ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2003. Серия 1. Том 10, № 1, 79–104

УДК 519.17

О РЕГУЛЯРНЫХ КОМПОЗИЦИЯХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ЦВЕТНЫХ ГРАФОВ*)

С. В. Сорочан

Для конечного множества $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ рассматриваются q-цве́тные графы, получающиеся в результате раскрашивания ребер полного неориентированного графа в q цветов. Проводится исследование ранее определенных регулярных композиций наследственных классов q-графов. Найдены нижняя и верхняя оценки значений энтропии этих классов. Введено понятие правильной композиции наследственных классов и доказано, что каждая регулярная правильная композиция является минимальным по включению классом среди композиций с заданным значением энтропии. Охарактеризованы минимальные по включению регулярные $(k+1)$-композиции, содержащие заданную регулярную k-композицию. Найдена взаимосвязь между простыми и сложными композициями, т. е. композициями, хотя бы одна секция которых сама является композицией наследственных классов. Установлено, что в области допустимых значений энтропии фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ существует бесконечное множество точек сгущения.

Введение

В настоящей статье продолжается начатое в [2] исследование наследственных классов цветных графов и развиваются основные результаты, полученные в [3] для композиций наследственных классов цветных графов.

В [2] было введено понятие *цветного графа*, или *q-графа*. Такой граф возникает в результате раскрашивания ребер полного неориентированного графа в q цветов. Точнее, если $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ — множество цветов, то *q-графом* с множеством вершин V называется пара

$$G = (V, g), \text{ где } g : V^{(2)} \to Q,$$

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00–01–00601).

а $V^{(2)}$ — множество всех неупорядоченных пар различных элементов множества V. Если $g(x, y) = \alpha$, то пара (x, y) называется ребром цвета $\alpha, \alpha \in Q$. Для произвольного непустого множества $M \subseteq Q$ через $\mathscr{O}^{\langle q\rangle}(M)$ будем обозначать класс таких q-графов, что $g(V^{(2)}) \subseteq M$.

Обыкновенный граф можно рассматривать как 2-граф. Некоторые термины, применяемые для обыкновенных графов, естественным образом распространяются на цветные графы. Это относится, в частности, к понятиям изоморфизма, порожденного подграфа и наследственного класса.

Два цветных графа называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами их вершин, сохраняющая цвета ребер.

Подграф G' цветного графа $G = (V, g)$, порожденный множеством $V' \subseteq V$, — это цветной граф (V', g'), где g' — ограничение g на V'. Этот подграф обозначается через $G\langle V'\rangle$.

Класс $\mathscr{X}^{\langle q\rangle}$ q-графов называется *наследственным* (или *фрагментно замкнутым*), если в нем содержится каждый q-граф, изоморфный порожденному подграфу графа $G \in \mathscr{X}^{\langle q\rangle}$.

Если V и U — непересекающиеся множества, то *двудольным q-графом* с неупорядоченными долями V и U [2] называется тройка

$$(V, U, g), \text{где } g : V \times U \to Q.$$

Иначе говоря, двудольный цветной граф возникает в результате раскрашивания ребер полного двудольного графа в q цветов. Для непустого $P \subseteq Q$ множество всех двудольных q-графов, для которых $g(V \times U) \subseteq P$, будем обозначать через $\mathscr{B}^{\langle q\rangle}(P)$. Определения изоморфизма, порожденного подграфа и наследственного класса распространяются на двудольные цветные графы очевидным образом. Двудольный подграф заданного q-графа G, порожденный долями V и U, $V, U \subseteq V(G)$, $V \cap U = \varnothing$ и удалением всех ребер, принадлежащих одной и той же доле, будем обозначать через $G\langle V, U\rangle$.

Пусть $\mathscr{X}^{\langle q\rangle}$ и $\mathscr{Y}^{\langle q\rangle}$ — произвольные наследственные классы q-графов и двудольных q-графов соответственно. Как правило, верхний индекс $^{\langle q\rangle}$ в обозначении таких классов будем опускать. Обозначим через $\mathscr{X}_n$ совокупность q-графов из $\mathscr{X}$ с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, а через $\mathscr{Y}_{n_1,n_2}$ — множество двудольных q-графов из $\mathscr{Y}$, в которых

$$V = \{1, 2, \ldots, n_1\}, \quad U = \{n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + n_2\}.$$

Рассмотрим последовательности

$$h_n(\mathscr{X}) = \log_q |\mathscr{X}_n| \Big/ \binom{n}{2} \quad \text{и} \quad h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y}) = \frac{\log_q |\mathscr{Y}_{n_1,n_2}|}{n_1 n_2}.$$

В [2] и [3] доказано, что если классы $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ бесконечны, то величины $h_n(\mathscr{X})$ и $h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y})$ монотонно не возрастают (причем $h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y})$ монотонно не возрастает по каждому индексу) и существуют пределы

$$h(\mathscr{X}) = \lim_{n\to\infty} h_n(\mathscr{X}) \text{ и } h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}) = \lim_{\substack{n_1\to\infty\\ n_2\to\infty}} h_{n_1,n_2}(\mathscr{Y}),$$

называемые *энтропиями* классов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. В частности, $h(\mathscr{O}(M)) = \log_q |M|$ и $h_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}(P)) = \log_q |P|$.

В [1] было установлено, что при описании области допустимых значений энтропии наследственных классов обыкновенных графов определяющую роль играют классы $\mathscr{E}_{i,j}$ всех графов, в каждом из которых множество вершин можно разбить на $i+j$ секций, среди которых i секций порождают полные, а j секций — пустые подграфы, $i,j \in \mathbb{Z}_+$. Оказалось, что классы $\mathscr{E}_{i,j}$, где $i+j=k$, являются минимальными (по включению) среди наследственных классов обыкновенных графов с энтропией $h = 1 - 1/k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, причем допустимые значения энтропии исчерпываются только числами указанного вида.

После этого в [3] были исследованы специальные фрагментно замкнутые классы q-графов, названные композициями наследственных классов цветных графов, которые являются обобщением классов $\mathscr{E}_{i,j}$ на случай произвольного числа цветов q.

Композиции наследственных классов цветных графов определяются следующим образом. Пусть для каждой пары (i,j), где $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ и $k \geqslant 2$, при $i=j$ выбран некоторый бесконечный наследственный класс $\mathscr{X}^{ii}$ q-графов, а при $i \neq j$ — некоторый бесконечный наследственный класс $\mathscr{X}^{ij}$ двудольных q-графов. Положим $\mathscr{X}^{ji} = \mathscr{X}^{ij}$ при любых $i<j$. Множество всех выбранных классов обозначим через $\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}$. Тогда *$k$-композицией $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = \|\mathscr{X}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$ наследственных классов q-графов из $\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}$* [3] называется совокупность таких q-графов G, что множество вершин в G можно разбить на непересекающиеся подмножества $V_1,\ldots,V_k$ (некоторые из них могут быть пустыми) так, что $G\langle V_i\rangle \in \mathscr{X}^{ii}$, $G\langle V_i,V_j\rangle \in \mathscr{X}^{ij}$ при всех $i\neq j$, $i,j=1,\ldots,k$. Классы $\mathscr{X}^{11},\ldots,\mathscr{X}^{kk}$ называются *секциями* k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$.

Каждой k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ соответствует симметрическая квадратная матрица $H_{(k)} \equiv H = (h^{ij})$ порядка k, в которой

$$h^{ii} = h(\mathscr{X}^{ii}) \quad \text{и} \quad h^{ij} = h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{ij}),\ \ i\neq j,\ \ i,j=1,\ldots,k,$$

называемая *матрицей энтропий* k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Каждая композиция наследственных классов q-графов определена с точностью до нумерации секций. Поэтому матрица ее энтропий определена с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов.

В [3] установлено, что проблема вычисления энтропии любой композиции наследственных классов цветных графов сводится к задаче поиска максимума квадратичной формы с линейными ограничениями. Точнее, справедлива

Теорема 1 [3].

