальная точечная и строгое неравенство $h < f$ невозможно, так что $h = f$. Следствие 3 доказано.

Лемма 5. *Пусть $g \in Q^{(m)} \setminus B$. Тогда в $Q^{(1)} \setminus \{\neg\}$ имеются функции $s_1, \dots, s_m$ такие, что $\bar{x} = g(s_1(x), \dots, s_m(x))$.*

Доказательство. Поскольку функция g не сохраняет отношение β, то имеются наборы $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_m)$ и $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ такие, что $(g(\tilde{a}),\ g(\tilde{b})) = (0,1)$ и $(a_j, b_j) \neq (0,1)$ при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Для каждого $j = 1, \dots, m$ положим $s_j(1) = a_j$, $s_j(0) = b_j$, $s_j(2) = 2$. Функция s_j сохраняет отношение ε и, таким образом, является квазимонотонной. Кроме того, s_j — не отрицание, так как $(a_j, b_j) \neq (0,1)$. Поскольку $g(s_1(x), \dots, s_m(x)) = \bar{x}$ для всех $x \in E_3$, лемма 5 доказана.

Следствие 4. *Пусть $g \in M^{(m)} \setminus B$. Тогда в $\{0, 1, \tau\}$ имеются функции $s_1, \dots, s_m$ такие, что $\bar{x} = g(s_1(x), \dots, s_m(x))$.*

Доказательство. Запишем разложение из леммы 5. По следствию 1 каждая функция $s_j \neq \tau$ в этом разложении реализуется константой $c_j \in \{0, 1\}$. Если теперь вместо каждой функции $s_j \neq \tau$ подставить константу c_j, то в силу монотонности функции g получим требуемое разложение.

Лемма 6. *Множество функций T не содержится целиком ни в одном из замкнутых классов C_{02}, C_{12}, C_2, B, A.*

Доказательство. Заметим, что $\{0, 1\} \nsubseteq C_{02} \cup C_{12} \cup C_2$, отрицание не содержится в классе B. Наконец, дизъюнкция не содержится в A, поскольку $0 \vee 0 = 0$, $1 \vee 2 = 2 \vee 1 = 1$ и $\{(0, 1, 2), (0, 2, 1)\} \subseteq \alpha$, $(0, 1, 1) \notin \alpha$. Следовательно,

$$\{0, 1, \bar{x}, x \vee y\} \subseteq T \setminus (C_{02} \cup C_{12} \cup C_2 \cup B \cup A).$$

Лемма 6 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.

Необходимость условий теоремы 1 следует из леммы 6. Докажем достаточность этих условий. Пусть в системе функций $F \subseteq M$ содержатся (необязательно различные) функции f_{02}, f_{12}, f_2, f_B и f_A, не принадлежащие соответствующим классам C_{02}, C_{12}, C_2, B, A. Поскольку $f_2(2, \dots, 2) \neq 2$ и функция f_2 монотонная, f_2 — константа в $\{0, 1\}$. Далее в силу монотонности функций f_{12} и f_{02} имеем $f_{02}(0, \dots, 0) = 1$ и $f_{12}(1, \dots, 1) = 0$. Поэтому, имея одну из констант 0 или 1, с использованием функций f_{12} и f_{02} получим другую константу. Подставив полученные константы 0 и 1 и переменную x под знак функции f_B, по следствию 4 получим отрицание $\bar{x}$, при помощи которого получим тождественную функцию $x = \bar{\bar{x}}$. По следствию 3 функция f_A вместе с полученными выше функциями 0, 1, $\bar{x}$, x, образующими множество $T^{(1)}$, порождает все функции из T. Теорема 1 доказана.

3. Функциональная полнота в классе монотонных функций

Обозначим через C_{01} замкнутый класс всех функций из P_3, сохраняющих унарное отношение $\{0, 1\}$. Как обычно, множество функций A называется *предполным классом* в замкнутом классе B, если A не является полным в B, но при любой функции $f \in B \setminus A$ множество функций $A \cup \{f\}$ полно в B. Если X и Y — подмножества в P_3, то через XY будем обозначать пересечение множеств X и Y. Справедлива следующая

Теорема 2. *Система функций $F \subseteq M$ полна в классе M тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из классов C_{02}, C_{12}, C_{01}, C_2, B, A. В M имеется ровно шесть предполных классов: MC_{02}, MC_{12}, MC_{01}, MC_2, MB, MA.*

При доказательстве теоремы 2 используются следующие вспомогательные утверждения (леммы 7–9).

