ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2003. Серия 1. Том 10, № 2, 17–55

УДК 519.865

КРАЙНИЕ ТОЧКИ МНОГОГРАННИКА ВЕБЕРА*)

В. А. Васильев

Дается описание крайних точек многогранника Вебера, представляющего собой совокупность d-распределений, связанных с монотонными операторами Харшаньи. Полученные результаты используются для вероятностного представления указанных операторов, а также для исследования некоторых свойств таких решений теории игр, как ядро, множество Вебера и взвешенные значения Шепли. В частности, устанавливается сильная монотонность d-распределений Вебера и предлагается более простое доказательство теоремы о строении ядер выпуклых кооперативных игр в терминах соответствующих дележей Харшаньи.

Введение

Одно из наиболее актуальных направлений современной теории игр — изучение различных механизмов формирования дележей в условиях кооперации. Важный класс таких механизмов строится с помощью так называемых d-распределений — распределений долей участия в дивидендах соответствующих кооперативных игр. К числу наиболее известных d-распределений относятся взвешенные распределения Шепли [20, 21] и стохастические распределения Вебера [25].

В [4–6] автором предложен и исследован более широкий класс d-распределений, называемых далее распределениями Харшаньи. Значительное число результатов из [4–6] было переоткрыто в [14] (подробности см. в [15] и [24]). В той же статье [14] дано описание взвешенных распределений Шепли в терминах d-распределений Харшаньи и поставлена аналогичная задача для стохастических распределений Вебера. В настоящей статье излагается решение этой задачи, основанное на характеризации строения многогранника Вебера, представляющего собой совокупность d-распределений, связанных с монотонными операторами

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (грант 02–02–00189а), программы Государственной поддержки ведущих научных школ (грант 80.2003.6) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (проект 274).

Харшаньи. Главный результат работы — описание крайних точек многогранника Вебера — используется также для вероятностного представления монотонных операторов Харшаньи и для исследования некоторых свойств таких решений теории игр, как ядро, множество Вебера и взвешенные дележи Шепли. В частности, устанавливается сильная монотонность d-распределений Вебера и предлагается более простое доказательство теоремы о строении ядер выпуклых кооперативных игр в терминах соответствующих дележей Харшаньи.

Многогранник Вебера был введен в работе [8] в связи с задачей характеризации ядер выпуклых игр в терминах d-распределений Харшаньи. Там же, по существу, содержится в неявном виде и чисто комбинаторная схема доказательства теоремы о крайних точках этого многогранника.

Приводимое в настоящей статье доказательство теоремы о крайних точках многогранника Вебера основано на другом подходе и формально является первым по времени получения. По техническим причинам совместная публикация автора с ван дер Лааном [24], содержащая несколько модифицированный вариант этого доказательства, вышла раньше. Но и предлагаемая ниже исходная версия имеет свои достоинства, состоящие в более детальном анализе строения многогранника Вебера.

Статья состоит из пяти параграфов. Основные понятия, включая описание d-распределений Харшаньи и определение многогранника Вебера, составляют содержание § 1. Здесь же устанавливаются теоремы представления для операторов Харшаньи и операторов Вебера. В § 2 приводится доказательство главного результата статьи — теоремы о характеризации крайних точек многогранника Вебера. Следствием этого результата является решение упоминавшейся задачи об описании операторов Вебера в терминах d-распределений Харшаньи. В § 3 обсуждаются два других прямых следствия главного результата — теорема о вероятностном представлении монотонных операторов Харшаньи и описание множества Вебера в терминах d-распределений Харшаньи, а также предлагается более простое доказательство теоремы из [8] о строении ядер выпуклых кооперативных игр, использующее указанное описание множества Вебера. В § 4 излагается новое доказательство известного результата о соотношении между множеством Шепли и множеством Вебера (см., например, [20]), не использующее громоздкой конструкции прямого вычисления распределений вероятностей, отвечающих взвешенным дележам Шепли общего вида. Наконец, в § 5 приводятся доказательства некоторых вспомогательных утверждений, использовавшихся при характеризации крайних точек многогранника Вебера.

В статье в основном используется стандартная терминология теории кооперативных игр (см., например, [1, 10–13]). К немногим исключениям относятся новые понятия, предлагаемые автором для исследования различных механизмов распределения дивидендов Харшаньи [18]. Соответствующие термины вводятся с учетом приоритета в разработке ключевых концепций, используемых в изучении как самого механизма Харшаньи, так и его конкретизаций, известных в литературе как стохастические распределения Вебера [25] и взвешенные значения Шепли [20]. В частности, всем новым объектам, определяемым для различных представлений так называемого множества Вебера, даны наименования (как-то: операторы Вебера, d-распределения Вебера и многогранник Вебера), указывающие на их тесную связь с этим множеством, предложенным в известной работе Р. Вебера [25].

§ 1. Основные понятия и обозначения

Кооперативной игрой n лиц с побочными платежами, или просто *кооперативной игрой*, как обычно [11], будем называть пару (N, v), где через N обозначается n-элементное множество, а через v — вещественнозначная функция множества $v : S \mapsto v(S)$, $S \subseteq N$. Элементы множества N называются *игроками*, а элементы S семейства 2^N всевозможных подмножеств множества N — *коалициями* этих игроков. Величины $v(S)$ интерпретируются как максимальные гарантированные выигрыши, достижимые усилиями коалиций $S \in 2^N$. Напомним [11, 12], что v называется *характеристической функцией* игры (N, v) и принимается обычное предположение о том, что $v(\varnothing) = 0$. Если не оговорено противное, будем считать, что множество N (называемое большой коалицией) фиксировано и имеет вид $N = \{1, \dots, n\}$. Поэтому в дальнейшем множество кооперативных игр n лиц отождествляется с векторным пространством $V = V(N)$ всех функций множества $v : 2^N \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих единственному требованию $v(\varnothing) = 0$ (операции сложения и умножения на скаляр определяются поточечно: $(\alpha u + \beta v)(S) = \alpha u(S) + \beta v(S)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$, $S \subseteq N$).

Одна из главных проблем теории кооперативных игр состоит в построении и анализе различных механизмов «разумного» распределения выигрыша большой коалиции между участниками игр. Постановки задач настоящего параграфа, как и большей части всей статьи, относятся к описанию некоторых механизмов такого рода и рассмотрению ряда возникающих здесь математических вопросов.

Обозначим через $\mathscr{C}$ совокупность всех непустых коалиций, т. е.

$$\mathscr{C} := \{S \subseteq N \mid S \neq \varnothing\},$$

а через $\mathscr{C}_i$ — совокупность коалиций, включающих игрока i:

$$\mathscr{C}_i := \{S \in \mathscr{C} \mid i \in S\}, \quad i \in N.$$

Простейшие примеры кооперативных игр n лиц с побочными платежами доставляют так называемые *игры единогласия* e^T, $T \in \mathscr{C}$, определяемые следующим способом:

$$e^T(S) = \begin{cases} 1 & \text{при } T \subseteq S, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1}$$

(в англоязычной литературе такие игры называются *unanimity games*).

Известно [12, 13], что функции e^T, $T \in \mathscr{C}$, образуют базис векторного пространства V. Напомним также [18, 24], что коэффициенты разложения $v = \sum\limits_{T \in \mathscr{C}} v_T e^T$ функции v по указанному базису (называемому обычно *стандартным базисом* пространства V) определяют так называемые *дивиденды Харшаньи* кооперативной игры v: коэффициент разложения v_T называется дивидендом Харшаньи коалиции T в игре v. Если из контекста ясно, что речь идет о стандартном базисе, то величины v_T называются *дивидендами* игры v. Нетрудно проверить, что дивиденды v_T игры v удовлетворяют соотношениям

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T, \quad S \subseteq N, \tag{2}$$

(здесь и всюду далее полагаем $v_\varnothing = 0$). Более того, как легко убедиться, система линейных уравнений $v(S) = \sum\limits_{T \subseteq S} x_T$, $S \subseteq N$, имеет единственное решение, и поэтому его компоненты x_T совпадают с дивидендами v_T игры v. Таким образом, величины v_T однозначно определяются соотношениями (2), показывающими, что максимальные гарантированные выигрыши коалиций $S \in 2^N$ складываются из дивидендов их подкоалиций. Отметим также, что для одноэлементных коалиций $T = \{i\}$ справедливы равенства $v_i = v(i)$, где, как и всюду далее, для одноэлементных множеств используются сокращения $i := \{i\}$ и соответственно $v(i) := v(\{i\})$, $v_i := v_{\{i\}}$.

Следуя [2, 3], введем в рассмотрение семейство V_+ *вполне положительных* кооперативных игр с побочными платежами

$$V_+ = \{v \in V \mid v_T \geqslant 0, \quad T \in \mathscr{C}\}.$$

Как и в [2], с помощью выпуклого замкнутого конуса V_+ определим отношение полуупорядоченности $\leqslant_o$ в пространстве V

$$u \leqslant_o v \Leftrightarrow v - u \in V_+,$$

порождающее в V структуру векторной решетки $(V, \leqslant_o)$. Основные свойства этой решетки как для конечных, так и для бесконечных игр см. в [2], а также в [9]. Как обычно [10], функции $v^+ = v \vee 0$, $v^- = (-v) \vee 0$, $|v| = (-v) \vee v$ будем называть *положительной*, *отрицательной* и *полной вариацией* игры v ($\vee$ — знак супремума в векторной решетке $(V, \leqslant_o)$). Отметим, что из определения конуса V_+ вытекают следующие формулы для дивидендов игр v^+, v^- и $|v|$ соответственно:

$$(v^+)_T := \max\{v_T, 0\}, \quad (v^-)_T = \max\{-v_T, 0\}, \quad (|v|)_T = \max\{v_T, -v_T\}, \\ T \in \mathscr{C}.$$

Ниже используются также сокращенные обозначения $v_T^+ := (v^+)_T$, $v_T^- := (v^-)_T$ и $|v|_T := (|v|)_T$.