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \max\left\{F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \mid \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\right\},$$

где $\mathbf{x} = \{x_1,\dots,x_k\}^\top$, $\mathbf{1} \equiv \mathbf{1}_{(k)} = \{1,\dots,1\}^\top_{(k)}$, $\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}_{(k)} = \{0,\dots,0\}^\top_{(k)}$, *а запись* $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ *означает, что каждая компонента вектора* $\mathbf{x}$ *неотрицательна.*

Для описания решения полученной задачи квадратичного программирования в [3] потребовалось ввести понятие регулярных и нерегулярных композиций наследственных классов q-графов. Пусть H — матрица энтропий k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ наследственных классов q-графов из $\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}$, а Q — матрица размера $k \times (k-1)$, в столбцах которой записаны векторы произвольного базиса линейного пространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 0$. Тогда $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ называется *регулярной k-композицией* [3], если

⟨1⟩ матрица $Q^\top HQ$ является отрицательно определенной (*требование максимальности*);

⟨2⟩ $H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}$, т. е. каждая компонента вектора $H^{-1}\mathbf{1}$ положительна (*условие внутренней допустимости*).

Если хотя бы одно из условий ⟨1⟩, ⟨2⟩ не выполняется, то $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ называется *нерегулярной* k-композицией.

Решением указанной выше задачи квадратичного программирования с линейными ограничениями является

Теорема 2 [3]. *Энтропия каждой регулярной k-композиции наследственных классов q-графов вычисляется по формуле*

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \frac{1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} = \mathbf{c}^\top\left[H - HQ(Q^\top H\,Q)^{-1}Q^\top H\right]\mathbf{c},$$

где $\mathbf{c}$ *— произвольная точка из* $\mathbb{R}^k$ *такая, что* $\mathbf{1}^\top\mathbf{c} = 1$, *причем у соответствующей задачи квадратичного программирования имеется единственная точка максимума*

$$\mathbf{x}^\circ = \frac{H^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} = \left[E_{(k)} - Q(Q^\top HQ)^{-1}Q^\top H\right]\mathbf{c},$$

являющаяся внутренней точкой допустимой области

$$\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$$

этой задачи. Любая нерегулярная композиция не является минимальным (по включению) классом среди наследственных классов q-графов с заданным значением энтропии, энтропия нерегулярной композиции равна максимальной энтропии целиком содержащейся в ней композиции с меньшим количеством секций.

Одним из важных следствий из этой теоремы является

Замечание 1 (замечание 2 из [3]). Если $h^{ij} = 0$ хотя бы для одной пары (i, j), $i \neq j$, то $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ — нерегулярная k-композиция.

В [2] показано, что область значений энтропии бесконечных наследственных классов двудольных q-графов исчерпывается только числами вида

$$0 = \log_q 1,\ \log_q 2,\ \ldots,\ \log_q(q-1),\ \log_q q = 1.$$

Поэтому с учетом замечания 2 из [3] в дальнейшем рассматриваются только такие k-композиции наследственных классов q-графов, что

$$h^{ij} \in \{\log_q 2, \log_q 3, \ldots, \log_q(q-1), 1\},\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, k.$$

Также в [3] были введены понятия порожденной и порождающей композиций наследственных классов цветных графов. k-композиция

$$C_i(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}) = \left\| \begin{array}{cccccc} \mathscr{X}^{11} & \ldots & \mathscr{X}^{1,i-1} & \mathscr{X}^{1,i+1} & \ldots & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{i-1,1} & \ldots & \mathscr{X}^{i-1,i-1} & \mathscr{X}^{i-1,i+1} & \ldots & \mathscr{X}^{i-1,k+1} \\ \mathscr{X}^{i+1,1} & \ldots & \mathscr{X}^{i+1,i-1} & \mathscr{X}^{i+1,i+1} & \ldots & \mathscr{X}^{i+1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \ldots & \mathscr{X}^{k+1,i-1} & \mathscr{X}^{k+1,i+1} & \ldots & \mathscr{X}^{k+1,k+1} \end{array} \right\|$$

называется *композицией, порожденной удалением i-й секции* из $(k+1)$-композиции

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}) = \left\| \begin{array}{ccc} \mathscr{X}^{11} & \ldots & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \ldots & \mathscr{X}^{k+1,k+1} \end{array} \right\|,$$

или просто *порожденной композицией*, $i = 1, \ldots, k+1$. Класс $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ называется *композицией, порождающей k-композицию* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$.

В [3] установлена взаимосвязь между матрицами энтропий композиций, одна из которых порождается удалением некоторой секции из другой (см. формулы (3.1)–(3.8) из теоремы 3 [3]), и доказано, что любая регулярная k-композиция порождается удалением одной из секций некоторой регулярной $(k+1)$-композиции (теорема 5 [3]).

Основные результаты, полученные в [3], указывают на перспективность направления, связанного с более детальным изучением регулярных композиций наследственных классов цветных графов. Целью этой работы является продолжение исследования регулярных композиций. Их изучение может дать определенное представление относительно устройства области допустимых значений энтропии наследственных классов q-графов.

Основными результатами настоящей статьи являются определение минимальных по включению наследственных классов среди композиций с заданным значением энтропии, характеризация регулярных $(k+1)$-композиций с наименьшей энтропией, содержащих заданную регулярную k-композицию, определение значений энтропии сложных композиций, т. е. композиций, хотя бы одна секция которых сама является композицией некоторых наследственных классов, а также доказательство существования в области значений энтропии фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ бесконечного множества точек сгущения.

Статья построена следующим образом. В § 1 устанавливаются нижняя и верхняя оценки значения энтропии произвольной регулярной композиции наследственных классов q-графов в зависимости от энтропий ее порождающих классов однодольных и двудольных q-графов. В § 2 вводится понятие правильной композиции наследственных классов и доказывается, что каждая регулярная правильная композиция является минимальным по включению классом среди композиций с заданным значением энтропии. В § 3 содержится основной результат работы: здесь получены необходимые и достаточные условия для регулярности $(k+1)$-композиций, содержащих заданную регулярную k-композицию, доказано существование и приведена характеризация минимальных по включению среди таких композиций. В § 4 исследуются сложные композиции наследственных классов q-графов и доказывается, что энтропия каждой сложной композиции совпадает с энтропией некоторой определенным образом связанной с ней композиции с бо́льшим числом секций. Наконец, в § 5 вводятся понятия монотонно возрастающей последовательности наследственных классов q-графов, минимальной верхней границы и точки сгущения энтропии и устанавливается, что в области допустимых значений энтропии фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ существует бесконечное множество точек сгущения.

§ 1. Нижняя и верхняя оценки энтропии регулярных композиций

В следующей теореме устанавливаются нижняя и верхняя оценки энтропии регулярных композиций наследственных классов цветных графов, зависящие от значений энтропии ее порождающих однодольных и двудольных классов.

Теорема 3. *Пусть $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ — регулярная k-композиция наследственных классов q-графов из $\mathscr{X}^{(k)}$. Тогда ее энтропия $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\max_{i=1,\dots,k} h(\mathscr{X}^{ii}) < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) < \max_{i\neq j} h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{ij}).$$

Доказательство. Пусть H — матрица энтропий композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, а $\mathbf{e}^i_{(k)} \equiv \mathbf{e}^i$ — i-й столбец единичной матрицы порядка k. Тогда по теореме 1 при любом $i = 1,\dots,k$ имеем

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \max\left\{\mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1,\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\right\} > (\mathbf{e}^i)^\top H\mathbf{e}^i = h^{ii},$$

причем неравенства выполняются строго, так как точки $\mathbf{e}^i$ лежат на границе допустимой области и, следовательно, по теореме 2 не являются точками максимума. Из этих неравенств следует нижняя оценка для энтропии.