Для произвольного элемента $\tilde{a} \in E_3^n$ определим n-местную функцию $\phi_{\tilde{a}}$, положив

$$\phi_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = \begin{cases} 2, & \text{если } \tilde{a} \leqslant \tilde{x}, \\ 0, & \text{если } \tilde{a} \nleqslant \tilde{x}. \end{cases}$$

Функция $\phi_{\tilde{a}}$ — монотонная. В самом деле, пусть $\tilde{x} \leqslant \tilde{y}$. Тогда если $\tilde{a} \leqslant \tilde{x}$, то $\tilde{a} \leqslant \tilde{y}$ и $\phi_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = \phi_{\tilde{a}}(\tilde{y}) = 2$, а если $\tilde{a} \nleqslant \tilde{x}$, то $\phi_{\tilde{a}}(\tilde{x}) = 0 \leqslant \phi_{\tilde{a}}(\tilde{y})$.

Лемма 7. *Пусть $f \in M^{(n)}$, $f_0 \in [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]^{(n)}$ и $f_0 < f$. Тогда имеется функция $g \in [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]^{(n)}$ такая, что $f_0 < g \leqslant f$.*

Доказательство. Так как $f_0 < f$, то имеется набор $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n)$ такой, что $f_0(\tilde{y}) < f(\tilde{y})$. Заметим, что $f_0(\tilde{y}) \in \{0, 1\}$, $f(\tilde{y}) = 2$ и условия $s(f_0(\tilde{y})) = 0$, $s(\neg f_0(\tilde{y})) = 1$, $s(2) = 2$ выполняются для некоторой функции $s \in \{\tau, \neg\}$. Определим функцию g как $g = s(s(f_0) \vee \phi_{\tilde{y}})$. Покажем, что $f_0 < g \leqslant f$. Поскольку

$$g(\tilde{y}) = s(s(f_0(\tilde{y})) \vee \phi_{\tilde{y}}(\tilde{y})) = s(0 \vee 2) = s(2) = 2,$$

$f_0(\tilde{y}) < g(\tilde{y}) \leqslant f(\tilde{y})$. Если $\tilde{y} \leqslant \tilde{x}$, то в силу монотонности функций f и g имеем $2 = f(\tilde{y}) \leqslant f(\tilde{x})$ и $2 = g(\tilde{y}) \leqslant g(\tilde{x})$. Следовательно, $g(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) = 2$. Если же $\tilde{y} \nleqslant \tilde{x}$, то

$$g(\tilde{x}) = s(s(f_0(\tilde{x})) \vee \phi_{\tilde{y}}(\tilde{x})) = s(s(f_0(\tilde{x})) \vee 0) = s(s(f_0(\tilde{x}))) = f_0(\tilde{x}) \leqslant f(\tilde{x}).$$

Таким образом, доказано, что $f_0 < g \leqslant f$.

Далее заметим, что $\phi_{y_1}(x_1) = \ldots = \phi_{y_n}(x_n) = 2$, если $\tilde{y} \leqslant \tilde{x}$, и $\phi_{y_i}(x_i) = 0$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant n$, в противном случае. Следовательно, $\phi_{\tilde{y}}(x_1, \dots, x_n) = \phi_{y_1}(x_1) \wedge \dots \wedge \phi_{y_n}(x_n)$ и $g \in [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]^{(n)}$. Лемма 7 доказана.

Следствие 5. $M = [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]$.

Доказательство. Пусть f — функция из $M^{(n)}$. Возьмем функцию $f_0 \leqslant f$ из $T^{(n)}$. Если $f_0 \neq f$, то по лемме 7 имеется такая n-местная функция $f_1 \in [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]$, что $f_0 < f_1 \leqslant f$. Если $f_1 \neq f$, то возьмем функцию $f_2 \in [T \cup \{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}]^{(n)}$ такую, что $f_1 < f_2 \leqslant f$ … и т. д. Поскольку число различных n-местных функций конечно, то, продолжая этот процесс, на некотором шаге получим функцию $f_m = f$. Следствие 5 доказано.

Лемма 8. *Если $g \in Q^{(m)} \setminus A$, то имеются наборы $\tilde{d} = (d_1, \dots, d_m)$, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ и $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_m)$ такие, что*

(8.а) $g(\tilde{b}) \neq g(\tilde{d}) = g(\tilde{e}) = 2$;

(8.б) *при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, либо $\{d_j, b_j\} = \{0,1\} \wedge e_j = 2$, либо $d_j = b_j = e_j$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ — наборы, о существовании которых говорится в лемме 3. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, выберем элементы d_j и e_j такие, что

$$(d_j, e_j) = \begin{cases} (a_j, 2), & \text{если } \{a_j, b_j\} = \{0,1\}, \\ (b_j, b_j) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Убедимся в том, что наборы $\tilde{d}$, $\tilde{b}$, $\tilde{e}$ являются искомыми. Непосредственно проверяется, что свойство (8.б) следует из свойства (3.б). Кроме того, каждый набор $\tilde{d}$ и $\tilde{e}$ с каждым набором $\tilde{a}$, $\tilde{c}$ имеет нижние грани в E_3^n. Тогда (по тесту квазимонотонности) в E_3 каждый элемент $g(\tilde{d})$ и $g(\tilde{e})$ должен иметь нижние грани с каждым элементом $g(\tilde{a})$ и $g(\tilde{b})$. Отсюда и из (3.а) получаем (8.а). Лемма 8 доказана.