Важную роль в дальнейших построениях играют положительные линейные операторы, действующие из V в n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Как и в [3], следуя терминологии теории векторных решеток, оператор $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ называем *положительным*, если выполняется условие

(A1) Для каждого $v \in V_+$ справедливо включение $\Phi(v) \in \mathbb{R}^N_+$.

Другими словами, оператор $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ положителен (относительно конусов V_+ и $\mathbb{R}^N_+$), если он переводит конус вполне положительных игр V_+ в стандартный положительный конус $\mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \geqslant 0, i \in N\}$ пространства $\mathbb{R}^N$: $\Phi(V_+) \subseteq \mathbb{R}^N_+$.

Как обычно, вектор $x \in \mathbb{R}^N$ называется *дележом* игры v, если $x(N) = v(N)$. Здесь и всюду далее конечномерный вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ отождествляется с аддитивной функцией множества (мерой) на алгебре 2^N, определяемой стандартным образом:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \quad S \subseteq N. \tag{3}$$

В случае, когда оператор $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию

(A2) Для каждой игры $v \in V$ справедливо равенство $\Phi(v)(N) = v(N)$

(т. е. когда для любой игры v вектор $\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v))$ является ее дележом), компоненты значений $\Phi(v)$ оператора $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ задают некоторый единообразный способ распределения выигрышей $v(N)$ большой коалиции N между ее участниками. Поскольку обычно предполагается, что при разделе выигрыша коалиции N возможны лишь потери некоторой части $v(N)$, приведенное выше условие (A2) отсутствия таких потерь называется условием *эффективности*.

Для формулировки последнего дополнительного условия, накладываемого на рассматриваемый класс положительных линейных операторов, напомним [12], что коалиция R называется *носителем* игры v, если $v(S \cap R) = v(S)$ для всех $S \subseteq N$. Обозначим через Supp v множество всех носителей игры v. Семейство Supp v всегда непусто и замкнуто относительно пересечений, что вытекает из включения $N \in \operatorname{Supp} v$ и соотношений $v(S \cap Q \cap R) = v(S \cap Q) = v(S)$, справедливых при любых $Q, R \in \operatorname{Supp} v$ и $S \subseteq N$. Ввиду замкнутости относительно пересечений семейство Supp v содержит наименьший по включению элемент R_v, называемый далее *наименьшим носителем* игры v. Описание наименьшего носителя игры в терминах ее дивидендов дает следующая

Лемма 1.1. *Для любой игры $v \in V$ справедливо равенство*

$$R_v = \bigcup_{T \in \mathscr{D}_v} T, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{D}_v = \{T \in \mathscr{C} \mid v_T \neq 0\}.$$

Доказательство. Сначала установим следующее полезное характеристическое свойство носителей игры v:

$$R \in \operatorname{Supp} v \;\Leftrightarrow \forall T \notin \mathscr{C}_{(R)}\; [v_T = 0], \tag{5}$$

где $\mathscr{C}_{(R)} = \{S \subseteq R \mid S \neq \varnothing\}$. С этой целью отметим, что справедливость включения $R \in \operatorname{Supp} v$ при равенстве нулю дивидендов всех коалиций игры v, содержащих хотя бы одного игрока из $N \setminus R$, вытекает непосредственно из соотношений (2). Поэтому достаточно убедиться в справедливости противоположной импликации: если R является носителем игры v, то дивиденды всех коалиций T, имеющих непустое пересечение с $N \setminus R$, равны нулю.

Итак, пусть $R \in \operatorname{Supp} v$. Индукцией по числу участников покажем, что $v_T = 0$ для любой коалиции $T \notin \mathscr{C}_{(R)}$. То, что $v_i = 0$ при любом $i \in N \setminus R$, является прямым следствием соотношений (2). Допустим, что $v_T = 0$ для каждой коалиции $T \notin \mathscr{C}_{(R)}$, состоящей не более чем из m игроков, $m < n$, и рассмотрим произвольную коалицию Q такую, что $|Q| = m + 1$ и $Q \cap (N \setminus R) \neq \varnothing$. В силу равенств $v(Q) = v_Q + \sum\limits_{S \subseteq Q \cap R} v_S$ и $v(Q) = v(Q \cap R) = \sum\limits_{S \subseteq Q \cap R} v_S$, выполняющихся на основании индукционного предположения и соотношений (2), получаем, что $v_Q = 0$.

Для завершения доказательства леммы 1.1 остается заметить, что справедливость импликации $[T \cap (N \setminus R_v) \neq \varnothing] \Rightarrow [v_T = 0]$ при $R_v = \bigcup\limits_{T \in \mathscr{D}_v} T$ вытекает непосредственно из построения коалиции R_v. Что

касается вложений $R_v \subseteq R$ при $R \in \mathrm{Supp}\ v$, то они следуют из характеристического свойства (5). Лемма 1.1 доказана.

Обозначим через V^1 совокупность всех аддитивных функций множества (мер), заданных на алгебре 2^N (по определению удовлетворяющих равенствам $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ при любых $S, T \subseteq N$ таких, что $S \cap T = \varnothing$). Нетрудно проверить (например, с помощью соотношений (2)), что $V^1 = \{v \in V \mid v_T = 0$ при любом T таком, что $|T| > 1\}$, где через $|A|$ обозначается число элементов конечного множества A. Таким образом, для аддитивных игр v, называемых *несущественными* [11], справедливо равенство $R_v = \{i \in N \mid v(i) \neq 0\}$, согласующееся с обычным определением наименьшего носителя меры v. Для игр $v \in V^1$ критерий (5) приобретает вид $R \in \mathrm{Supp}\ v \Leftrightarrow \forall i \in N \setminus R\ [v(i) = 0]$, что также соответствует традиционной трактовке понятия носителя в общей теории меры. Поскольку формула (3) осуществляет изоморфизм между $\mathbb{R}^N$ и V^1, с учетом сказанного будем использовать обозначения $\mathrm{Supp}\ x$ и R_x и для самих векторов $x \in \mathbb{R}^N$, полагая $\mathrm{Supp}\ x = \{R \subseteq N \mid x_i = 0$ при любом $i \in N \setminus R\}$ и $R_x = \{i \in N \mid x_i \neq 0\}$.

Последнее дополнительное требование, накладываемое на положительные линейные операторы Φ, состоит в сохранении наименьших носителей игр $v \in V$ в следующем смысле:

(A3) Для каждой игры $v \in V$ справедливо включение $R_v \in \mathrm{Supp}\ \Phi(v)$.

Напомним, что игрок $i \in N$ называется *несущественным* (null-player в англоязычной литературе), если $v(S \cup i) = v(S)$ для любой коалиции $S \subseteq N$. Используя соотношения (2), нетрудно убедиться, что i является несущественным тогда и только тогда, когда $v_T = 0$ для любой коалиции T, содержащей игрока i (или, что то же самое, когда $i \notin R_v$). Таким образом, условие (A3) состоит в том, что выигрыши несущественных игроков в дележе $\Phi(v)$ должны быть нулевыми.

Перейдем, наконец, к формулировке основных определений.

Определение 1.1. Линейный оператор $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ называется *оператором Харшаньи,* если он удовлетворяет условиям (A1)–(A3).

Совокупность всех операторов Харшаньи, действующих из V в $\mathbb{R}^N$, обозначим через $\mathscr{H} = \mathscr{H}_V$.

Замечание 1.1. В работах [3, 7] и [8] при описании положительных линейных операторов, называемых здесь операторами Харшаньи, вместо требований (A2) и (A3) использовалось условие

(H2) Для каждой игры $v \in V$ и для любого $R \in \mathrm{Supp}\ v$ выполняется равенство $\Phi(v)(R) = v(N)$.

Нетрудно видеть, что это условие выполняется тогда и только тогда, когда оператор Φ (не обязательно линейный или положительный)

удовлетворяет требованиям (A2) и (A3). Действительно, поскольку $N, R_v \in \operatorname{Supp} v$ для любой игры $v \in V$, из (H2) очевидным образом следуют (A2) и (A3), так как в силу (H2) из определения наименьшего носителя R_v вытекают равенства $\Phi(v)(R_v) = \Phi(v)(R_v \cup i) = \Phi(v)(N)$ при всех v и $i \in N \setminus R_v$. Так как $\Phi(v)(R_v \cup i) = \Phi(v)(R_v) + \Phi(v)(i)$ при $i \notin R_v$, то из этих равенств получаем $\Phi(v)(i) = 0$ при любом $i \in N \setminus R_v$. Отсюда на основании замечаний, предшествующих формулировке условия (A3), получаем $\Phi(N) = v(N)$ и $R_v \in \operatorname{Supp} \Phi(v)$ для любой игры $v \in V$. Справедливость обратной импликации вытекает из того, что равенства $\Phi(v)(N) = v(N)$ и $\Phi(v)(i) = 0$, $i \in N \setminus R_v$, обеспечивают справедливость соотношений $\Phi(v)(R) = \Phi(v)(R_v) = \Phi(v)(N) = v(N)$ при каждом $R \in \operatorname{Supp} v$.

Операторы Харшаньи допускают достаточно простое описание в терминах распределений дивидендов Харшаньи (см., например, [7] и [8]). Для краткости изложения ограничимся формулировкой и доказательством ослабленной версии соответствующего результата из [7]. С этой целью введем в рассмотрение множество

$$\mathscr{P}_H = \{[p^T]_{T \in \mathscr{C}} \mid p^T \in \mathbb{R}^N_+,\ p^T(N) = 1,\ p^T(N \setminus T) = 0 \text{ при каждом } T \in \mathscr{C}\}, \tag{6}$$

в дальнейшем называемое *многогранником Харшаньи*. Элементы множества $\mathscr{P}_H$ будем называть *d-распределениями Харшаньи* (поскольку компоненты векторов $p^T \in \mathbb{R}^N_+$ интерпретируются как доли соответствующих игроков в распределении дивидендов Харшаньи коалиций $T \in \mathscr{C}$ — см. ниже определение операторов Φ^p, $p \in \mathscr{P}_H$, и формулу (8)). Для краткости элементы $p \in \mathscr{P}_H$ также будут называться *d-распределениями*.