Докажем справедливость верхней оценки. Пусть

$$a = \max_{i=1,\dots,k} h(\mathscr{X}^{ii}), \quad b = \max_{i\neq j} h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{ij}).$$

Рассмотрим k-композицию $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$, целиком содержащую $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ (т. е. $\mathscr{X}^{ij} \subseteq \mathscr{Y}^{ij}$ при любых $i,j = 1,\dots,k$) и имеющую матрицу энтропий

$$\widetilde{H} = \begin{Vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{Vmatrix} = b\mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^\top - (b-a)E_{(k)}.$$

Легко видеть, что $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) \leqslant h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right)$. Действительно, если $\mathbf{x}^\circ$ и $\mathbf{y}^\circ$ — точки из области $\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geqslant 0\}$, на которых достигаются наибольшие значения функций $\mathbf{x}^\top H\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^\top \widetilde{H}\mathbf{x}$ соответственно, то по теореме 1 и в силу неотрицательности элементов матрицы H имеем

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = (\mathbf{x}^\circ)^\top H\mathbf{x}^\circ \leqslant (\mathbf{x}^\circ)^\top \widetilde{H}\mathbf{x}^\circ \leqslant (\mathbf{y}^\circ)^\top \widetilde{H}\mathbf{y}^\circ = h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right).$$

Предположим, что композиция $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ не является регулярной. Тогда по теореме 2 имеем

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) = h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k-1)})\right) = \dots = h(\mathscr{Y}^{11}) = a < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right).$$

Противоречие. Значит, $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ — регулярная композиция. Вычислим ее энтропию. Возьмем матрицу $Q_{k\times(k-1)} \equiv Q$, столбцами которой являются базисные векторы линейного пространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 0$, в форме

$$Q_\circ = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{Vmatrix}.$$

Из отрицательной определенности матрицы

$$Q_\circ{}^\top \widetilde{H} Q_\circ = -(b-a)(E_{(k)} + \mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^\top)$$

следует, что $a < b$. Далее вычисляем матрицу

$$\widetilde{H}^{-1} = \frac{1}{b-a}\Big[\frac{b}{a+(k-1)b}\mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^\top - E_{(k)}\Big]$$

и вектор-столбец

$$\widetilde{H}^{-1}\mathbf{1}_{(k)} = \frac{\mathbf{1}}{a+(k-1)b}.$$

Теперь по теореме 2 находим, что

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) = \frac{1}{\mathbf{1}_{(k)}^\top \widetilde{H}^{-1}\mathbf{1}_{(k)}} = \frac{a+(k-1)b}{k} < b.$$

Отсюда вытекает верхняя оценка для энтропии композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Теорема 3 доказана.

§ 2. О минимальных по включению композициях наследственных классов цветных графов

Так же как в [1] для наследственных классов обыкновенных графов, при исследовании фрагментно замкнутых классов цветных графов можно поставить две основные проблемы: установить область допустимых значений энтропии этих классов и в множестве наследственных классов цветных графов с заданным значением энтропии найти так называемые минимальные элементы, т. е. классы, являющиеся минимальными по включению. Частично ответ на первый вопрос дает теорема 2, причем из ее формулировки видно, что энтропия наследственных классов q-графов принимает более разнообразные значения по сравнению с числами вида $1-1/k$ (она равна отношению некоторых двух многочленов с рациональными коэффициентами не обязательно от рациональных энтропий ее порождающих однодольных и двудольных классов). Кроме того, выявлено, что никакая нерегулярная композиция наследственных классов q-графов не является минимальным элементом. В этом параграфе частично будет получен ответ на вопрос о минимальных по включению классах в множестве композиций фрагментно замкнутых классов q-графов.

Композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = \|\mathscr{X}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$ назовем *правильной k-композицией*, если $\mathscr{X}^{jj} = \mathscr{O}(M_{jj})$, $\mathscr{X}^{ij} = \mathscr{B}(M_{ij})$ при некоторых непустых $M_{jj} \subset Q$, $M_{ij} \subseteq Q$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,k$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *При любом натуральном $k \geqslant 2$ каждая правильная регулярная k-композиция наследственных классов q-графов является минимальным элементом в множестве k-композиций с соответствующим значением энтропии.*

Доказательство. Пусть $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = \|\mathscr{X}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$ — произвольная правильная регулярная k-композиция наследственных классов $\mathscr{X}^{ij}$ q-графов, имеющая матрицу энтропий H. Рассмотрим любую k-композицию $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)}) = \|\mathscr{Y}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$, собственно содержащуюся в $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, т. е. $\mathscr{Y}^{ij} \subseteq \mathscr{X}^{ij}$ при любых i и j, $1 \leqslant i,\ j \leqslant k$, причем существуют такие i°, j°, что $\mathscr{Y}^{i^\circ j^\circ} \subset \mathscr{X}^{i^\circ j^\circ}$. Положим

$$\widetilde{h}(\mathscr{Y}^{i^\circ j^\circ}) = \begin{cases} h(\mathscr{Y}^{i^\circ j^\circ}), & \text{если } i^\circ = j^\circ, \\ h_{\mathscr{B}}(\mathscr{Y}^{i^\circ j^\circ}), & \text{если } i^\circ \neq j^\circ. \end{cases}$$

Покажем, что $\widetilde{h}(\mathscr{Y}^{i^\circ j^\circ}) < \widetilde{h}(\mathscr{X}^{i^\circ j^\circ})$.

Пусть $i^\circ = j^\circ$. Так как $\mathscr{Y}^{i^\circ i^\circ} \subset \mathscr{X}^{i^\circ i^\circ}$, то найдется такое натуральное $n_\circ$, что $\mathscr{Y}_{n_\circ}^{i^\circ i^\circ} \subset \mathscr{X}_{n_\circ}^{i^\circ i^\circ} = \mathscr{O}_{n_\circ}(M_{i^\circ i^\circ})$. Тогда в силу монотонного невозрастания последовательности $\{h_n(\mathscr{Y}^{i^\circ i^\circ}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ и того, что $|\mathscr{O}_n(M_{i^\circ i^\circ})| = |M_{i^\circ i^\circ}|^{\binom{n}{2}}$, имеем

$$h\left(\mathscr{Y}^{i^\circ i^\circ}\right) \leqslant h_{n_\circ}(\mathscr{Y}^{i^\circ i^\circ}) \leqslant \frac{\log_q\left(|M_{i^\circ i^\circ}|^{\binom{n_\circ}{2}} - 1\right)}{\binom{n_\circ}{2}} < \log_q |M_{i^\circ i^\circ}| = h\left(\mathscr{X}^{i^\circ i^\circ}\right).$$

Аналогично рассматривается случай $i^\circ \neq j^\circ$.

Таким образом, матрицу энтропий $\widetilde{H}$ композиции $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ можно представить в виде $\widetilde{H} = H - \Delta H$, где ΔH — матрица с неотрицательными элементами, причем хотя бы один ее элемент положителен. Докажем, что $h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)$. Пусть $\mathbf{x}^\circ$ и $\mathbf{y}^\circ$ — точки из области $\mathscr{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{1}^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$, на которых достигаются наибольшие значения функций $\mathbf{x}^\top H \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^\top \widetilde{H} \mathbf{x}$ соответственно. Тогда по теореме 1 получаем, что

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) = (\mathbf{y}^\circ)^\top \widetilde{H} \mathbf{y}^\circ = (\mathbf{y}^\circ)^\top H \mathbf{y}^\circ - (\mathbf{y}^\circ)^\top \Delta H \mathbf{y}^\circ.$$

Предположим, что $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ — нерегулярная композиция. Тогда из доказательства теоремы 2 следует, что точка $\mathbf{y}^\circ$ лежит на границе допустимой области $\mathscr{D}$. Из регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ вытекает, что $\mathbf{x}^\circ$ является внутренней точкой из $\mathscr{D}$. Значит, $\mathbf{x}^\circ \neq \mathbf{y}^\circ$, откуда в силу единственности точки $\mathbf{x}^\circ$ получаем, что

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) = (\mathbf{y}^\circ)^\top H\mathbf{y}^\circ - (\mathbf{y}^\circ)^\top \Delta H\mathbf{y}^\circ \leqslant (\mathbf{y}^\circ)^\top H\mathbf{y}^\circ < (\mathbf{x}^\circ)^\top H\mathbf{x}^\circ = h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right).$$

Пусть теперь $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ — регулярная композиция. Тогда по теореме 2 $\mathbf{y}^\circ$ является внутренней точкой из $\mathscr{D}$, т. е. каждая ее компонента положительна. Следовательно, в силу отмеченных свойств матрицы ΔH имеем

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) = (\mathbf{y}^\circ)^\top H\mathbf{y}^\circ - (\mathbf{y}^\circ)^\top \Delta H\mathbf{y}^\circ \leqslant (\mathbf{x}^\circ)^\top H\mathbf{x}^\circ - (\mathbf{y}^\circ)^\top \Delta H\mathbf{y}^\circ < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right).$$

Таким образом, вне зависимости от регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ справедливо неравенство $h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})\right) < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)$. Отсюда заключаем, что класс $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ является минимальным элементом среди k-композиций с заданным значением энтропии. Теорема 4 доказана.