Следствие 6. *Пусть $g \in Q^{(m)} \setminus A$. Тогда имеются функция $s \in \{\neg, \tau\}$ и функции $s_1, \dots, s_m$ в $\{\neg, \tau, 0, 1, 2\}$ такие, что $\phi_0 = s(g(s_1, \dots, s_m))$.*

Доказательство. Достаточно положить $s_j(0) = d_j$, $s_j(1) = b_j$, $s_j(2) = e_j$ для каждого $j = 1, \dots, m$ и в качестве функции s взять функцию τ, если $g(\tilde{b}) = 0$, и функцию $\neg$, если $g(\tilde{b}) = 1$. Следствие 6 доказано.

Лемма 9. *Ни один из классов MC_{02}, MC_{12}, MC_{01}, MC_2, MB, MA не содержится ни в одном из остальных пяти классов.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из соотношений

$$0 \in MC_{02}C_{01}BA \setminus (C_{12} \cup C_2), \quad 1 \in MC_{12}C_{01}BA \setminus (C_{02} \cup C_2),$$
$$2 \in MC_{12}C_{02}C_2BA \setminus (C_{01}), \quad \bar{x} \in MC_{01}C_2A \setminus (C_{12} \cup C_{02} \cup B),$$
$$x_1 \oplus x_2 \in MC_{01}C_2C_{02}A \setminus (C_{12} \cup B), \overline{x_1 \oplus x_2} \in MC_{01}C_2C_{12}A \setminus (C_{02} \cup B),$$
$$x_1 \vee x_2 \in MC_{02}C_{01}C_{12}B \setminus A.$$

Лемма 9 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Необходимость условий первого утверждения теоремы 2 следует из леммы 9. Докажем достаточность этих условий. Во-первых, при помощи функции $f_{01}(x_1, \dots, x_m) \in M \setminus C_{01}$ и констант 0, 1 можно получить константу 2, поскольку существуют $c_1, \dots, c_m$ из $\{0,1\}$ такие, что $f_{01}(c_1, \dots, c_m) = 2$. Далее, по следствию 6 при помощи функций 0, 1, 2,

$\neg$ и любой функции $f_A \in M \setminus A$ можно получить функцию ϕ_0. Функции ϕ_1 и ϕ_2 можно выразить через ϕ_0 следующим образом: $\phi_1(x) = \phi_0(\bar{x})$, $\phi_2(x) = \phi_0(x) \wedge \phi_1(x)$. Таким образом, функции ϕ_0, ϕ_1 и ϕ_2 порождаются с использованием функций f_{01}, f_A, 0, 1 и $\neg$. Тогда по следствию 5 система $T \cup \{f_{01}, f_A\}$ порождает все функции из M и достаточность условий теоремы 2 следует из теоремы 1.

Справедливость второго утверждения теоремы 2 следует из леммы 9. Теорема 2 доказана.

4. Аналог теоремы Слупецкого для класса квазимонотонных функций

В настоящем разделе доказывается

Теорема 3. *Пусть $F \subseteq Q$. Система $F \cup Q^{(1)}$ тогда и только тогда полна в классе Q, когда F не содержится целиком в классе A.*

Предварительно убедимся в справедливости вспомогательных утверждений (леммы 10–13).

Лемма 10. *Если $g \in Q^{(m)} \setminus A$, то имеются наборы $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_m)$ и $\tilde{e} = (e_1, \dots, e_m)$ такие, что*

(10.а) $\{g(\tilde{a}), g(\tilde{b})\} = \{0, 1\}$, $g(\tilde{e}) = 2$;

(10.б) *при любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, либо $\{a_j, b_j, e_j\} \not\supseteq \{0, 1\}$, либо $a_j = e_j$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ — наборы, существование которых доказано в лемме 3. При любом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, положим

$$e_j = \begin{cases} a_j, & \text{если } \{a_j, b_j\} = \{0, 1\}, \\ 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда из (3.б) следует (10.б). Кроме того, в E_3^m набор $\tilde{e}$ имеет нижние грани с каждым набором $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$. Поэтому в E_3 элемент $g(\tilde{e})$ имеет нижние