Фиксируя некоторый порядок на $\mathscr{C}$, d-распределения для удобства можно трактовать как прямоугольные матрицы — элементы линейного пространства $\mathscr{P} = \prod_{T \in \mathscr{C}} E_T$, где $E_T = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i = 0$ при любом $i \in N \setminus T\}$. Поскольку условия, выделяющие $\mathscr{P}_H$ в $\mathscr{P}$, представляют собой конечное число линейных уравнений и неравенств, а также ввиду очевидной ограниченности и выпуклости $\mathscr{P}_H$ в $\mathscr{P}$ используемое название множества $\mathscr{P}_H$ является корректным.

Каждому элементу $p = [p^T]_{T \in \mathscr{C}} \in \mathscr{P}$ поставим в соответствие оператор Φ^p, определяемый следующим образом:

$$\Phi^p(v) = \sum_{T \in \mathscr{C}} v_T p^T, \quad v \in V. \tag{7}$$

Согласно этой формуле выигрыши $\Phi^p_i(v)$ игроков $i \in N$ в дележе $\Phi^p(v) = (\Phi^p_1(v), \ldots, \Phi^p_n(v))$ игры v при $p \in \mathscr{P}_H$ являются итогом распределения

дивидендов всех коалиций между их участниками в соответствии с долями, задаваемыми вектором p:

$$\Phi_i^p(v) = \sum_{T \in \mathscr{C}_i} p_i^T v_T, \quad i \in N. \tag{8}$$

Оказывается, что приведенный механизм распределения выигрышей большой коалиции N исчерпывающим образом характеризует дележи, определяемые операторами Харшаньи. Именно, справедлива следующая теорема представления.

Теорема 1 [7]. *Оператор Φ принадлежит $\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда существует $p \in \mathscr{P}_H$ такой, что $\Phi = \Phi^p$.*

Доказательство. Напомним, что дивиденды v_T являются, по определению, коэффициентами разложения функций v по базису $\{e^T\}_{T \in \mathscr{C}}$ векторного пространства V. Поэтому справедливы равенства $(\alpha u + \beta v)_T = \alpha u_T + \beta v_T$ при всех $u, v \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Эти равенства и доказывают линейность операторов $\Phi^p : V \to \mathbb{R}^N$ при любых $p \in \mathscr{P}_H$. Положительность операторов Φ^p относительно конусов V_+ и $\mathbb{R}_+^N$ вытекает из неотрицательности дивидендов v_T функций $v \in V_+$ и неотрицательности векторов p^T, фигурирующих в определении операторов Φ^p, $p \in \mathscr{P}_H$. Наконец, выполнение условия (A3) о сохранении наименьших носителей R_v следует из равенств $\Phi^p(v) = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq R_v} v_T p^T$, вытекающих непосредственно из определения наименьшего носителя, и соотношений $p_i^T = 0$, справедливых при всех $T \in \mathscr{C}$ и $i \in N \setminus T$.

Пусть теперь Φ — произвольный оператор из $\mathscr{H}$. Для проверки того, что Φ совпадает с Φ^p для некоторого d-распределения p, положим $p^{\Phi,T} = \Phi(e^T)$, $T \in \mathscr{C}$. Поскольку $v = \sum_{T \in \mathscr{C}} v_T e^T$ для всех $v \in V$, в силу линейности Φ справедливо представление $\Phi(v) = \sum_{T \in \mathscr{C}} v_T p^{\Phi,T}$, $v \in V$. Для завершения доказательства теоремы 1 остается убедиться, что элемент $p^\Phi = [p^{\Phi,T}]_{T \in \mathscr{C}}$ принадлежит многограннику Харшаньи. Прежде всего заметим, что из положительности оператора Φ и очевидных включений $e^T \in V_+$, $T \in \mathscr{C}$, вытекает неотрицательность всех векторов $p^{\Phi,T}$. Далее, в силу леммы 1.1 наименьшие носители игр единогласия совпадают с определяющими их коалициями: $R_{e^T} = T$ при всех $T \in \mathscr{C}$. Поэтому согласно условию (A3) справедливы соотношения $p_i^{\Phi,T} = 0$ при всех $i \in N \setminus T$ и $T \in \mathscr{C}$. Наконец, учитывая равенства $e^T(N) = 1$, $T \in \mathscr{C}$, на основании (A2) получаем $p^{\Phi,T}(N) = 1$ для всех $T \in \mathscr{C}$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1.2. В [4] автором было введено *множество Харшаньи* игры v, обозначаемое через $H(v)$ и определяемое следующим образом:

$$H(v) := \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_H\}, \quad v \in V,$$

(независимо и с помощью другой конструкции это же множество под названием *селектопа* игры v было определено в [17]). Элементы множества $H(v)$, как и в [5], будем называть *H-дележами* (или *дележами Харшаньи* [24]) игры v. Ясно, что некоторым H-дележам $x \in H(v)$ может соответствовать бесконечная совокупность d-распределений p таких, что $x = \Phi^p(v)$ (тем самым различные механизмы распределения дивидендов могут порождать один и тот же H-дележ игры v). Тем не менее, как вытекает из теоремы 1, множество операторов Харшаньи исчерпывается линейными селекторами точечно-множественного отображения $v \mapsto H(v)$, $v \in V$. Именно, справедлива следующая характеризация множества $\mathscr{H}$:

$$[\Phi \in \mathscr{H}] \Leftrightarrow [\text{ Оператор } \Phi : V \to \mathbb{R}^N \text{ линеен} \\ \text{и } \Phi(v) \in H(v) \text{ для каждой игры } v \in V].$$

Напомним [1], что игра $v \in V$ называется *монотонной*, если $v(T) \leqslant v(S)$ для всех коалиций $S, T \in \mathscr{C}$, удовлетворяющих условию $T \subseteq S$. Совокупность всех монотонных игр из V обозначим через BV_+ (выбор обозначения связан с установившейся символикой из [1]). Поскольку в дальнейшем помимо V_+ используется лишь еще один конус, а именно введенный выше конус BV_+, операторы Φ, положительные относительно BV_+ и $\mathbb{R}^N_+$ (т. е. удовлетворяющие условию $\Phi(BV_+) \subseteq \mathbb{R}^N_+$), будем называть для краткости *монотонными операторами*. Отметим, что в силу легко проверяемого вложения

$$V_+ \subseteq BV_+ \tag{9}$$

всякий монотонный оператор является положительным относительно V_+ и $\mathbb{R}^N_+$. Учитывая, что монотонные операторы, удовлетворяющие условиям эффективности и сохранения наименьшего носителя, играют определяющую роль при описании важного класса d-распределений, именуемых в дальнейшем d-распределениями Вебера, введем надлежащие термины и обозначения.

Определение 1.2. Монотонный линейный оператор $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ называется *монотонным оператором Харшаньи*, если он удовлетворяет условиям (A2) и (A3).

Совокупность всех монотонных операторов Харшаньи, действующих из V в $\mathbb{R}^N$, обозначим через $\mathscr{W} = \mathscr{W}_V$. Элементы множества $\mathscr{W}$ будем для краткости называть также *операторами Вебера*.

Приведем некоторые примеры операторов Вебера. Обозначим через $\Pi = \Pi(N)$ совокупность всех перестановок множества N. Каждой перестановке $\pi : N \to N$ поставим в соответствие линейный порядок $<_\pi$, определяемый формулой $i <_\pi j \Leftrightarrow \pi(i) < \pi(j)$. Фиксируя π, будем

предполагать, что большая коалиция N формируется последовательным (в соответствии с порядком $<_\pi$) присоединением игроков к уже объединившимся участникам игры v; при этом каждый игрок $i \in N$ получает выигрыш
$$v_i^\pi = v(S_i^\pi \cup i) - v(S_i^\pi), \tag{10}$$
равный его «маргинальному» вкладу в выигрыш коалиции $S_i^\pi \cup i$, образовавшейся после присоединения i к коалиции его «предшественников» S_i^π, определяемой формулой
$$S_i^\pi = \{j \in N \mid j <_\pi i\}. \tag{11}$$

Простейшие примеры монотонных операторов Харшаньи дают *маргинальные операторы* Φ^π, $\pi \in \Pi$, ставящие в соответствие каждой игре $v \in V$ *маргинальный дележ* $v^\pi = (v_1^\pi, \dots, v_n^\pi)$, компоненты которого вычисляются по формуле (10). Действительно, учитывая соотношения $v(S_i^\pi \cup i) - v(S_i^\pi) = \sum\limits_{T \subseteq S_i^\pi} v_{T \cup i}$, $i \in N$, вытекающие из формулы (2), нетрудно проверить, что при любых $\pi \in \Pi$ и $v \in V$ справедливо равенство $\Phi^\pi(v) = \sum\limits_{T \in \mathscr{C}} v_T p^{\pi,T}$, где
$$p_i^{\pi,T} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ является } \pi\text{-последним элементом в } T, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{12}$$
(как обычно, элемент $i \in T$ называется π-последним (π-первым), если $j <_\pi i$ ($i <_\pi j$) при любом $j \in T \setminus i$). Справедливость соотношений $\Phi^\pi(BV_+) \subseteq \mathbb{R}_+^N$, доказывающих монотонность маргинальных операторов Φ^π, вытекает непосредственно из определения маргинальных дележей v^π.