§ 3. О минимальных по включению регулярных $(k+1)$-композициях, содержащих заданную регулярную k-композицию

При изучении регулярных композиций наследственных классов цветных графов можно поставить вопрос о том, как устроены минимальные по включению регулярные $(k+1)$-композиции, содержащие заданную регулярную k-композицию. В этом параграфе приводится частичная характеризация таких $(k+1)$-композиций.

Следующая теорема представляет собой критерий регулярности $(k+1)$-композиции, содержащей заданную регулярную k-композицию.

Теорема 5. *Пусть H — матрица энтропий регулярной k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ наследственных классов q-графов из $\mathscr{X}^{(k)}$, а $\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & h \end{Vmatrix}$ — матрица энтропий $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порождающей $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Тогда для того чтобы $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ являлась регулярной композицией, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\begin{gathered} \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, \quad \mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h > 0, \\ (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость выполнения указанных неравенств непосредственно следует из формул (3.3) и (3.6) теоремы 3 из [3], устанавливающей взаимосвязь между порожденной и порождающей композициями. Докажем, что выполнение этих условий достаточно для регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$.

Используя представление

$$\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}\begin{Vmatrix} \dfrac{(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}\end{Vmatrix}$$

теоремы 3 из [3], заключаем, что выполнение неравенств (3.1) обусловливает внутреннюю допустимость композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$. Убедимся, что из (3.1) также следует выполнение условия максимальности.

В качестве матрицы $Q_{(k\times(k-1))}$, столбцами которой являются координаты базисных векторов линейного пространства решений уравнения $\mathbf{1}^\top\mathbf{x} = 0$, возьмем определенную ранее матрицу $Q_\circ$. Тогда

$$Q_{((k+1)\times k)} \equiv \overline{Q}_\circ = \begin{Vmatrix} Q_\circ & \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{0}^\top & -1 \end{Vmatrix},$$

где $\mathbf{0} \equiv \mathbf{0}_{(k-1)}$, а $\mathbf{e}^1 \equiv \mathbf{e}^1_{(k)} = \{1, 0, \ldots, 0\}^\top_{(k)}$. Отсюда

$$\overline{Q}_\circ^\top \overline{HQ}_\circ = \begin{Vmatrix} Q_\circ^\top H Q_\circ & Q_\circ^\top(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h}) \\ (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top Q_\circ & (\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1 - 2(\mathbf{e}^1)^\top\mathbf{h} + h \end{Vmatrix}.$$

Вычислим $\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{HQ}_\circ)$ как определитель блочной матрицы:

$$\begin{aligned}
&\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{HQ}_\circ) = \det(Q_\circ^\top H Q_\circ) \\
&\times \left[((\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1 - 2(\mathbf{e}^1)^\top\mathbf{h} + h) - (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top Q_\circ (Q_\circ^\top H Q_\circ)^{-1} Q_\circ^\top (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})\right] \\
&\qquad = \det(Q_\circ^\top H Q_\circ) \\
&\times \left\{(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top \left[H^{-1} - Q_\circ (Q_\circ^\top H Q_\circ)^{-1} Q_\circ^\top\right](H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h}) - (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)\right\} \\
&\qquad = \det(Q_\circ^\top H Q_\circ) \\
&\times \left\{(H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1)^\top \left[H - HQ_\circ (Q_\circ^\top H Q_\circ)^{-1} Q_\circ^\top H\right](H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)\right\}.
\end{aligned}$$

Применяя соотношение (2.7) из [3] при $\mathbf{c} = \dfrac{H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}$, получим

$$\begin{aligned}
\det(\overline{Q}_\circ^\top \overline{HQ}_\circ) &= \det(Q_\circ^\top H Q_\circ) \times \left[\frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} - (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)\right] \\
&= -\frac{\det(Q_\circ^\top H Q_\circ)}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}\left[(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h) - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2\right].
\end{aligned}$$

Домножая третье (векторное) неравенство из (3.1) слева на строку $\mathbf{1}^\top$, обнаруживаем, что

$$(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h) > (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2 + (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1), \qquad (3.2)$$

т. е. выражение в квадратных скобках положительно. Отсюда и из отрицательной определенности матрицы $Q_\circ^\top H Q_\circ$ следует, что $\overline{Q}_\circ^\top \overline{H Q}_\circ$ также является отрицательно определенной матрицей. Значит, $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ — регулярная $(k+1)$-композиция. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Использование теоремы 5 позволяет получить более простое доказательство теоремы 5 из [3].

Эта теорема утверждает, что *любая регулярная k-композиция наследственных классов q-графов порождается удалением одной секции из некоторой регулярной $(k+1)$-композиции.*

Действительно, если H и $\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & h \end{Vmatrix}$ — матрицы энтропий регулярной k-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и ее порождающей $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ соответственно, то нетрудно видеть, что при $\mathbf{h} = \mathbf{1}$ и при любом $0 \leqslant h < 1$ неравенства (3.1) выполняются

$$\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h = \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h > \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1 = \frac{1}{h\Big(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\Big)} - 1 > 0,$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} \\ = (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - 1)H^{-1}\mathbf{1} = (1-h)H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Следовательно, $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ является регулярной композицией.

Замечание 3. Неравенство $\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h > 0$ является следствием неравенств

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}.$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из формулы (3.2).

Следствие 1. *Для регулярности $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порождающей регулярную k-композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}. \qquad (3.3)$$

Следствие 2. *Если $\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & h \end{Vmatrix}$ — матрица энтропий регулярной $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порождающей регулярную*

k-композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ с матрицей энтропий H, то величина $\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2-1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} < \mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} \leqslant \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Для обоснования верхнего неравенства из формулы (3.4) воспользуемся положительностью величины $\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}$, регулярностью композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и теоремами 1 и 2, а именно

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} &= (H^{-1}\mathbf{h})^\top H(H^{-1}\mathbf{h}) = (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2\Big(\frac{H^{-1}\mathbf{h}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}}\Big)^\top H\Big(\frac{H^{-1}\mathbf{h}}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}}\Big)\\
&\leqslant (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2 \max\big\{\mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\in\mathbb{R}^k, \mathbf{1}^\top\mathbf{x}=1\big\}\\
&= (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2 \max\big\{\mathbf{x}^\top H\mathbf{x} \mid \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0}, \mathbf{1}^\top\mathbf{x}=1\big\}\\
&= (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2 h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right) = \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

Докажем теперь нижнее неравенство. Домножая слева векторное неравенство

$$(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}$$

на матрицу H, элементы которой неотрицательны и в каждой строке которой есть положительные элементы, получим

$$(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h)\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)\mathbf{h} > \mathbf{0}.$$

Из данных неравенств следует, что скалярное произведение их левых частей положительно, т. е.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h)^2(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}) - 2(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h)(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})&\\
+ (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)^2(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) > 0.&
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h)(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1})\Big[(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h) - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2-1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}\Big]&\\
+ h(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)^2 > 0,&
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} > \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2-1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} + \frac{h}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}\Big[\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2-1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h}\Big].$$

Согласно формуле (3.7) из [3] имеем

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h})^2-1}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h} = \overline{\mathbf{1}}^\top\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right)} > 0.$$

Это обосновывает справедливость нижнего неравенства из (3.4). Следствие 2 доказано.

Далее установим существование и дадим характеризацию минимальных по включению регулярных $(k+1)$-композиций, целиком содержащих заданную регулярную k-композицию.