Доказательство. По условию имеется такая квазимонотонная функция $t(x_1, \ldots, x_n)$, существенно зависящая не более чем от одной переменной, что $t < f$. Это означает, что $t(\tilde{x}) \leqslant f(\tilde{x})$ при любом $\tilde{x} \in E_3^n$ и $t(\tilde{y}) < f(\tilde{y}) = 2$ при некотором $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{e}$ — те же наборы, что и в лемме 10. Положим $s(g(\tilde{a})) = t(\tilde{y})$, $s(g(\tilde{b})) = \bar{t}(\tilde{y})$ и $s(2) = 2$. Очевидно, что s — одна из функций τ или $\neg$. При каждом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, определим функцию $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f_j(\tilde{x}) = \begin{cases} a_j, & \text{если } f(\tilde{x}) = t(\tilde{y}), \\ b_j, & \text{если } f(\tilde{x}) = \bar{t}(\tilde{y}), \\ e_j, & \text{если } \tilde{x} = \tilde{y}, \\ 2, & \text{если } \tilde{x} \neq \tilde{y} \text{ и } f(\tilde{x}) = 2. \end{cases}$$

Для функции $f_0 = s(f)$ будет выполняться соотношение (1). Предположим, что $f_j \notin \Psi$. Тогда среди значений a_j, b_j, c_j, принимаемых функцией f_j, должны присутствовать значения 0 и 1, т. е. $\{a_j, b_j, e_j\} \supseteq \{0, 1\}$, и по условию (10.б) имеем $a_j = e_j$ и $\{a_j, b_j\} = \{e_j, b_j\} = \{0, 1\}$. Поэтому если $\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} = \{0, 1\}$, то $\{f(\tilde{u}), f(\tilde{v})\} = \{t(\tilde{y}), \bar{t}(\tilde{y})\}$ и $\{f_j(\tilde{u}), f_j(\tilde{v})\} = \{a_j, b_j\} = \{0, 1\}$. Это означает, что $W_n(f) \leqslant W_n(f_j)$. Заметим, что $f^{-1}(\bar{t}(\tilde{y})) \neq \varnothing$, ибо в противном случае значения функции f_j принадлежат множеству $\{a_j, e_j, 2\} = \{a_j, 2\}$ и f_j реализуется константой a_j. Противоречие. Так как для любого $\tilde{z} \in f^{-1}(\bar{t}(\tilde{y}))$ верно $\{f(\tilde{y}), f(\tilde{z})\} = \{2, \bar{t}(\tilde{y})\} \neq \{0, 1\} = \{b_j, e_j\} = \{f_j(\tilde{y}), f_j(\tilde{z})\}$, то $W_n(f) < W_n(f_j)$ и остается показать, что $f_j \in \Phi^{(n)}$. Положим $s_j(t(\tilde{y})) = a_j$, $s_j(\bar{t}(\tilde{y})) = b_j$ и $s_j(2) = 2$. Поскольку $\{a_j, b_j\} = \{0, 1\}$, $s_j \in \{\neg, \tau\}$. Далее остается заметить, что $f_j \in \Phi$, поскольку $s_j(t) \leqslant f_j$, и функция t существенно зависит не более чем от одной переменной. Лемма 11 доказана.

Следствие 7. *Для любой функции* $g \in Q^{(m)} \setminus A$ *верно* $\Phi \subseteq [Q^{(1)} \cup \Psi \cup \{g\}]$.

Лемма 12. *Если* $g \in Q^{(m)} \setminus A$, *то имеются наборы* $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\tilde{d} = (d_1, \ldots, d_m)$, $\tilde{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ *и* $\tilde{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ *такие, что*

(12.а) $g(\tilde{a}) \neq g(\tilde{d}) = g(\tilde{u}) = g(\tilde{v}) = 2$;

(12.б) *при любом* j, $1 \leqslant j \leqslant m$, *справедливо соотношение* $\{a_j, d_j, u_j, v_j\} \not\supseteq \{0, 1\}$ *и*

$$[a_j = d_j \neq u_j = v_j] \vee [a_j = u_j \neq d_j = v_j].$$

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ — те же наборы, что и в лемме 3, и $j \in \{1, \ldots, m\}$. Компоненты d_j, u_j, v_j определим следующим образом:

$$(d_j,u_j,v_j)=\begin{cases}(a_j,e_j,e_j), & \text{если } \{a_j,b_j,c_j\}\not\supseteq\{0,1\},\\ (a_j,\ 2,\ 2), & \text{если } \{a_j,b_j\}=\{0,1\}\wedge c_j=2,\\ (2,\ a_j,\ 2), & \text{если } \{a_j,c_j\}=\{0,1\}\wedge b_j=2,\end{cases}$$

где элемент e_j выбирается таким, что $\{a_j,b_j,c_j,e_j\}\not\supseteq\{0,1\}$ и $e_j\neq a_j$; это всегда можно сделать. Тогда из (3.б) следует (12.б). Кроме того, в E_3^m набор $\tilde d$ имеет нижние грани как с набором $\tilde a$, так и с набором $\tilde c$; набор $\tilde u$ имеет нижние грани в E_3^m как с набором $\tilde a$, так и с набором $\tilde b$; наконец, набор $\tilde v$ имеет нижние грани в E_3^m с каждым набором $\tilde a$, $\tilde b$, $\tilde c$. В силу этого из квазимонотонности функции g и свойства (3.а) следует свойство (12.а). Лемма 12 доказана.