Еще один простой, но важный пример дает *оператор Шепли* Φ^{Sh}, который каждой игре v ставит в соответствие ее *дележ Шепли* $\Phi^{Sh}(v)$, «предписывающий» равное распределение всех дивидендов между участниками соответствующих коалиций
$$\Phi^{Sh}(v) = \sum_{T \in \mathscr{C}} v_T p^{Sh,T}, \tag{13}$$
где
$$p_i^{Sh,T} = \begin{cases} 1/|T|, & \text{если } i \in T, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{14}$$
(другие эквивалентные определения дележа Шепли, называемого иногда вектором или значением Шепли, см., например, в [1, 12] или [13]). Как известно, справедлива формула
$$\Phi^{Sh}(v) = 1/n! \sum_{\pi \in \Pi} v^\pi \tag{15}$$

(ее вывод и вероятностную интерпретацию можно найти в [12]). Таким образом, справедливо равенство $\Phi^{Sh} = 1/n! \sum_{\pi \in \Pi} \Phi^{\pi}$, означающее, что оператор Шепли есть среднее арифметическое маргинальных операторов и тем самым Φ^{Sh} тоже является монотонным оператором Харшаньи.

Ясно, что и в общем случае, т. е. при произвольном выборе неотрицательных весов μ_π, $\pi \in \Pi$, удовлетворяющих условию $\sum_{\pi \in \Pi} \mu_\pi = 1$, справедливо включение $\Phi^{\mu} = \sum_{\pi \in \Pi} \mu_\pi \Phi^{\pi} \in \mathscr{W}$. Более того, в § 3 будет показано, что операторами вида Φ^{μ} исчерпывается все множество $\mathscr{W}$ (см. теорему 4). Здесь же мы ограничимся аналогом теоремы 1 — описанием операторов Вебера в терминах подходящих d-распределений.

Для формулировки соответствующего результата введем определение основного объекта, изучаемого в настоящей статье. С этой целью рассмотрим линейный оператор $K : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, который каждому $p \in \mathscr{P}$ ставит в соответствие элемент $K(p) = [K^T(p)]_{T \in \mathscr{C}}$ векторного пространства $\mathscr{P}$, определяемый так:

$$K_i^T(p) = \begin{cases} \sum\limits_{Q \subseteq N \setminus T} (-1)^{|Q|} p_i^{T \cup Q}, & \text{если } i \in T, \quad T \in \mathscr{C}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{16}$$

Определение 1.3. Множество $\mathscr{P}_W = \{p \in \mathscr{P}_H \mid K(p) \geqslant 0\}$ называется *многогранником Вебера.*

Элементы множества $\mathscr{P}_W$ будем называть *d-распределениями Вебера.*

Как видно из определения 1.3, совокупность d-распределений Вебера $\mathscr{P}_W$ представляет собой ту часть многогранника Харшаньи, элементы которой удовлетворяют дополнительной системе линейных неравенств

$$\sum_{Q \subseteq N \setminus T} (-1)^{|Q|} p_i^{T \cup Q} \geqslant 0, \quad T \in \mathscr{C}, \ i \in T. \tag{17}$$

Этим обосновывается формальная корректность предлагаемого названия для $\mathscr{P}_W$. Что касается содержательной мотивировки этого названия, то она опирается на тесную связь многогранника Вебера с известными в литературе по теории игр множествами Вебера (см. третий параграф настоящей статьи).

Справедлива следующая теорема представления.

Теорема 2 [8]. *Оператор Φ является оператором Вебера тогда и только тогда, когда существует d-распределение $p \in \mathscr{P}_W$ такое, что $\Phi = \Phi^p$.*

Доказательство. Для полноты изложения ниже приводится несколько модифицированный вариант доказательства из [8]. Сначала покажем, что при любых $v \in V$ и $p \in \mathscr{P}_H$ справедливы равенства

$$\Phi_i^p(v) = \sum_{S \in \mathscr{C}_i} K_i^S(p)[v(S) - v(S \setminus i)], \quad i \in N, \tag{18}$$

где $\mathscr{C}_i = \{S \in \mathscr{C} \mid i \in S\}$. Действительно, используя соотношения (2), при каждом $i \in N$ имеем $v(S) - v(S \setminus i) = \sum\limits_{T \in \mathscr{C}_i | T \subseteq S} v_T$. Поэтому

$$\sum_{S \in \mathscr{C}_i} K_i^S(p)[v(S) - v(S \setminus i)] = \sum_{S \in \mathscr{C}_i} \left[\sum_{T | S \subseteq T} K_i^T(p) \right] v_S.$$

Поскольку, как уже отмечалось, $\Phi^p(v)_i = \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_i} p_i^S v_S$ при любом $i \in N$, достаточно убедиться в справедливости соотношений

$$\sum_{T | S \subseteq T} K_i^T(p) = p_i^S, \quad S \in \mathscr{C}_i, \ i \in N. \tag{19}$$

Но

$$\sum_{T | S \subseteq T} K_i^T(p) = \sum_{T | S \subseteq T} \left[\sum_{Q \subseteq N \setminus T} (-1)^{|Q|} p_i^{T \cup Q} \right], \quad i \in N.$$

Собирая коэффициенты при $p^{S \cup R}$ для $R \subseteq N \setminus S$, получаем

$$\sum_{T | S \subseteq T} K_i^T(p) = \sum_{R \subseteq N \setminus S} \left[\sum_{Q \subseteq R} (-1)^{|Q|} \right] p_i^{S \cup R}, \quad i \in N.$$

Отсюда с учетом известных комбинаторных соотношений

$$\sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} = \begin{cases} 1, & \text{если } A = \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{20}$$

получаем требуемые равенства (19).

Допустим, что $p \in \mathscr{P}_W$. Тогда по определению многогранника Вебера справедливы неравенства $K_i^S(p) \geqslant 0$ при всех $S \in \mathscr{C}_i$ и $i \in N$. Значит, на основании формулы (18) для любой игры $v \in BV_+$ справедливо включение $\Phi^p(v) \in \mathbb{R}_+^N$. С другой стороны, если $\Phi \in \mathscr{W}$, то, как уже отмечалось, Φ является оператором Харшаньи. Отсюда в силу теоремы 1 вытекает существование $p \in \mathscr{P}_H$ такого, что $\Phi = \Phi^p$. Ввиду очевидных включений $\hat{e}^T \in BV_+$, $T \in \mathscr{C}$, где

$$\hat{e}^T(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \neq T \text{ и } T \subseteq S, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

векторы $\Phi(\hat{e}^T)$ неотрицательны при всех $T \in \mathscr{C}$. Кроме того, на основании (18) при любых $T \neq N$ и $i \in N \setminus T$ справедливы соотношения $\Phi(\hat{e}^T)_i = K_i^{T \cup i}(p)$. Поэтому $K_i^S(p) \geqslant 0$ для всех $S \in \mathscr{C}_i$, $i \in N$. Теорема 2 доказана.

Доказательство упоминавшейся выше более тонкой «вероятностной» теоремы представления для операторов Вебера (в терминах маргинальных операторов и вероятностных распределений на множестве Π) требует, по существу, анализа структуры самого многогранника Вебера (см., например, [8, 25]) и, в частности, детального описания его крайних точек. Этот вопрос, представляющий и самостоятельный интерес, рассматривается ниже.

§ 2. Характеризация крайних точек многогранника Вебера

В настоящем параграфе устанавливается главный результат, состоящий в описании крайних точек многогранника Вебера $\mathscr{P}_W$. Доказательство основано на вспомогательных леммах, характеризующих некоторые свойства $\mathscr{P}_W$ и тесно связанного с ним многогранника $\mathscr{Q}_W$, определяемого следующим образом:

$$\mathscr{Q}_W = \{q = [q^T]_{T \in \mathscr{C}} \in \mathscr{P}_+ \;\Big|\; \sum_{i \in T} \sum_{S \in \mathscr{C}_T} q_i^S = 1, \quad T \in \mathscr{C}\}. \tag{21}$$

Выше через $\mathscr{P}_+$ обозначается совокупность всех неотрицательных векторов пространства $\mathscr{P}$, а символ $\mathscr{C}_T$ используется для обозначения совокупности надмножеств множества T, т. е.

$$\mathscr{C}_T = \{S \in \mathscr{C} \mid T \subseteq S\}.$$

Введем еще одно часто используемое в этом параграфе обозначение: для любых $q \in \mathscr{P}$ и $T \in \mathscr{C}$ полагаем

$$q(T) = \sum_{i \in T} q_i^T.$$

В дальнейшем потребуются следующие свойства многогранника $\mathscr{Q}_W$ (справедливость приводимой ниже леммы 2.1 вытекает непосредственно из определения многогранника $\mathscr{Q}_W$, а доказательство леммы 2.2 носит чисто технический характер и вынесено в § 5).

Лемма 2.1. *Для каждого $q \in \mathscr{Q}_W$ справедливы неравенства*

$$0 \leqslant q(T) \leqslant 1, \quad T \in \mathscr{C}. \tag{22}$$

Лемма 2.2. *Вектор $q \in \mathscr{P}_+$ принадлежит многограннику $\mathscr{Q}_W$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$q(N) = 1, \; q(T) = \sum_{j \in N \setminus T} q_j^{T \cup j}, \quad T \in \mathscr{C} \setminus \{N\}. \tag{23}$$

Отметим, что ввиду неотрицательности элементов множества $\mathscr{Q}_W$ на основании леммы 2.1 для любого $q \in \mathscr{Q}_W$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant q_i^T \leqslant 1, \quad i \in N, \; T \in \mathscr{C}. \tag{24}$$

Полагая $R(q) := \{(i,T) \mid q_i^T$ — не целое число$\}$, отсюда получаем, что при любом $q \in \mathscr{Q}_W$

$$R(q) = \{(i,T) \in N \times \mathscr{C} \mid q_i^T \in (0,1)\}.$$

Соответственно для целочисленных компонент векторов из $\mathscr{Q}_W$ получаем

$$\forall q \in \mathscr{Q}_W \Big[(i,T) \notin R(q) \Rightarrow q_i^T \in \{0,1\}, \; i \in N, \; T \in \mathscr{C} \Big]. \tag{25}$$

Другими словами, все нецелочисленные компоненты векторов $q \in \mathscr{Q}_W$ принимают значения из открытого интервала $(0,1)$; целочисленные компоненты принимают значения 0 или 1.