Теорема 6. *Регулярные $(k+1)$-композиции с наименьшим возможным значением энтропии, целиком содержащие заданную регулярную k-композицию, существуют. Кроме того, если $\overline{H} = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & h \end{Vmatrix}$ — матрица энтропий регулярной $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порождающей регулярную композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ с матрицей энтропий H, то для того чтобы $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ имела наименьшую возможную энтропию среди всех композиций, порождающих $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, необходимо, чтобы $h = 0$.*

Доказательство. Существование регулярной $(k+1)$-композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$, порождающей k-композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, непосредственно вытекает из теоремы 5 [3]. Рассмотрим $(k+1)$-композицию $C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})$, порождающую $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и имеющую матрицу энтропий

$$\overline{H}^* = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что из регулярности композиций $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ следует выполнение условий (3.3) для композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})$. Действительно,

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, \quad (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h})H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}$$
$$= (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} + hH^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}.$$

Значит, по следствию 1 $C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})$ — регулярная композиция. Тогда по формуле (3.8) из [3] имеем, что

$$\frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})\right)} = \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}}$$
$$\geqslant \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})\right)} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h} = \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right)}.$$

Таким образом, $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})\right) \leqslant h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right)$.

Теперь среди всех регулярных композиций $C(\widetilde{\mathscr{X}}_*^{(k+1)})$, имеющих матрицу энтропий $\overline{H}^* = \begin{Vmatrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & 0 \end{Vmatrix}$, выберем такие, для которых величина $\dfrac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}}$ принимает минимальное возможное значение в зависимости от вектора $\mathbf{h}$. Это значение существует, так как компоненты вектора $\mathbf{h}$ являются элементами конечного множества $\{\log_q 2, \log_q 3, \ldots, \log_q(q-1), 1\}$ (см. введение). Очевидно, что энтропия именно этих композиций является наименьшей среди энтропий всех регулярных $(k+1)$-композиций, порождающих $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Теорема 6 доказана.

Замечание 4. Из теоремы 4 и доказательства теоремы 6 можно установить, как устроены некоторые минимальные по включению регулярные $(k+1)$-композиции, порождающие заданную регулярную k-композицию.

Действительно, из всех регулярных $(k+1)$-композиций, построенных при доказательстве теоремы 6, выберем правильные композиции. Тогда по теореме 4 они являются минимальными по включению элементами среди композиций с заданным значением энтропии.

Отметим, что пока нельзя исключать и возможность существования неправильных композиций, являющихся минимальными по включению элементами среди регулярных $(k+1)$-композиций, порождающих заданную регулярную k-композицию.

Следствие 3. *Если* $\overline{H} = \left\| \begin{matrix} H & \mathbf{h}^\circ \\ (\mathbf{h}^\circ)^\top & 0 \end{matrix} \right\|$ *— матрица энтропий регулярной композиции* $C(\widetilde{\mathscr{X}}_\circ^{(k+1)})$*, имеющей наименьшую возможную энтропию среди всех* $(k+1)$*-композиций, порождающих регулярную* k*-композицию* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$*, то вектор* $\mathbf{h}^\circ$ *удовлетворяет условиям* $\mathbf{h}^\circ \in \mathscr{R}$*, где*

$$\mathscr{R} = \big\{ \mathbf{h} \mid \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h) H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1) H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}, \\ h^{j,k+1} \in \{\log_q 2, \log_q 3, \ldots, \log_q (q-1), 1\},\ j = 1, \ldots, k \big\},$$

и

$$\min_{\mathbf{h}\in\mathscr{R}} \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}} = \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}^\circ - 1)^2}{(\mathbf{h}^\circ)^\top H^{-1}\mathbf{h}^\circ}.$$

Еще одну характеризацию регулярных $(k+1)$-композиций с наименьшим возможным значением энтропии, содержащих заданную регулярную k-композицию, дает

Теорема 7. *Пусть* $\overline{H}^\circ = \left\| \begin{matrix} H & \mathbf{h}^\circ \\ (\mathbf{h}^\circ)^\top & 0 \end{matrix} \right\|$ *— матрица энтропий регулярной композиции* $C(\widetilde{\mathscr{X}}_\circ^{(k+1)})$*, имеющей минимально возможную энтропию среди всех* $(k+1)$*-композиций, порождающих регулярную* k*-композицию* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$*. Тогда при любом таком векторе* $\mathbf{h}$ *высоты* k *с компонентами из множества* $\{\log_q 2, \log_q 3, \ldots, \log_q (q-1), 1\}$*, что* $\mathbf{h} \leqslant \mathbf{h}^\circ$ *и* $\mathbf{h} \neq \mathbf{h}^\circ$*,* $(k+1)$*-композиция* $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ *с матрицей энтропий* $\overline{H} = \left\| \begin{matrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & 0 \end{matrix} \right\|$ *не является регулярной, т. е.* $\mathbf{h} \notin \mathscr{R}$*.*

Доказательство. Пусть $\Delta\mathbf{h} = \mathbf{h}^\circ - \mathbf{h}$, $\Delta\overline{H} = \overline{H}^\circ - \overline{H}$. По условию $\Delta\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}$, $\Delta\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. Обозначим через $\overline{\mathbf{x}}^\circ$ и $\overline{\mathbf{x}}^*$ точки из области

$$\mathscr{D} = \left\{ \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \mathbf{1}^\top \overline{\mathbf{x}} = 1,\ \overline{\mathbf{x}} \geqslant \overline{\mathbf{0}} \right\},$$

на которых достигаются наибольшие значения функций $\overline{\mathbf{x}}^\top \overline{H}^\circ \overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}^\top \overline{H} \overline{\mathbf{x}}$ соответственно.

Предположим, что $(k+1)$-композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ является регулярной. Тогда по теореме 2 каждая компонента вектора $\overline{\mathbf{x}}^*$ строго положительна. Следовательно, пользуясь теоремой 1, получаем, что

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right) = (\overline{\mathbf{x}}^*)^\top \overline{H} \overline{\mathbf{x}}^* = (\overline{\mathbf{x}}^*)^\top \overline{H}^\circ \overline{\mathbf{x}}^* - (\overline{\mathbf{x}}^*)^\top \Delta \overline{H} \overline{\mathbf{x}}^*$$

$$\leqslant (\overline{\mathbf{x}}^\circ)^\top \overline{H}^\circ \overline{\mathbf{x}}^\circ - 2x^*_{k+1} \sum_{j=1}^{k} x^*_j \Delta h_j < h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}_\circ^{(k+1)})\right).$$

Это противоречит тому, что $C(\widetilde{\mathscr{X}}_\circ^{(k+1)})$ имеет наименьшую возможную энтропию среди всех композиций, порождающих $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$. Следовательно, $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ не является регулярной композицией, т. е. $\mathbf{h} \notin \mathscr{R}$. Теорема 7 доказана.

§ 4. О сложных композициях наследственных классов

k-композицию наследственных классов q-графов ($k \geqslant 2$) будем называть *сложной композицией*, если хотя бы одна секция, ее порождающая, является композицией некоторых наследственных классов. Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между сложной регулярной композицией и некоторой определенным образом связанной с ней композицией с бо́льшим числом секций.

Теорема 8. *Пусть*

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{X}^{11} & \mathscr{X}^{12} & \dots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \mathscr{X}^{21} & \mathscr{X}^{22} & \dots & \mathscr{X}^{2k} & \mathscr{X}^{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \mathscr{X}^{k2} & \dots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \mathscr{X}^{k+1,2} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{X}^{k+1,k+1} \end{matrix} \right\| -$$

регулярная $(k+1)$-композиция наследственных классов q-графов, $(k+1)$-я секция которой сама является регулярной m-композицией наследственных классов:

$$\mathscr{X}^{k+1,k+1} = C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)}) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{Y}^{11} & \mathscr{Y}^{12} & \dots & \mathscr{Y}^{1m} \\ \mathscr{Y}^{21} & \mathscr{Y}^{22} & \dots & \mathscr{Y}^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{Y}^{m1} & \mathscr{Y}^{m2} & \dots & \mathscr{Y}^{mm} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда класс q-графов

$$C\left((\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}\backslash\{\mathscr{X}^{k+1,k+1}\})\cup\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)}\right)=$$

$$=\left\|\begin{matrix}\mathscr{X}^{11} & \mathscr{X}^{12} & \dots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} & \mathscr{X}^{1,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{1,k+1}\\ \mathscr{X}^{21} & \mathscr{X}^{22} & \dots & \mathscr{X}^{2k} & \mathscr{X}^{2,k+1} & \mathscr{X}^{2,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{2,k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathscr{X}^{k1} & \mathscr{X}^{k2} & \dots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} & \mathscr{X}^{k,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{k,k+1}\\ \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \mathscr{X}^{k+1,2} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{Y}^{11} & \mathscr{Y}^{12} & \dots & \mathscr{Y}^{1m}\\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \mathscr{X}^{k+1,2} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{Y}^{21} & \mathscr{Y}^{22} & \dots & \mathscr{Y}^{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \mathscr{X}^{k+1,2} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{Y}^{m1} & \mathscr{Y}^{m2} & \dots & \mathscr{Y}^{mm}\end{matrix}\right\|$$

является регулярной $(k+m)$-композицией, энтропия которой равна энтропии композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$.