Для набора $\tilde y$ из E_3^n и констант c, d из E_3 определим n-местную функцию $c_{\tilde y}^d(x_1,\dots,x_n)$:

$$c_{\tilde y}^d(\tilde x)=\begin{cases}d, & \text{если } \tilde x=\tilde y,\\ c & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Значения функции $c_{\tilde y}^d$ принадлежат множеству $\{c,d\}$, и $c_{\tilde y}^d$ является квазимонотонной, если $\{c,d\}\neq\{0,1\}$.

Если $p\in E_3$, то через J_p обозначим множество одноместных функций 0_p^2, 1_p^2, 2_p^0, 2_p^1.

Следствие 8. *Пусть $g\in Q^{(m)}\setminus A$ и $p\in E_3$. Тогда в J_p имеются функции $s_1,\dots,s_m$ такие, что $g(s_1,\dots,s_m)$ тождественно равна 2.*

Доказательство. Пусть $\tilde d$, $\tilde u$ — те же наборы, что и в лемме 12, и $\{p,q,r\}=E_3$. Определим функцию $s_j\in J_p$, положив $s_j(p)=d_j$ и $s_j(q)=s_j(r)=u_j$. По свойству (12.а) композиция функций $g(s_1,\dots,s_m)$ тождественно равна константе 2. Следствие 8 доказано.

Следствие 9. *Пусть $E_3=\{p,q,r\}$ и $g\in Q^{(m)}\setminus A$. Тогда множество функций $J_p\cup J_q\cup\{g\}$ порождает некоторую функцию из J_r.*

Доказательство. В обозначениях леммы 12 определим такие одноместные функции s_j, $1\leqslant j\leqslant m$, что

$$(s_j(r),s_j(p),s_j(q))=(a_j,u_j,d_j).$$

Функция s_j — квазимонотонная, так как не сохраняет отношение ε. Из (12.а) следует, что $s_j(r)=s_j(p)\neq s_j(q)$ или $s_j(r)=s_j(q)\neq s_j(p)$, т. е. $s_j\in J_p\cup J_q$. Далее согласно (12.б) функция $g(s_1,\dots,s_m)$ принадлежит множеству J_r. Следствие 9 доказано.

Лемма 13. *Если $g\in Q^{(m)}\setminus A$, то $\Psi\subseteq[\Psi^{(1)}\cup\{g\}]$.*

Доказательство. Покажем, как произвольную функцию f из $\Psi^{(n)}$ можно реализовать формулой над $\Psi^{(1)} \cup \{g\}$. Поскольку функция f реализуется константой, ее значения принадлежат множеству $\{p, 2\}$, где $p \in \{0, 1\}$. Пусть $\tilde{a}$, $\tilde{d}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — те же наборы, что и в лемме 12. При каждом j, $1 \leqslant j \leqslant m$, положим

$$s_j(x) = \begin{cases} a_j, & \text{если } x = p, \\ v_j, & \text{если } x \neq p. \end{cases}$$

Так как по свойству (12.б) в E_3 имеется нижняя грань r_j для элементов a_j, v_j, то функция s_j реализуется константой r_j и, следовательно, принадлежит $\Psi^{(1)}$. Пусть

$$p_j(x_1, x_2) = \begin{cases} s_j(x_1), & \text{если } a_j = d_j \neq u_j = v_j, \\ s_j(x_2), & \text{если } a_j = u_j \neq d_j = v_j. \end{cases}$$

Тогда выполняются следующие свойства для функции p_j:

$$p_j(p, p) = a_j, p_j(p, 2) = d_j, p_j(2, p) = u_j, p_j(2, 2) = v_j.$$

Определим двуместные функции $\vee'$ и $\wedge'$ следующим образом:

$$x_1 \vee' x_2 = p_2^2(g(p_1(x_1, x_2), \ldots, p_m(x_1, x_2))),$$
$$x_1 \wedge' x_2 = p_p^2(p_p^2(x_1) \vee' p_p^2(x_2)).$$

Непосредственно проверяется справедливость следующих соотношений:

$$p \wedge' p = p \wedge' 2 = 2 \wedge' p = p \vee' p = p,$$
$$p \vee' 2 = 2 \vee' p = 2 \vee' 2 = 2 \wedge' 2 = 2.$$

Поэтому функция f представляется в форме, аналогичной совершенной дизъюнктивной нормальной форме для булевой функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\tilde{h}}{}' [f(\tilde{h}) \wedge' p_{h_1}^2(x_1) \wedge' \cdots \wedge' p_{h_n}^2(x_n)],$$

где «дизъюнкция» $\bigvee'$ берется по всевозможным наборам $\tilde{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ из E_3^n. Лемма 13 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Для доказательства необходимости условий теоремы 3 заметим следующее. Во-первых, замкнутый класс QA строго содержится в Q, поскольку, например, $\{\vee\} \subseteq Q \setminus A$ (см. лемму 6). Во-вторых, QA содержит все одноместные квазимонотонные функции (одноместная функция не может одновременно сохранять отношения ε и α). Достаточность же этих условий обеспечивается следствиями 2, 7 и леммой 13. Теорема 3 доказана.