Обозначим через $\operatorname{ex} \mathscr{Q}_W$ совокупность крайних точек многогранника $\mathscr{Q}_W$. Ниже (см. лемму 2.5) будет показано, что многогранники $\mathscr{Q}_W$ и $\mathscr{P}_W$ линейно изоморфны. Поэтому предлагаемое далее описание множества $\operatorname{ex} \mathscr{Q}_W$, представляющее и самостоятельный интерес, является ключевым для решения основной задачи настоящего параграфа — характеризации множества $\operatorname{ex} \mathscr{P}_W$ крайних точек многогранника Вебера.

Приведем необходимые обозначения. При любых $q \in \mathscr{Q}_W$ и $T \in \mathscr{C}$ положим $\mathscr{C}^q = \{T \in \mathscr{C} \mid \exists i \in T[q_i^T \in (0,1)]\} = \mathrm{Pr}_{\mathscr{C}} R(q)$, $T^q = \{i \in T \mid q_i^T \in (0,1)\}$. Кроме того, ниже используются следующие сокращения: $\mathscr{C}^m := \{T \in \mathscr{C} \mid |T| \geqslant m\}$, $\mathscr{C}^{(m)} := \{T \in \mathscr{C} \mid |T| = m\}$ и $\mathscr{C}_i^m := \mathscr{C}_i \cap \mathscr{C}^m$, $\mathscr{C}_i^{(m)} := \mathscr{C}_i \cap \mathscr{C}^{(m)}$, $i \in N$, $m = 1, \ldots, n$.

Начнем с доказательства леммы об одном простом, но полезном для дальнейшего свойстве крайних точек многогранника $\mathscr{Q}_W$.

Лемма 2.3. *Если q является крайней точкой многогранника $\mathscr{Q}_W$, то для любой коалиции $S \neq N$ из $\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}^q$ и любого $j \in N \setminus S$ выполняются соотношения $q_j^{S \cup j} \in \{0,1\}$.*

Доказательство. От противного. Допустим, что для некоторой крайней точки q многогранника $\mathscr{Q}_W$ найдется такая коалиция $S \neq N$, что $q_i^S \in \{0,1\}$ при всех $i \in S$ и $q_{j_1}^{S \cup j_1} \in (0,1)$ для какого-либо $j_1 \in N \setminus S$. Ввиду неравенств $q_i^T \geqslant 0$, $i \in N$, $T \in \mathscr{C}$, и соотношений $0 \leqslant q(T) \leqslant 1$, $q(T) = \sum_{j \in N \setminus T} q_j^{S \cup j}$, $T \in \mathscr{C}$, вытекающих из лемм 2.1 и 2.2, имеем $q(S) =$

$1 > q_{j_1}^{S\cup j_1}$. Следовательно, из неотрицательности величин q_i^T и равенств (23) вытекает существование $k_1 \in N \setminus S$ такого, что $j_1 \neq k_1$ и $q_{k_1}^{S\cup k_1} \in (0,1)$.

Используя наличие нецелочисленных компонент $q_{j_1}^{S\cup j_1}$ и $q_{k_1}^{S\cup k_1}$ в векторе q, найдем ненулевое решение $b \in \mathscr{P}$ линейной однородной системы

$$b(N) = 0,\ b(T) = \sum_{j\in N\setminus T} b_j^{T\cup j}, \quad T \in \mathscr{C} \setminus \{N\}, \tag{26}$$

позволяющее показать, что $q \notin \mathrm{ex}\, \mathscr{Q}_W$. С этой целью выберем в качестве первых элементов j_1 и k_1 соответственно и построим две перестановки $\pi_1 = (j_1, \ldots, j_l)$ и $\pi_2 = (k_1, \ldots, k_l)$ множества $N \setminus S$, удовлетворяющие условиям

$$q_{j_{r+1}}^{S_{r+1}} > 0,\ q_{k_{r+1}}^{T_{r+1}} > 0, \quad r = 0, \ldots, l-1, \tag{27}$$

где $j_r = \pi_1{}^{-1}(r)$, $k_r = \pi_2{}^{-1}(r)$, а $l = |N \setminus S|$, $S_0 = T_0 = S$ и $S_{r+1} = S_r \cup j_{r+1}$, $T_{r+1} = T_r \cup k_{r+1}$ при $r = 0, \ldots, l-1$. Для формирования перестановки π_1 (π_2 строится аналогично) укажем правило выбора элемента j_{m+1} после того, как первые m элементов $j_1, \ldots, j_m$, где $m < l$, удовлетворяющие условиям $q_{j_{r+1}}^{S_{r+1}} > 0$, $r = 0, \ldots, m-1$, уже определены. В качестве j_{m+1} выбирается (произвольный) элемент $i \in N \setminus S_m$ такой, что $q_j^{S_m\cup i} > 0$. Ясно, что в силу соотношений $q(S_m) \geqslant q_{j_m}^{S_m} > 0$ и $q(S_m) = \sum\limits_{j\in N\setminus S_m} q_j^{S_m\cup j}$ такой элемент существует и, следовательно, указанное правило приводит к построению требуемой перестановки π_1.

Непосредственно из определения множеств S_r и T_r вытекает, что обе последовательности $S_1, \ldots, S_l$ и $T_1, \ldots, T_l$ являются строго возрастающими. Следовательно, ввиду соотношений $S_1 \neq T_1$ и $S_l = T_l = N$ существует натуральное число $l^* \in (1, l]$ такое, что

$$S_r \neq T_r,\ r = 1, \ldots, l^*-1, \ \text{ и } \ S_{l^*} = T_{l^*}. \tag{28}$$

Зафиксируем такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon \leqslant \min\{q_{j_r}^{S_r}, q_{k_r}^{T_r}\}$, $r = 1, \ldots, l^*$, и определим $b \in \mathscr{P}$ следующим образом:

$$b_i^R = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } R = S_r,\ i = j_r,\ r = 1, \ldots, l^*, \\ -\varepsilon, & \text{если } R = T_r,\ i = k_r,\ r = 1, \ldots, l^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что построенный ненулевой вектор b является решением системы (26); при этом согласно выбору величины ε векторы $q + b$ и $q - b$ неотрицательны. Следовательно, на основании леммы 2.2 справедливы включения $q + b \in \mathscr{Q}_W$ и $q - b \in \mathscr{Q}_W$. Отсюда с учетом равенства $q = \frac{1}{2}\left[(q + b) + (q - b)\right]$ получаем требуемое противоречие $q \notin \mathrm{ex}\, \mathscr{Q}_W$. Лемма 2.3 доказана.

Для формулировки одного из основных результатов этого параграфа, дающего описание множества ex $\mathscr{Q}_W$ крайних точек многогранника $\mathscr{Q}_W$, введем в рассмотрение векторы $q^\pi \in \mathscr{Q}_W$, аналогичные введенным ранее d-распределениям p^π. Именно, для каждого $\pi \in \Pi$ обозначим через q^π вектор $[q^{\pi,T}]_{T\in\mathscr{C}}$ из $\mathscr{P}$, определяемый следующим образом:

$$q_i^{\pi,T} = \begin{cases} 1, & \text{если } T = S_i^\pi \cup i, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{30}$$

где $S_i^\pi = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ — множество предшественников игрока i относительно перестановки $\pi \in \Pi$.

Предложение 2.1. *Множество крайних точек многогранника $\mathscr{Q}_W$ состоит из векторов q^π, $\pi \in \Pi$, т. е. справедливо равенство*

$$\text{ex } \mathscr{Q}_W = \{q^\pi \mid \pi \in \Pi\}. \tag{31}$$

Доказательство. Всюду далее рассматривается только нетривиальный случай $|N| > 1$. Сначала покажем, что каждый вектор q^π является крайней точкой многогранника $\mathscr{Q}_W$. Ясно, что q^π принадлежит $\mathscr{Q}_W$ при любой перестановке $\pi \in \Pi$. Действительно, каждый такой вектор по построению содержится в $\mathscr{P}_+$. Кроме того, записывая перестановку π в форме $\pi = (i_1, \dots, i_n)$, где $i_k = \pi^{-1}(k)$, $k = 1, \dots, n$, из определения q^π получаем, что $q^\pi(T) = 1$ тогда и только тогда, когда $T = \{i_1, \dots, i_k\} = S_{i_k}^\pi \cup i_k$ для некоторого k, $k = 1, \dots, n$, и $q^\pi(T) = 0$ для остальных $T \in \mathscr{C}$. Поэтому нетрудно проверить справедливость равенств $q^\pi(N) = 1$ и $q^\pi(T) = \sum\limits_{j\in N\setminus T} q_j^{\pi, T\cup j}$ при всех $T \in \mathscr{C} \setminus \{N\}$ (например, $q^\pi(\{i_1, \dots, i_k\}) = q_{i_{k+1}}^{\pi,\{i_1,\dots,i_k,i_{k+1}\}} = 1$ при любом $k = 1, \dots, n-1$). В силу леммы 2.2 из указанных равенств (ввиду произвольности выбора π) следует, что $q^\pi \in \mathscr{Q}_W$ при любом $\pi \in \Pi$. Допуская, что $q^\pi = \frac{1}{2}(q' + q'')$ для некоторых $\pi \in \Pi$ и $q', q'' \in \mathscr{Q}_W$, в силу неравенств (24) и целочисленности вектора q^π имеем $q^\pi = q' = q''$. Вместе с установленными выше включениями $q^\pi \in \mathscr{Q}_W$, $\pi \in \Pi$, это означает, что векторы q^π являются крайними точками многогранника $\mathscr{Q}_W$.