Доказательство. Пусть $H_{(k)}\equiv H$ и $H_{(m)}\equiv\widetilde{H}$ — матрицы энтропий k-композиций $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ и $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(k)})$ соответственно (композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ порождается удалением $(k+1)$-й секции из $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$), $\mathbf{h}_{(k)}\equiv\mathbf{h}$ — вектор-столбец, j-я координата которого равна $h^{j,k+1}=h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{j,k+1})$, $j=1,\dots,k$, $h=h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right)>0$, $\mathbf{1}_{(k)}=\mathbf{1}$, $\mathbf{1}_{(m)}=\tilde{\mathbf{1}}$, $\mathbf{1}_{(k+m)}=\overline{\mathbf{1}}$, $\mathbf{0}_{(k)}=\mathbf{0}$, $\mathbf{0}_{(m)}=\tilde{\mathbf{0}}$, $\mathbf{0}_{(k+m)}=\overline{\mathbf{0}}$, $\mathbf{e}^1_{(k)}=\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^1_{(m)}=\widetilde{\mathbf{e}}^1$.

Представим матрицу энтропий $H_{(k+m)}\equiv\overline{H}$ композиции

$$C\left((\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}\backslash\{\mathscr{X}^{k+1,k+1}\})\cup\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)}\right)$$

в блочном виде:

$$\overline{H}=\left\|\begin{matrix}H & \mathbf{h}\tilde{\mathbf{1}}^\top\\ \tilde{\mathbf{1}}\mathbf{h}^\top & \widetilde{H}\end{matrix}\right\|.$$

Докажем, что матрица $\overline{H}$ удовлетворяет условиям максимальности и внутренней допустимости.

Пусть $Q_{s\times(s-1)}$ — матрица размера $s\times(s-1)$, столбцами которой являются векторы произвольного базиса линейного пространства, задаваемого уравнением $\mathbf{1}^\top_{(s)}\mathbf{x}_{(s)}=0$. Положим $Q=Q_{k\times(k-1)}$, $\widetilde{Q}=Q_{m\times(m-1)}$. Возьмем матрицу $Q_{(k+m)\times(k+m-1)}$ в форме

$$\overline{Q}=\left\|\begin{matrix}Q & O & \mathbf{e}^1\\ O & \widetilde{Q} & -\widetilde{\mathbf{e}}^1\end{matrix}\right\|.$$

Тогда $\overline{Q}^\top\overline{HQ}=$

$$=\left\|\begin{matrix}Q^\top HQ & O & Q^\top(H\mathbf{e}^1-\mathbf{h})\\ O & \widetilde{Q}^\top\widetilde{H}\widetilde{Q} & \widetilde{Q}^\top((\mathbf{h}^\top\mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}}-\widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1)\\ (H\mathbf{e}^1-\mathbf{h})^\top Q & ((\mathbf{h}^\top\mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}}-\widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top\widetilde{Q} & (\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1-2\mathbf{h}^\top\mathbf{e}^1+(\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top\widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1\end{matrix}\right\|.$$

Легко видеть, что подматрица

$$\left\| \begin{matrix} Q^\top HQ & O \\ O & \widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q} \end{matrix} \right\|$$

этой матрицы является отрицательно определенной. Следовательно, для того чтобы доказать отрицательную определенность матрицы $\overline{Q}^\top \overline{HQ}$, достаточно убедиться, что $\operatorname{sign}\det(\overline{Q}^\top \overline{HQ}) = (-1)^{k+m-1}$.

Вычислим $\det(\overline{Q}^\top \overline{HQ})$ как определитель блочной матрицы:

$$\begin{aligned} &\det(\overline{Q}^\top \overline{HQ}) = \det(Q^\top HQ)\det(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q}) \\ &\times \Big[((\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1 - 2\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1 + (\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1) - (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top Q(Q^\top HQ)^{-1}Q^\top (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h}) \\ &\qquad - ((\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}} - \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top \widetilde{Q}(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})^{-1}\widetilde{Q}^\top ((\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}} - \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1)\Big]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Применяя соотношение (2.7) из [3] при $\mathbf{c} = \dfrac{H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1}$ и $\mathbf{c} = \widetilde{\mathbf{e}}^1$ и учитывая, что $\widetilde{Q}^\top \tilde{\mathbf{1}} = \tilde{\mathbf{0}}$, получим

$$\begin{aligned} &(H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h})^\top Q(Q^\top HQ)^{-1}Q^\top (H\mathbf{e}^1 - \mathbf{h}) \\ &\quad + ((\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}} - \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top \widetilde{Q}(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})^{-1}\widetilde{Q}^\top ((\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1)\tilde{\mathbf{1}} - \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1) \\ &\quad = \big\{(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 2\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1 + (\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1) \\ &\quad - (H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1)^\top [H - HQ(Q^\top HQ)^{-1}Q^\top H](H^{-1}\mathbf{h} - \mathbf{e}^1)\big\} \\ &\quad + \Big\{(\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1 - (\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top [\widetilde{H} - \widetilde{H}\widetilde{Q}(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})^{-1}\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}](\widetilde{\mathbf{e}}^1)\Big\} \\ &\quad = ((\mathbf{e}^1)^\top H\mathbf{e}^1 - 2\mathbf{h}^\top \mathbf{e}^1 + (\widetilde{\mathbf{e}}^1)^\top \widetilde{H}\widetilde{\mathbf{e}}^1) \\ &\quad - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} + \Big(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - \frac{1}{\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}}\Big). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})$ — регулярная композиция, то по теореме 2

$$h\left(C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})\right) = h = \frac{1}{\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}}.$$

Учитывая это и подставляя (4.2) в (4.1), получим

$$\begin{aligned} &\det(\overline{Q}^\top \overline{HQ}) \\ &\quad = \det(Q^\top HQ)\det(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})\left[\frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}} - (\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)\right] \\ &= -\det(Q^\top HQ)\det(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})\frac{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}{\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1}}\left[\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}\right]. \end{aligned}$$

Так как $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ — регулярная композиция, то по формулам (3.3) и (3.7) из [3]

$$\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h > 0, \quad \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h} = \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right)} > 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}\det(\overline{Q}^\top \overline{HQ}) = -\operatorname{sign}\det(Q^\top HQ)\,\operatorname{sign}\det(\widetilde{Q}^\top \widetilde{H}\widetilde{Q})\\ = -(-1)^{k-1}(-1)^{m-1} = (-1)^{k+m-1},\end{aligned}$$

т. е. матрица $\overline{H}$ удовлетворяет требованию максимальности. Покажем, что для нее выполняется также и условие внутренней допустимости. Для этого рассмотрим блочное представление матрицы $\overline{H}^{-1}$. Можно проверить, что

$$\overline{H}^{-1} = $$
$$= \left\| \begin{matrix} H^{-1} - \dfrac{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})H^{-1}\mathbf{h}\mathbf{h}^\top H^{-1}}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1} & \dfrac{H^{-1}\mathbf{h}\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h})1} \\ \dfrac{\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}\mathbf{h}^\top H^{-1}}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1} & \widetilde{H}^{-1} - \dfrac{(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h})\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1} \end{matrix} \right\|, \tag{4.3}$$

причем по формуле (3.3) из [3]

$$(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1 = \frac{1}{h}(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h) > 0.$$

Представление (4.3) является обобщением соотношения (3.4) из [3]. Домножая (4.3) справа на столбец $\overline{\mathbf{1}}$, получим

$$\begin{aligned}\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \frac{1}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1}\\ \times \left\| \frac{\left[(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1\right] H^{-1}\mathbf{1} - (\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}}{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}} \right\|.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Поскольку $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})$ и $C(\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})$ — регулярные композиции, то, используя формулы (3.1) и учитывая связь $h = 1/(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})$, получаем, что

$$\begin{aligned}\left[(\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}) - 1\right] H^{-1}\mathbf{1} - (\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}\\ = (\tilde{\mathbf{1}}^\top \widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})\left[(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}\right] > \mathbf{0},\end{aligned}$$

$$(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}} > \tilde{\mathbf{0}}.$$

Тогда из (4.4) следует, что $\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} > \overline{\mathbf{0}}$, т. е. матрица $\overline{H}$ удовлетворяет условию внутренней допустимости.