5. Теорема о полноте в классе квазимонотонных функций

Основным результатом настоящего раздела является

Теорема 4. *Система функций $F \subseteq Q$ полна в классе Q тогда и только тогда, когда F не содержится целиком ни в одном из классов C_{02}, C_{12}, C_{01}, C_2, B, A, M. В Q имеется ровно семь предполных классов: QC_{02}, QC_{12}, QC_{01}, QC_2, QB, QA, M.*

Предварительно установим справедливость следующих вспомогательных утверждений (леммы 14–18).

Лемма 14. *Пусть $q \in \{0,1\}$, функция $g \in Q^{(m)}$ не сохраняет отношение $\{q,2\}$ и функции $g_i \in P_3^{(n)}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, принимают значения из $\{q,2\}$. Тогда значения функции $h = g(g_1,\dots,g_m)$ принадлежат множеству $\{\bar{q},2\}$.*

Доказательство. Так как функция g не сохраняет отношение $\{q,2\}$, то в $\{q,2\}^m$ имеется такой набор $\tilde{a} = (a_1,\dots,a_m)$, что $g(\tilde{a}) = \bar{q}$. В силу условий доказываемой леммы для любого $\tilde{x} \in E_3^n$ и любого $i, 1 \leqslant i \leqslant m$, имеем $\{g_i(\tilde{x}), a_i\} \neq \{0,1\}$. Отсюда в силу квазимонотонности функции g следует, что $\{h(\tilde{x}), g(\tilde{a})\} \neq \{0,1\}$. Поэтому $h(\tilde{x}) \neq q$. Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *Пусть $d \in \{0,1\}$ и $g \in Q^{(m)} \setminus B$. Тогда в E_3^m имеются наборы $\tilde{a} = (a_1,\dots,a_m)$, $\tilde{b} = (b_1,\dots,b_m)$ и $\tilde{c} = (c_1,\dots,c_m)$ такие, что*

(15.а) *$g(\tilde{a}) = \bar{d}$, $g(\tilde{b}) \in \{d,2\}$, $g(\tilde{c}) = 2$;*

(15.б) *при любом $j, 1 \leqslant j \leqslant m$, справедливо равенство $a_j = b_j = c_j$ либо равенство $(a_j, b_j, c_j) = (d, \bar{d}, 2)$.*

Доказательство. Поскольку функция g не сохраняет отношение $\beta(x_1,\ x_2)$, она не сохраняет и отношение $(x_1,x_2) \neq (\bar{d},d)$. Это означает, что имеются такие наборы $\tilde{a} = (a_1,\dots,a_m)$ и $\tilde{e} = (e_1,\dots,e_m)$, что $(g(\tilde{a}), g(\tilde{e})) = (\bar{d},d)$ и $(a_j,e_j) \neq (\bar{d},d)$ при любом $j, 1 \leqslant j \leqslant m$. Компоненты b_j и c_j определим следующим образом:

$$(b_j,c_j) = \begin{cases} (e_j,\ 2), & \text{если } (a_j,e_j) = (d,\bar{d}), \\ (a_j,a_j) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как в E_3^m набор $\tilde{b}$ имеет нижнюю грань с набором $\tilde{e}$ и $g(\tilde{e}) = d$, то вследствие квазимонотонности функции g имеем $g(\tilde{b}) \in \{d,2\}$. А так как в E_3^m набор $\tilde{c}$ имеет нижние грани как с набором $\tilde{a}$, так и с набором $\tilde{e}$, то $g(\tilde{c}) = 2$. Лемма 15 доказана.

Следствие 10. *Если $\phi \in J_p$ при некотором $p \in E_3$ и $g \in Q^{(m)} \setminus B$, то подстановкой функции ϕ и констант в функцию g можно получить функцию $\overline{\phi}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ — те же наборы, что и в лемме 15, а через q и r обозначены отличные от p элементы в E_3. По определению множества J_p значения функции ϕ принадлежат множеству $\{d, 2\}$ при некотором $d \in \{0,1\}$ и $\phi(q) = \phi(r) \neq \phi(p)$.

Пусть

$$(s_j(q), s_j(r), s_j(p)) = (a_j, a_j, c_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

если $\phi(p) = 2$, и

$$(s_j(q), s_j(r), s_j(p)) = (c_j, c_j, a_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

если $\phi(p) = d$. В обоих случаях имеем $\{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \{0, 1, 2, \phi\}$ и $g(s_1(x), \ldots, s_m(x)) = \overline{\phi}(x)$. Следствие 10 доказано.