Докажем теперь справедливость вложения ex $\mathscr{Q}_W \subseteq \{q^\pi \mid \pi \in \Pi\}$. Пусть q — произвольный элемент из ex $\mathscr{Q}_W$. Априори возможны два случая: (A) $R(q) = \varnothing$ и (B) $R(q) \neq \varnothing$. Покажем, что реализоваться может только первый из них, и построим соответствующую перестановку $\pi = \pi(q) \in \Pi$ такую, что $q = q^\pi$.

Случай (A). Искомую перестановку $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ строим рекуррентным способом. Элемент i_n выбираем таким, что $q_{i_n}^N = 1$ и $q_j^N = 0$ для всех $j \in N \setminus i_n$. Ясно, что ввиду равенства $q(N) = 1$ и соотношений (25) такой элемент i_n существует и определяется единственным

образом. Пусть для некоторого натурального $r \in [1, n-1]$ уже построены элементы $i_{r+1}, \dots, i_n$ и коалиции $S_n := N$ и $S_k := N \setminus \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$ $(r+1 \leqslant k \leqslant n-1)$, удовлетворяющие условиям $i_k \in S_k$ и

$$q_i^{S_k} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_k, \\ 0, & \text{если } i \in S_k \setminus i_k \end{cases} \tag{32}$$

для всех $k = r+1, \dots, n$. Положим $S_r := S_{r+1} \setminus i_{r+1}$ и выберем элемент $i_r \in S_r$, удовлетворяющий требованию $q_{i_r}^{S_r} = 1$. Такой элемент существует и определяется единственным образом на основании импликации (25) и вытекающего из (25) равенства $q(S_r) = 1$, соотношений (22) и неравенства $q(S_r) \geqslant q_{i_{r+1}}^{S_{r+1}}$, являющегося очевидным следствием равенств (23).

В силу (32) для завершения доказательства равенства $q = q^\pi$ остается показать, что $q_i^T = 0$ для всех пар (i, T), $T \in \mathscr{C}_i$, $i \in N$, за исключением тех, которые принадлежат множеству $K_\pi := \{(i_1, S_1), \dots, (i_n, S_n)\}$ и для которых (по построению π) имеют место равенства $q_{i_1}^{S_1} = \dots = q_{i_n}^{S_n} = 1$.

Воспользуемся индукцией по m и докажем, что $q_i^T = 0$ для всех пар $(i, T) \notin K_\pi$ при $T \in \mathscr{C}^{(n-m)}$, $m = 0, \dots, n-1$. Отметим, что согласно (32) доказываемое утверждение верно для пар вида (i, S_k), где $i \in S_k \setminus i_k$, $k = 2, \dots, n$, и, следовательно, верно при $m = 0$. Пусть $q_i^T = 0$ для всех $(i, T) \notin K_\pi$ таких, что $T \in \mathscr{C}^{(n-m)}$, $0 \leqslant m \leqslant r \leqslant n-2$. Рассмотрим такую произвольную пару (i, T), что $T \in \mathscr{C}^{(n-r-1)}$ и $(i, T) \notin K_\pi$. Если $T = S_{n-r-1}$, то требуемое равенство $q_i^T = 0$ вытекает из соотношений (32). Если же $T \neq S_{n-r-1}$, то в силу индукционного предположения и равенств (23) имеем $q(T) = \sum\limits_{j \in N \setminus T} q_j^{T \cup j} = 0$ (поскольку из равенств $j = i_{n-r}$ и $T \cup j = S_{n-r}$ следовало бы, что $T = S_{n-r-1}$). Отсюда и из включений $q_i^T \in \{0, 1\}$ $(i \in T)$ получаем искомые равенства $q_i^T = 0$ при всех $i \in T$.

Случай (B). Для каждого $T \in \mathscr{C}$ положим $m_T = |T|$, $m_T^q = |T^q|$, где $T^q = \{i \in T^q \mid q_i^T \in (0,1)\}$. Введем величины $q_0 := \min\{q_i^T \mid (i, T) \in R(q)\}$, $m := \max\{m_T \mid T \in \mathscr{C}^q\}$ и зафиксируем число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$(m-1) \prod_{t=1}^{m-1} (n-t)\, \varepsilon \leqslant q_0. \tag{33}$$

Отметим, что $m > 1$, поскольку в противном случае в силу равенств

$$q_i^{\{i\}} = \sum_{j \in N \setminus i} q_j^{\{i,j\}}, \quad i \in N,$$

вытекающих из леммы 2.2, получаем, что $q_i^{\{i\}} \in \{0,1\}$ для всех $i \in N$. Это противоречило бы допущению $m = 1$. Используя лемму 2.3, построим ненулевое решение d введенной в этой лемме линейной однородной системы (26), удовлетворяющее включениям $q \pm d \in \mathscr{Q}_W$, что в силу соотношений $q \neq q \pm d$ и $q = \frac{1}{2}[(q+d)+(q-d)]$ приведет к искомому противоречию с предположением $q \in \operatorname{ex} \mathscr{Q}_W$. Из дальнейшего будет видно, что предлагаемое построение (по необходимости) существенно отличается от использовавшегося в лемме 2.3.

Указанное решение d будем строить рекуррентным способом, начиная со значений d_i^T для коалиций $T \in \mathscr{C}^m$. Положим $\mathscr{C}^{q,(m)} := \mathscr{C}^q \cap \mathscr{C}^{(m)}$ и отметим, что как в случае $m = n$, так и в случае $m < n$ для любой коалиции T из $\mathscr{C}^{q,(m)}$ справедливо неравенство $m_T^q > 1$. Действительно, если $T = N$, то соотношение $m_N^q > 1$ очевидным образом вытекает из равенства $q(N) = 1$. Если же $m < n$ и, следовательно, $T \neq N$, требуемое неравенство $m_T^q > 1$ вытекает из целочисленности правой части равенства $q(T) = \sum\limits_{j \in N \setminus T} q_I^{T \cup j}$ (напомним, что по определению числа m для всех $T \in \mathscr{C}^{m+1}$ справедливы соотношения $q_i^T \in \{0,1\}$, $i \in T$). Установленное неравенство $m_T^q \geqslant 2$ обосновывает корректность следующего определения компонент d_i^T для $T \in \mathscr{C}^m$:

$$d_i^T := \begin{cases} -\varepsilon(m_T^q - 1), & \text{если } i = i_T, \\ \varepsilon, & \text{если } i \in T^q \setminus i_T, \\ 0, & \text{если } i \in T \setminus T^q, \end{cases} \tag{34}$$

где i_T — наибольший в смысле естественного порядка элемент множества T^q (т. е. $i_T \in T^q$ определяется условием $i_T \geqslant i$ для всех $i \in T^q$). Отметим, что из определения введенных величин d_i^T вытекают соотношения $|d_i^T| \leqslant (m-1)\varepsilon$ для всех $T \in \mathscr{C}_i^m$, $i \in N$, и $\operatorname{supp} d^T \subseteq T^q$ для всех $T \in \mathscr{C}^m$, где $d^T := (d_i^T)_{i \in N}$, а $\operatorname{supp} d^T := \{i \in T \mid d_i^T \neq 0\}$. В частности, из указанных вложений $\operatorname{supp} d^T \subseteq T^q$ следует, что $d_i^T = 0$ для всех $i \in T$ при $T \in \mathscr{C}^m \setminus \mathscr{C}^{q,(m)}$.

Пусть величины d_i^T (равные по определению нулю при всех (i,T) таких, что $i \notin T$), удовлетворяющие условиям

$$|d_i^T| \leqslant (m-1) \prod_{t=|T|}^{m-1} (n-t)\varepsilon, \tag{35}$$

$$\operatorname{supp} d^T \subseteq T^q, \tag{36}$$

уже заданы для всех $i \in T$ при $T \in \mathscr{C}^{r+1}$ (здесь $2 \leqslant r+1 \leqslant m$

и $\prod\limits_{t=m}^{m-1}(n-t):=1$). Определим d_i^T для $T\in\mathscr{C}^{(r)}$ следующим образом:

$$d_i^T := \begin{cases} \sum\limits_{j\in N\setminus T} d_j^{T\cup j}/|T^q|, & \text{если } i\in T^q, \\ 0, & \text{если } i\in T\setminus T^q. \end{cases} \tag{37}$$

По построению вектора d имеем $d(N)=0$ и (в случае $m<n$) $d(T)=\sum\limits_{j\in N\setminus T} d_j^{T\cup j}$ для всех $T\in\mathscr{C}^m$. Поэтому для проверки того, что определенный по формулам (34) и (37) вектор d является решением линейной однородной системы (26), достаточно убедиться в справедливости соответствующих равенств (23) для любой коалиции $T\in\mathscr{C}^{(r)}$ при $r\leqslant m-1$.

Сначала рассмотрим случай, когда коалиция указанного вида такова, что $T^q=\varnothing$. В этой ситуации верна импликация $T^q=\varnothing\Rightarrow\forall j\in N\setminus T[j\notin \operatorname{supp} d^{T\cup j}]$. Действительно, в случае $T^q=\varnothing$ на основании леммы 2.3 имеем $q_j^{T\cup j}\in\{0,1\}$ для всех $j\in N\setminus T$ и, следовательно, по построению вектора d для этих же индексов j выполняются равенства $d_j^{T\cup j}=0$. Итак, при $T^q=\varnothing$ на основании формулы (37) получаем $d_i^T=0$ и $d_j^{T\cup j}=0$ при всех $i\in T$ и $j\in N\setminus T$ соответственно. Отсюда вытекает требуемое равенство $d(T)=\sum\limits_{j\in N\setminus T} d_j^{T\cup j}$. Что касается случая $T^q\neq\varnothing$, то здесь, как нетрудно проверить, искомое равенство вытекает непосредственно из формулы (37).