Значит, $C((\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}\backslash\{\mathscr{X}^{k+1,k+1}\})\cup\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})$ является регулярной композицией.

Осталось показать, что

$$h\left(C((\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}\backslash\{\mathscr{X}^{k+1,k+1}\})\cup\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})\right) = h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right).$$

Действительно, домножая (4.4) слева на строку $\overline{\mathbf{1}}^\top$ и применяя соотношение (3.8) из [3], получим

$$\begin{aligned}
&1\Big/h\left(C((\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}\backslash\{\mathscr{X}^{k+1,k+1}\})\cup\widetilde{\mathscr{Y}}^{(m)})\right)\\
&\quad= \overline{\mathbf{1}}^\top\overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \tilde{\mathbf{1}}^\top\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}}\frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)^2}{(\tilde{\mathbf{1}}^\top\widetilde{H}^{-1}\tilde{\mathbf{1}})(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h})-1}\\
&\qquad= \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h}-1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h}-h} = 1\Big/h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)})\right).
\end{aligned}$$

Теорема 8 доказана.

§ 5. Минимальные верхние границы и точки сгущения энтропии наследственных классов цветных графов

Пусть $\left\{\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)},\dots,\mathscr{X}^{(k-1)},\mathscr{X}^{(k)},\mathscr{X}^{(k+1)},\dots\right\}$ — некоторое семейство бесконечных наследственных классов q-графов. Фрагментно замкнутый класс $\mathscr{X}^* = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathscr{X}^{(k)}$ назовем *минимальной верхней границей* последовательности $\mathscr{X}^{(1)},\mathscr{X}^{(2)},\dots,\mathscr{X}^{(k)},\dots$

Будем говорить, что последовательность $\left\{\mathscr{X}^{(k)}:k\in\mathbb{N}\right\}$ фрагментно замкнутых классов *монотонно возрастает*, если

$$\mathscr{X}^{(1)}\subset\mathscr{X}^{(2)}\subset\dots\subset\mathscr{X}^{(k-1)}\subset\mathscr{X}^{(k)}\subset\mathscr{X}^{(k+1)}\subset\dots$$

Монотонно возрастающую последовательность $\left\{\mathscr{X}^{(k)},k\in\mathbb{N}\right\}$ назовем *нетривиальной*, если

$$h(\mathscr{X}^{(1)}) < h(\mathscr{X}^{(2)}) < \dots < h(\mathscr{X}^{(k)}) < \dots < h(\mathscr{X}^*).$$

Минимальную верхнюю границу *нетривиальной монотонно возрастающей* последовательности наследственных классов q-графов также будем называть *нетривиальной*.

Поскольку последовательность значений энтропий классов нетривиальной монотонно возрастающей последовательности монотонно не убывает и ограничена сверху, она сходится. Значение $h^* = h(\mathscr{X}^*)$ энтропии нетривиальной минимальной верхней границы $\mathscr{X}^*$ назовем *точкой сгущения*, если оно совпадает с пределом последовательности $h(\mathscr{X}^{(k)})$ при $k \to \infty$: $h(\mathscr{X}^*) = \lim\limits_{k\to\infty} h(\mathscr{X}^{(k)})$.

Из данных определений, а также из основного результата работы [1] следует, что в области значений энтропии наследственных классов обыкновенных графов существует единственная точка сгущения $h^* = 1$, которой соответствует только одна нетривиальная минимальная верхняя граница — класс всех 2-графов $\mathscr{G}^{(2)}$. Действительно, рассматривая упомянутые во введении классы $\mathscr{E}_{i,j}$, обнаруживаем, что

$$\mathscr{E}_{0,1} \subset \mathscr{E}_{0,2} \subset \cdots \subset \mathscr{E}_{0,k} \subset \cdots \subset \mathscr{G}^{(2)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{0,k},$$

а

$$0 < \frac{1}{2} < \cdots < 1 - \frac{1}{k} < \cdots < 1 = \lim_{k\to\infty}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big).$$

Убедимся, что при $q > 2$ имеется заведомо большее количество как нетривиальных минимальных верхних границ, так и точек сгущения энтропии. Начнем с более простых примеров.

Для произвольного непустого множества $M \subseteq Q$, $|M| = m$ рассмотрим классы $\mathscr{O}(M)$ и $\mathscr{B}(M)$, определенные во введении. Вспомним, что $h(\mathscr{O}(M)) = \log_q m$, $h_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}(M)) = \log_q m$. Справедлива

Лемма 1. *При $2 \leqslant |M| = m \leqslant q$ каждый класс $\mathscr{O}(M)$ является нетривиальной минимальной верхней границей; соответственно каждое значение вида $\log_q m, m = 2, \ldots, q$ является точкой сгущения энтропии.*

Доказательство. Для каждого $k = 2, 3, \ldots$ рассмотрим k-композицию

$$C^{(k)}(\alpha, M) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{O}_\alpha & \mathscr{B}(M) & \ldots & \mathscr{B}(M) \\ \mathscr{B}(M) & \mathscr{O}_\alpha & \ldots & \mathscr{B}(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{B}(M) & \mathscr{B}(M) & \ldots & \mathscr{O}_\alpha \end{matrix} \right\|, \quad \text{где} \quad \alpha \in M.$$

Матрица энтропий этой композиции равна

$$H = \log_q m\left(\mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^\top - E_{(k)}\right).$$

Легко убедиться, что при $Q = Q_\circ$ матрица

$$Q_\circ^\top H Q_\circ = -\log_q m(\mathbf{1}_{(k-1)}\mathbf{1}_{(k-1)}^\top + E_{(k-1)})$$

является отрицательно определенной, а

$$H^{-1} = \frac{1}{\log_q m}\Big(\frac{\mathbf{1}_{(k)}\mathbf{1}_{(k)}^{\top}}{k-1} - E_{(k)}\Big), \quad H^{-1}\mathbf{1} = \frac{\log_q m}{k-1}\mathbf{1} > \mathbf{0},$$

т. е. каждая композиция $C^{(k)}(\alpha, M)$ является регулярной и ее энтропия равна

$$h\left(C^{(k)}(\alpha, M)\right) = \frac{1}{\mathbf{1}^{\top}H^{-1}\mathbf{1}} = \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\log_q m, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} C^{(k)}(\alpha, M) = \mathscr{O}(M),$$

а

$$h(\mathscr{O}(M)) = \lim_{k\to\infty} h\left(C^{(k)}(\alpha, M)\right) = \log_q m.$$

Лемма 1 доказана.

Отметим, что если $|M| = q$, то $\mathscr{O}(M)$ — это класс всех q-графов; ему соответствует точка сгущения энтропии $h^* = 1$.