Следствие 11. *Если $d \in \{0,1\}$ и $g \in Q^{(m)} \setminus B$, то подставкой переменной и констант в функцию g можно получить функцию из множества $\{\neg\} \cup J_d$.*

Доказательство. Действительно, пусть $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ — те же наборы, что и в лемме 15. Определим такие функции s_j, что $(s_j(d), s_j(\bar{d}), s_j(2)) = (a_j, b_j, c_j)$. Очевидно, что $s_1, \ldots, s_m$ суть функции $0, 1, 2, \tau$ и функция $g(s_1, \ldots, s_m)$ содержится в множестве $\{\neg\} \cup J_d$. Следствие 11 доказано.

Лемма 16. *Пусть $p \in \{0,1\}$ и $g \in Q^{(m)} \setminus A$. Тогда система функций 0, 1, 2, $\neg$, g порождает некоторую функцию из множества J_p.*

Доказательство. Действительно, пусть $\tilde{b}$, $\tilde{d}$ и $\tilde{e}$ суть те же наборы, что и в лемме 8, и

$$(s_j(p), s_j(\bar{p}), s_j(2)) = (b_j, d_j, e_j), \; 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Тогда $s_j \in \{0, 1, 2, \neg, \tau\}$, функция $g(s_1, \ldots, s_m)$ принадлежит множеству J_p. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Пусть $p \in E_3$, $\phi \in J_p$ и $g \in Q^{(m)} \setminus M$. Тогда множество функций $\{0, 1, 2, \phi, \overline{\phi}, g\}$ порождает некоторую функцию из $J_p \setminus \{\phi, \overline{\phi}\}$.*

Доказательство. Функция g — немонотонная. Тогда в множестве E_3^m имеются наборы $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ такие, что $\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$ и $g(\tilde{a}) \nleqslant g(\tilde{b})$. Так как функция g квазимонотонная и в E_3^m наборы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ имеют общую нижнюю грань, то элементы $g(\tilde{a})$ и $g(\tilde{b})$ также имеют нижнюю грань в E_3. Следовательно, $2 = g(\tilde{a}) \neq g(\tilde{b})$. Обозначим через q и r элементы из $E_3 \setminus \{p\}$. Определим такие одноместные функции s_j, что

$$(s_j(q), s_j(r), s_j(p)) = (a_j, a_j, b_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

если $\phi(p) = 2$, и

$$(s_j(q), s_j(r), s_j(p)) = (b_j, b_j, a_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

если $\phi(p) \neq 2$. Получаем $s_j \in \{0,1,2\}$, если $a_j = b_j$, и $s_j \in \{\phi, \overline{\phi}\}$, если $a_j < b_j$. Так как функция $h = g(s_1, \dots, s_m)$ принимает различные значения $g(\tilde{a})$ и $g(\tilde{b})$ и $h(q) = h(r)$, то $h \in J_p$. Наконец, так как $\phi(p) = \bar{\phi}(p) = 2 \neq g(\tilde{b}) = h(p)$ или $\phi(p) \neq 2 = g(\tilde{a}) = h(p) \neq \bar{\phi}(p)$, то $h \notin \{\phi, \bar{\phi}\}$. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Ни один из классов QC_{02}, QC_{12}, QC_{01}, QC_2, QB, QA, M не содержится ни в одном из остальных шести классов.*

Доказательство. С учетом леммы 9 в каждом классе QC_{02}, QC_{12}, QC_{01}, QC_2, QB, QA достаточно указать немонотонную функцию. Поскольку

$$0_0^2 \in QBAC_{02} \setminus M, \quad 1_0^2 \in QC_{12} \setminus M, \quad 1_{(1,2)}^2 \in QC_{01} \setminus M, \quad 2_{(1,2)}^1 \in QC_2 \setminus M,$$

лемма 18 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Необходимость условий первого утверждения теоремы следует из леммы 18 в силу неполноты замкнутых классов QC_{02}, QC_{12}, QC_{01}, QC_2, QB, QA, M. Докажем достаточность этих условий. Пусть в системе функций F содержатся функции $g_{\{0,2\}}$, $g_{\{1,2\}}$, $g_{\{0,1\}}$, g_2, g_B, g_A, g_M, не принадлежащие соответствующим классам QC_{02}, QC_{12}, QC_{01}, QC_2, QB, QA, M. Покажем, что система F полна в Q. С учетом теоремы 3 для этого достаточно выразить функции из $Q^{(1)}$ через функции из F.

1. Выразим некоторую константу. Заметим, что в силу леммы 1 функция $\phi(x) = g_2(x, \dots, x)$ принимает значения из множества $\{a, 2\}$ при некотором $a \in \{0,1\}$. Если ϕ не является константой, то $\phi \in J_p$ при некотором $p \in E_3$. Возможны следующие случаи для элемента p.