В завершение доказательства индукцией по $l=m-r$ покажем, что для построенного вектора d при всех $T\in\mathscr{C}^{(r)}$, $r=1,\dots,m$, выполняются неравенства (35). Выше уже отмечалось, что при $l=0$ эти неравенства вытекают непосредственно из определения величин d_i^T, $T\in\mathscr{C}^{(m)}$. Пусть соотношения (35) справедливы при всех l и k таких, что $0\leqslant l\leqslant k<m-1$. Рассмотрим случай $l=k+1$ и выберем произвольную коалицию $T\in\mathscr{C}^{(r)}$ при $r=m-k-1$. По индукционному предположению согласно (37) при каждом $i\in T^q$ получаем

$$|d_i^T|\leqslant\sum_{j\in N\setminus T}|d_j^{T\cup j}|\leqslant(n-m+k+1)(m-1)\prod_{t=m-k}^{m-1}(n-t)\varepsilon=(m-1)\prod_{t=|T|}^{m-1}(n-t),$$

что и дает нужное неравенство.

Таким образом, в силу соотношений (33), (35) и (36) для построенного ненулевого решения d однородной системы (26) выполняются требуемые включения $q-d\in\mathscr{Q}_W$ и $q+d\in\mathscr{Q}_W$, что приводит к искомому противоречию с условием $q\in \operatorname{ex}\mathscr{Q}_W$. Предложение 2.1 доказано.

Перейдем, наконец, к установлению главного результата этого параграфа — характеризации множества $\operatorname{ex}\mathscr{P}_W$ крайних точек многогранника Вебера.

Теорема 3. *Множество крайних точек многогранника $\mathscr{P}_W$ состоит из векторов p^π, $\pi \in \Pi$, т. е. справедливо равенство*

$$\mathrm{ex}\, \mathscr{P}_W = \{p^\pi \mid \pi \in \Pi\}.$$

Напомним, что d-распределения p^π были введены в предыдущем параграфе при определении маргинальных операторов Φ^π и задаются следующим образом:

$$p_i^{\pi,T} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in T \text{ и } T \subseteq S_i^\pi \cup i, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(там же установлены и включения $p^\pi \in \mathscr{P}_W$, $\pi \in \Pi$). Доказательство теоремы 3, помимо предложения 2.1, использует несколько вспомогательных утверждений, формулируемых ниже в леммах 2.4 и 2.5 (их доказательства имеются в § 5). При этом наряду с оператором $K : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ вида

$$K_i^T(p) = \begin{cases} \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T} (-1)^{|S|-|T|} p_i^S, & \text{если } i \in T,\ T \in \mathscr{C}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

введенным в предыдущем параграфе при определении многогранника Вебера, в этих утверждениях фигурирует и тесно связанный с ним оператор $L : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$, который каждому $p \in \mathscr{P}$ ставит в соответствие элемент $L(p) = [L^T(p)]_{T \in \mathscr{C}}$ векторного пространства $\mathscr{P}$, определяемый следующим образом:

$$L_i^T(p) = \begin{cases} \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T} p_i^S, & \text{если } i \in T,\ T \in \mathscr{C}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Оказывается, что оператор L реализует упоминавшийся линейный изоморфизм многогранников $\mathscr{Q}_W$ и $\mathscr{P}_W$; более того, L является обратным к оператору K и, как следствие, K и L устанавливают взаимно однозначное соответствие между крайними точками этих многогранников.

Лемма 2.4. *При любом $\pi \in \Pi$ справедливы равенства*

$$(i)\ K(p^\pi) = q^\pi, \tag{38}$$

$$(ii) L(q^\pi) = p^\pi. \tag{39}$$

Лемма 2.5. *Операторы K и L линейны, невырожденны и удовлетворяют соотношениям*

$$(i) K = L^{-1}, \tag{40}$$

$$(ii) L(\mathscr{Q}_W) = \mathscr{P}_W. \tag{41}$$

Доказательство теоремы 3. Известно, что для любого невырожденного линейного оператора F, действующего в конечномерном векторном пространстве, образ $F(M)$ выпуклого многогранника M также является выпуклым многогранником; при этом множество крайних точек многогранника $F(M)$ совпадает с образом множества крайних точек многогранника M, т. е. $\mathrm{ex}\ F(M) = F(\mathrm{ex}\ M)$. Поэтому требуемое соотношение $\mathrm{ex}\ \mathscr{P}_W = \{p^\pi \mid \pi \in \Pi\}$ непосредственно следует из предложения 2.1 и лемм 2.4, 2.5. Теорема 3 доказана.

Замечание 2.1. Другие, более поздние по времени их получения доказательства теоремы 3 см. в [15, 24].

В заключение этого параграфа установим одно важное свойство многогранника Вебера, позволяющее упростить само описание множества $\mathscr{P}_W$. Для d-распределения $p \in \mathscr{P}_H$, игрока $i \in N$ и коалиций $T \in \mathscr{C}_i$, $R \subseteq N \setminus T$ обозначим через $K_i^{T,R}(p)$ составляющую величины $K_i^T(p)$, отвечающую коалиции $T \cup R$, т. е.

$$K_i^{T,R}(p) = \sum_{Q \subseteq R} (-1)^{|Q|} p_i^{T \cup Q}. \tag{42}$$

Определение 2.1. Будем говорить, что d-распределение $p \in \mathscr{P}_H$ является *сильно монотонным*, если $K_i^{T,R}(p) \geqslant 0$ при любых $i \in N$, $T \in \mathscr{C}_i$ и $R \subseteq N \setminus T$.

Предложение 2.2. *Распределение $p \in \mathscr{P}_H$ является сильно монотонным тогда и только тогда, когда оно является d-распределением Вебера.*

Доказательство. Ясно, что всякое сильно монотонное d-распределение является d-распределением Вебера. Справедливость обратного утверждения докажем индукцией по $m = n - t - r$, где $n = |N|$, $t = |T|$, $r = |R|$. При $m = 0$ доказываемое неравенство $K_i^{T,R}(p) \geqslant 0$ при произвольных $p \in \mathscr{P}_W$, $i \in N$, $T \in \mathscr{C}_i$ и $R \subseteq N \setminus T$ вытекает из определения многогранника $\mathscr{P}_W$. Пусть неравенства $K_i^{T,R}(p) \geqslant 0$ выполняются при любом целом $m \in [0, k]$. Рассмотрим произвольного игрока $i \in N$ и коалиции $T \in \mathscr{C}_i$ и $R \subseteq N \setminus T$ такие, что $|N \setminus (T \cup R)| = k + 1$. Ясно, что в силу определения величин $K_i^{T,R}(p)$ при любом $p \in \mathscr{P}_W$ справедливы рекуррентные соотношения

$$K_i^{T,R \cup j}(p) = K_i^{T,R}(p) - K_i^{T \cup j,R}(p), \tag{43}$$

где j — произвольный элемент из $N \setminus (T \cup R)$. Поскольку $|N \setminus (T \cup R \cup j)| = k$, в силу индукционного предположения имеем: $K_i^{T,R \cup j}(p) \geqslant 0$ и $K_i^{T \cup j,R}(p) \geqslant 0$. Следовательно, $K_i^{T,R}(p) = K_i^{T,R \cup j}(p) + K_i^{T \cup j,R}(p) \geqslant 0$. Предложение 2.2 доказано.

Замечание 2.2. Свойство сильной монотонности d-распределений формулируется в терминах линейных неравенств, и, следовательно, его проверка для элементов многогранника $\mathscr{P}_W$ сводится к простому вычислению соответствующих выражений для известных (в силу теоремы 3) крайних точек этого многогранника. Приведенное выше альтернативное доказательство опирается на рекуррентное соотношение (43), представляющее и самостоятельный интерес (см. приводимые ниже следствия 2.1–2.3).

На основании предложения 2.2 и рекуррентного соотношения (43) получаем

Следствие 2.1. *Пусть p — произвольное d-распределение из $\mathscr{P}_W$. Тогда при любых $i \in N, S,\ T \in \mathscr{C}_i$ и $Q, R \subseteq N \setminus T$ таких, что $S \subseteq T$ и $Q \subseteq R$, справедливы неравенства*

$$K_i^{S,Q}(p) \geqslant K_i^{T,Q}(p). \tag{44}$$

Для любого элемента $p = [p^T]_{T\in\mathscr{C}} \in \mathscr{P}$ и коалиции S через p_S будем обозначать проекцию вектора p на пространство $E^S := \prod\limits_{\varnothing\neq T\subseteq S} E_{T,S}$, где $E_{T,S} := \{x \in \mathbb{R}^S \mid x_j = 0\ (j \in S \setminus T)\}$; допуская некоторую вольность, элемент $p_S := [p^{T,S}]_{\varnothing\neq T\subseteq S}$, где $p^{S,T} = \mathrm{Pr}_S p^T$, будем называть сужением p на S. В приведенных обозначениях справедливо следующее утверждение о наследуемости свойств многогранника $\mathscr{P}_W$, вытекающее непосредственно из предложения 2.2 и теоремы 3.

Следствие 2.2. *Если $p \in \mathscr{P}_W$ и $S \subseteq N$, то сужение p на S принадлежит многограннику Вебера $\mathscr{P}_W^S$ пространства E^S. Более того, для каждого d-распределения из $\mathscr{P}_W^S$ существует его продолжение, принадлежащее $\mathscr{P}_W$, т. е. справедливо равенство*

$$\mathscr{P}_W^S = \{p_S \mid p \in \mathscr{P}_W\}. \tag{45}$$

Доказательство. В нем нуждается только последнее утверждение следствия 2.2, вытекающее из теоремы 3 и того очевидного факта, что для каждой перестановки множества S существует ее продолжение до перестановки множества N (как обычно, продолжением перестановки $\pi \in \Pi(S)$ на множество N называется перестановка $\bar{\pi} \in \Pi(N)$ такая, что $\bar{\pi}(i) = \pi(i)$ при любом $i \in S$). Действительно, пусть p — произвольное d-распределение из $\mathscr{P}_W^S$. В силу теоремы 3 справедливо представление $p = \sum\limits_{\pi\in\Pi(S)} \mu_\pi p^\pi$, где μ_π — некоторые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{\pi\in\Pi(S)} \mu_\pi = 1$, а векторы $p^\pi \in E^S$ определяются так же, как и в случае $S = N$. Фиксируя какие-либо продолжения $c(\pi)$ перестановок $\pi \in \Pi(S)$ на множество N и полагая $\bar{p} := \sum\limits_{\pi\in\Pi(S)} \mu_\pi p^{c(\pi)}$, нетрудно

убедиться, что $\bar{p}_S = p$, т. е. сужение $\bar{p}$ на S совпадает с p. Следствие 2.2 доказано.