Определим теперь количество точек сгущения в области значений энтропии наследственных классов q-графов. Ответ на поставленный вопрос дает

Теорема 9. *В области допустимых значений энтропии фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ существует бесконечное множество точек сгущения.*

Доказательство. При любом $k \geqslant 2$ рассмотрим *произвольную регулярную* $(k+1)$-композицию

$$C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{X}^{11} & \ldots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \ldots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} \\ & & & \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \ldots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{O}(M) \end{matrix} \right\|,$$

$(k+1)$-я секция которой есть класс $\mathscr{O}(M)$, причем $2 \leqslant |M| \leqslant q-1$ (т. е. $0 < h(\mathscr{O}(M)) < 1$), а k-композиция, порожденная удалением из нее класса $\mathscr{O}(M)$, регулярна (из доказательства теоремы 5 [3] следует, что такая композиция существует). Возьмем любое $\alpha \in M$ и рассмотрим монотонно возрастающую последовательность композиций $\{C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M) \mid$

$m \in \mathbb{N}\}$, в которой

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{X}^{11} & \dots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \dots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{k,k+1} \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{O}_\alpha & \dots & \mathscr{B}(M) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\mathscr{X}^{k+1,1} \quad \dots \quad \mathscr{X}^{k+1,k}}_{k} & & & \underbrace{\mathscr{B}(M) \quad \dots \quad \mathscr{O}_\alpha}_{m} & & \end{matrix} \right\|,$$

По построению имеем

$$C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M) = \bigcup_{m=1}^{\infty} C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M),$$

т. е. класс $C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)$ является минимальной верхней границей для последовательности $\{C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Каждому классу $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M)$ поставим в соответствие $(k+1)$-композицию

$$C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{X}^{11} & \mathscr{X}^{12} & \dots & \mathscr{X}^{1k} & \mathscr{X}^{1,k+1} \\ \mathscr{X}^{21} & \mathscr{X}^{22} & \dots & \mathscr{X}^{2k} & \mathscr{X}^{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \mathscr{X}^{k2} & \dots & \mathscr{X}^{kk} & \mathscr{X}^{k,k+1} \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \mathscr{X}^{k+1,2} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} & \mathscr{X}_m^{k+1,k+1} \end{matrix} \right\|,$$

$(k+1)$-я секция которой

$$\mathscr{X}_m^{k+1,k+1} = C(\{\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{B}(M)\}, m) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{O}_\alpha & \mathscr{B}(M) & \dots & \mathscr{B}(M) \\ \mathscr{B}(M) & \mathscr{O}_\alpha & \dots & \mathscr{B}(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{B}(M) & \mathscr{B}(M) & \dots & \mathscr{O}_\alpha \end{matrix} \right\|_{(m)}$$

является m-композицией. Покажем, что $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m)$ — регулярная композиция.

Пусть $H_{(k)} \equiv H$ — матрица энтропий композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)}) = \|\mathscr{X}^{ij}\|_{i,j=1}^{k}$, полученной удалением $(k+1)$-й секции из $C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)$, $\mathbf{h}_{(k)} \equiv \mathbf{h}$ — вектор-столбец, j-я координата которого равна $h^{j,k+1} = h_{\mathscr{B}}(\mathscr{X}^{j,k+1})$, $j = 1, \dots, k$, $h = h(\mathscr{O}(M)) = \log_q |M|$.

По лемме 1 $\mathscr{X}_m^{k+1,k+1}$ — регулярная композиция, причем $h(\mathscr{X}_m^{k+1,k+1}) = (1 - 1/m)h$. Следовательно, матрица энтропий $\overline{H}_{(k+1)} \equiv \overline{H}$ композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m)$ имеет вид

$$\overline{H} = \left\| \begin{matrix} H & \mathbf{h} \\ \mathbf{h}^\top & (1 - 1/m)h \end{matrix} \right\|.$$

Так как $C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)$ — регулярная композиция, то по формулам (3.1)

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, \quad \mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h > 0,$$
$$(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} > \mathbf{0}.$$

Легко видеть, что в силу регулярности композиции $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$ аналогичные соотношения выполняются и для класса $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m)$. Действительно,

$$\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1 > 0, \quad \mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - (1 - 1/m)h > 0,$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} &- (1 - 1/m)h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h} \\ &= \left[(\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h)H^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)H^{-1}\mathbf{h}\right] + \frac{h}{m}H^{-1}\mathbf{1} > \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме 5 $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m)$ — регулярная композиция. Так как класс $\mathscr{X}_m^{k+1,k+1} = C(\{\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{B}(M)\}, m)$, порождающий ее $(k+1)$-ю секцию, является регулярной m-композицией, то по теореме 8 $(k+m)$-композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M)$ также регулярна, причем

$$\begin{aligned}\frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M)\right)} &= \frac{1}{h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M, m)\right)} \\ &= \overline{\mathbf{1}}^\top \overline{H}^{-1}\overline{\mathbf{1}} = \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - (1 - 1/m)h}. \quad (5.1)\end{aligned}$$

Найденные значения $h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M)\right)$, очевидно, не совпадают между собой при различных значениях m. Следовательно, класс $C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)$ является *нетривиальной* минимальной верхней границей монотонно возрастающей последовательности $\{C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Применяя теорему 2 и соотношение (3.7) из [3], находим, что

$$\frac{1}{h\left(C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)\right)} = \mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{1} - \frac{(\mathbf{1}^\top H^{-1}\mathbf{h} - 1)^2}{\mathbf{h}^\top H^{-1}\mathbf{h} - h}. \quad (5.2)$$

Сравнивая (5.1) и (5.2), заключаем, что

$$h\left(C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)\right) = \lim_{m\to\infty} h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k,m)}, M)\right),$$

т. е. значение $h_{k+1}^* = h\left(C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+1)}, M)\right)$ является точкой сгущения энтропии.

Убедимся, что существует бесконечно много таких значений. Для этого рассмотрим *монотонно возрастающую последовательность регулярных композиций* $\{C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r)}, M) \mid r \in \mathbb{N}\}$, в которой

$$C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r)}, M) = \left\| \begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \mathscr{X}^{11} & \dots & \mathscr{X}^{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k1} & \dots & \mathscr{X}^{kk} \\ \mathscr{X}^{k+1,1} & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathscr{X}^{k+r,1} & \dots & \mathscr{X}^{k+r,k} \end{matrix}}_{k} & \underbrace{\begin{matrix} \mathscr{X}^{1,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{1,k+r} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathscr{X}^{k,k+1} & \dots & \mathscr{X}^{k,k+r} \\ \mathscr{O}(M) & \dots & \mathscr{X}^{k+1,k+r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{X}^{k+r,k+1} & \dots & \mathscr{O}(M) \end{matrix}}_{r} \end{matrix} \right\|,$$

причем $2 \leqslant |M| \leqslant q-1$, а композиция $C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k)})$, порожденная удалением из нее последних r секций, является регулярной (существование такой последовательности вытекает из доказательства теоремы 5 [3]). В силу регулярности по формуле (3.8) из [3] энтропии любых двух соседних членов этой последовательности не совпадают. С другой стороны, по доказанному каждый класс из данной последовательности является *нетривиальной минимальной верхней границей* некоторой монотонно возрастающей последовательности $\{C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r-1,m)}, M) \mid m \in \mathbb{N}\}$, причем

$$\lim_{m\to\infty} h\left(C(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r-1,m)}, M)\right) = h\left(C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r)}, M)\right).$$

Поэтому множество значений $\{h(C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r)}, M)) \mid r \in \mathbb{N}\}$ энтропий классов $C^*(\widetilde{\mathscr{X}}^{(k+r)}, M)$, $r \in \mathbb{N}$ образует бесконечное множество точек сгущения. Теорема 9 доказана.

Таким образом, в статье

- установлены нижняя и верхняя оценки значения энтропии произвольной регулярной композиции наследственных классов q-графов в зависимости от энтропий ее порождающих классов однодольных и двудольных q-графов;
- введено понятие правильной композиции наследственных классов и доказано, что каждая регулярная правильная композиция является минимальным по включению классом среди композиций с заданным значением энтропии;
- найден критерий регулярности $(k+1)$-композиций, содержащих заданную регулярную k-композицию, доказано существование и приведена характеризация минимальных по включению среди таких композиций;

- исследованы сложные композиции наследственных классов q-графов и доказано, что энтропия каждой регулярной сложной композиции совпадает с энтропией некоторой определенным образом связанной с ней регулярной композиции с бóльшим числом секций;
- введены понятия монотонно возрастающей последовательности наследственных классов q-графов, минимальной верхней границы и точки сгущения энтропии и установлено, что в области допустимых значений энтропии фрагментно замкнутых классов q-графов при $q > 2$ существует бесконечное множество точек сгущения; данный результат существенно отличается от ситуации при $q = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 148–157.
2. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Об энтропии наследственных классов цветных графов // Дискрет. математика. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 99–102.
3. **Сорочан С. В.** Об энтропии композиций наследственных классов цветных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 59–83.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
фак. вычисл. математики
и кибернетики,
пр. Гагарина, 23, корп. 2,
603600 Нижний Новгород,
Россия

Статья поступила
20 января 2003 г.