Случай 1. $p = \bar{a}$. В этом случае $\phi(a) = \phi(2)$. Так как ϕ принимает значения из множества $\{a, 2\}$, то функция $\phi(\phi(x))$ принимает значения из множества $\{\phi(a), \phi(2)\} = \{\phi(2)\}$, т. е. тождественно равна константе $\phi(2)$.

Случай 2. $p = a$. По лемме 14 функция $\psi = g_{\{a,2\}}(\phi, \dots, \phi)$ принимает значения из множества $\{\bar{a}, 2\}$. Поскольку $\phi(\bar{a}) = \phi(2)$, $\phi(\psi(x))$ — константа.

Случай 3. $p = 2$. Так как $\phi(2) = g_2(2, \dots, 2) \neq 2$, то $\phi = 2_2^a$. Получим функцию a_2^2, как $a_2^2 = 2_2^a(2_2^a)$. По лемме 14 функция $\psi = g_{\{a,2\}}(\phi, \dots, \phi)$ принимает значения из множества $\{\bar{a}, 2\}$. Кроме того, $\psi(0) = \psi(1)$ и если ψ не является константой, то $\psi = 2_2^{\bar{a}}$ или $\psi = \bar{a}_2^2$. Тогда недостающую функция из J_2 получим соответственно как $\bar{a}_2^2 = 2_2^{\bar{a}}(2_2^{\bar{a}})$ или $2_2^{\bar{a}} = \bar{a}_2^2(2_2^a)$ и при помощи функции g_A по следствию 8 получим константу 2.

2. Получим остальные константы в E_3. Пусть p — полученная ранее константа. Подставив константу $p \neq 2$ вместо аргументов функции $g_{\{p,2\}}$ в соответствии с леммой 14, получим константу $q \neq p$. Если же $p = 2$, то суперпозиция $g_2(2, \dots, 2)$ задает константу $q \neq p = 2$.

Так как $g_{\{p,q\}}(a_1, a_2, \dots) = r$ и $r \notin \{p, q\}$ для некоторых a_1, $a_2, \dots$ из $\{p, q\}$, то получаем недостающую константу r.

3. Пусть теперь $p \in \{0, 1\}$. Построим все функции из J_p.

3.1. Построим некоторую функцию из J_p. Для этого по следствию 11 получим одну из функций в множестве $\{\neg\} \cup J_p$. Если полученная функция является отрицанием, то по лемме 16 получим некоторую функцию из J_p.

3.2. Построим все функции из J_p при условии, что имеется функция $\phi \in J_p$. Все построения в этом пункте верны при любом $p \in E_3$. С помощью следствия 10 построим функцию $\bar{\phi}$. Далее по лемме 17 выразим функцию $\psi \in J_p \setminus \{\phi, \bar{\phi}\}$. Наконец, воспользовавшись следствием 10, получим $\bar{\psi}$. Поскольку $\{\phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}\} = J_p$, все функции в J_p построены.

4. Действуя способом, описанным в третьем пункте доказательства, получим все функции из $J_0 \cup J_1$.

5. Выразим все функции из J_2. Для этого сначала по следствию 9 получим некоторую функцию из J_2. Затем способом, описанным в пункте 3.2 доказательства, получим остальные функции из J_2.

6. Отрицание получается по следствию 4 при помощи построенных ранее функций. Тождественная функция получается как $x = \bar{\bar{x}}$.

По следствию 1 построенные выше функции образуют множество $Q^{(1)}$. Достаточность доказана. Справедливость второго утверждения теоремы следует из леммы 18. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Агибалов Г. П.** Квазимонотонные функции и их минимизация // Кибернетика. 1989. № 2. С. 111–113.
2. **Агибалов Г. П.** Дискретные автоматы на полурешетках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993.
3. **Агибалов Г. П.** Свойства замыканий некоторых классов функций на полурешетке подмножеств конечного множества // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XI Междунар. конф. М.: Издат. центр РГГУ, 1996. С. 4.
4. **Агибалов Г. П.** О полных системах функций на полурешетке подмножеств конечного множества // Всесибирские чтения по математике и механике. Т. 1. Математика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 148–149.

5. **Агибалов Г. П.** Канонические формы и полные системы квазимонотонных функций на конечных полурешетках // Междунар. Сиб. конф. по исследованию операций: Материалы конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1998. С. 118.
6. **Агибалов Г. П.** О полных системах операций и синтезе схем для квазимонотонных функций на конечных полурешетках // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. С. 149–152.
7. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

Адрес автора:

Томский государственный
университет,
пр. Ленина, 36,
634050 Томск, Россия.
E-mail: parvatov@isc.tsu.ru

Статья поступила
10 ноября 2002 г.