Другое важное следствие предложения 2.2 — *монотонность* d-распределений, отвечающих дележам Вебера. Здесь, как и в [14], под монотонностью понимается выполнение импликации

$$S \subseteq T \Rightarrow \forall i \in S[p_i^S \geqslant p_i^T]. \tag{46}$$

Выбирая в качестве R одноэлементные коалиции $\{k\}$, получаем $p_i^T \geqslant p_i^{T \cup k}$. Повторяя эту операцию необходимое число раз, получаем

Следствие 2.3. *Все d-распределения Вебера монотонны.*

Как показывает контрпример, приведенный в [14], монотонность d-распределения p не гарантирует монотонности оператора Φ^p. Там же отмечается сложность нерешенной к тому времени задачи отыскания более тонкого свойства d-распределений, дающего исчерпывающую характеризацию монотонных операторов Харшаньи. Согласно предложению 2.2 и теореме 2 таковым является свойство сильной монотонности, а именно справедливо

Следствие 2.4. *Отображение $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ является монотонным оператором Харшаньи тогда и только тогда, когда $\Phi = \Phi^p$ для некоторого сильно монотонного d-распределения $p \in \mathscr{P}_H$.*

Монотонность d-распределений, отвечающих дележам Вебера, означает, в частности, что неотрицательность компонент p_i^T вектора $p \in \mathscr{P}_W$ для всех $T \in \mathscr{C}$ обеспечивается неотрицательностью его «старших» компонент p_i^N. Поскольку согласно доказательству предложения 2.2 наследуемость соответствующих неравенств устанавливается без использования условий неотрицательности $p \geqslant 0$, описание многогранника $\mathscr{P}_W$ допускает следующее уточнение.

Следствие 2.5. *Многогранник $\mathscr{P}_W$ определяется следующей системой линейных уравнений и неравенств:*

$$\sum_{i \in T} p_i^T = 1, \quad T \in \mathscr{C},$$

$$\sum_{S \in \mathscr{C}_T} (-1)^{|S|-|T|} p_i^S \geqslant 0, \quad T \in \mathscr{C}_i,\ i \in N.$$

§ 3. *H*-дележи и множество Вебера

В качестве приложения полученных в предыдущих параграфах результатов прежде всего приведем несколько прямых следствий теоремы

о крайних точках многогранника Вебера. Начнем с теоремы о вероятностном представлении монотонных операторов Харшаньи, представляющей собой аналог известной теоремы Вебера о монотонных решениях кооперативных игр (см., например, [25]). Принципиальное отличие предлагаемого ниже доказательства от известных в литературе по теории игр состоит в использовании информации о строении многогранника Вебера (теорема 3) и самих монотонных операторов Харшаньи (теорема 2).

Теорема 4 [25]. *Линейный оператор* $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ *является монотонным оператором Харшаньи тогда и только тогда, когда справедливо представление*

$$\Phi = \int\limits_{\Pi} \Phi^\pi \mu(d\pi) := \sum_{\pi \in \Pi} \mu_\pi \Phi^\pi, \tag{47}$$

где $\mu = (\mu_\pi)_\Pi$ *— некоторое распределение вероятностей на множестве* Π *всех перестановок большой коалиции* N.

Доказательство. В первом параграфе уже отмечалось, что все маргинальные операторы Φ^π, как и любые их выпуклые комбинации, являются монотонными операторами Харшаньи. Поэтому для доказательства теоремы 5 достаточно убедиться, что для любого оператора из $\mathscr{W}$ справедливо представление (47). Пусть $\Phi \in \mathscr{W}$. Согласно теореме 2 найдется распределение $p \in \mathscr{P}_W$ такое, что $\Phi = \Phi^p$. Далее, в силу теоремы 3 существуют такие неотрицательные числа μ_π, что $\sum\limits_{\pi \in \Pi} \mu_\pi = 1$ и $p = \sum\limits_{\pi \in \Pi} \mu_\pi p^\pi$. Поскольку для любых $p, q \in \mathscr{P}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо очевидное равенство $\Phi^{\alpha p + \beta q} = \alpha \Phi^p + \beta \Phi^q$, имеем $\Phi = \Phi^p = \sum\limits_{\pi \in \Pi} \mu_\pi \Phi^{p^\pi}$. Нетрудно проверить, что из определения маргинальных операторов Φ^π и d-распределений p^π вытекают равенства $\Phi^{p^\pi} = \Phi^\pi$ при всех $\pi \in \Pi$. Поэтому $\Phi = \sum\limits_{\pi \in \Pi} \mu_\pi \Phi^\pi$, что и требовалось установить, поскольку вектор $\mu = (\mu_\pi)_\Pi$ определяет искомое распределение вероятностей для оператора Φ, удовлетворяющее соотношению (47). Теорема 4 доказана.

Следующее приложение теоремы 2 о представлении монотонных операторов Харшаньи и теоремы 3 о крайних точках многогранника Вебера относится к так называемому *множеству Вебера* $W(v)$ кооперативной игры v, которое определяется следующим образом (см., например, [25]):

$$W(v) := \mathrm{co}\,\{v^\pi \mid \pi \in \Pi\}, \tag{48}$$

где $\mathrm{co}\,X$ — выпуклая оболочка множества X, а v^π, $\pi \in \Pi$, — маргинальные дележи игры v, введенные в первом параграфе. Именно, справедливо следующее представление множества $W(v)$ в терминах d-распределений Вебера.

Теорема 5. *Для каждой кооперативной игры $v \in V$ справедливо равенство*

$$W(v) = \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_W\}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное d-распределение $p \in \mathscr{P}_W$ и покажем, что дележ $\Phi^p(v)$ принадлежит множеству Вебера игры v. С этой целью заметим, что на основании теоремы 3 существуют такие числа $\mu_\pi \geqslant 0$, $\pi \in \Pi$, удовлетворяющие условию $\sum_{\pi\in\Pi} \mu_\pi = 1$, что $p = \sum_{\pi\in\Pi} \mu_\pi p^\pi$. Отсюда на основании отмечавшейся в доказательстве теоремы 4 линейности отображения $p \mapsto \Phi^p$, $p \in \mathscr{P}$, и очевидных равенств $\Phi^{p^\pi}(v) = v^\pi$, $\pi \in \Pi$, получаем требуемое включение $\Phi^p(v) = \sum_{\pi\in\Pi} \mu_\pi v^\pi \in W(v)$. Обратное вложение $W(v) \subseteq \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_W\}$ вытекает из легко проверяемых равенств $\sum_{\pi\in\Pi} \mu_\pi v^\pi = \sum_{\pi\in\Pi} \mu_\pi \Phi^\pi(v)$ и теорем 2, 4. Теорема 5 доказана.

Элементы множества $W(v)$ будем называть *дележами Вебера* игры v. Согласно теореме 5 каждый дележ Вебера игры v принадлежит упоминавшемуся уже в § 1 множеству Харшаньи $H(v) = \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_H\}$. В силу теорем 1, 2 и 5 справедливы равенства $H(v) = \{\Phi(v) \mid \Phi \in \mathscr{H}\}$ и $W(v) = \{\Phi(v) \mid \Phi \in \mathscr{W}\}$, дающие «бескоординатное» представление H-дележей и дележей Вебера, полезное для перенесения введенных понятий и полученных результатов на случай бесконечных игр (напомним, что, как и в [5], H-дележами игры v называются элементы множества $H(v)$). Отметим также, что согласно полученному автором в [5] критерию, H-дележ $x \in H(v)$ является крайней точкой множества Харшаньи $H(v)$ тогда и только тогда, когда существует перестановка $\pi \in \Pi$ такая, что $x = \Phi^{p^{(\pi,v)}}(v)$, где d-распределение $p^{(\pi,v)}$ определяется следующим образом:

$$p_i^{(\pi,v),T} := \begin{cases} 1, & \text{если } v_T \geqslant 0 \text{ и } i \text{ является } \pi\text{-последним элементом в } T, \\ 1, & \text{если } v_T < 0 \text{ и } i \text{ является } \pi\text{-первым элементом в } T, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{49}$$

Суммируя сказанное выше и сопоставляя формулы (12) и (49), дающие описание d-распределений, отвечающих крайним точкам многогранников $W(v)$ и $H(v)$ соответственно, на основании предложения 2 из [4] получаем следующие соотношения между множествами Вебера и множествами Харшаньи.

Предложение 3.1. *Для любой игры v справедливо вложение $W(v) \subseteq H(v)$. При этом равенство $W(v) = H(v)$ имеет место тогда и только тогда, когда $v_T \geqslant 0$ для любой коалиции T такой, что $|T| > 1$ (т. е. когда v есть* почти положительная *игра в терминологии* [14]).

Замечание 3.1. Относительно условия совпадения множеств $H(v)$ и $C(v)$, установленного в упомянутом выше предложении 2 из работы [4], см. также [6].

Замечание 3.2. В силу формулы (48) каждая крайняя точка многогранника $W(v)$ имеет вид $v^\pi = \Phi^\pi(v)$ при соответствующем выборе перестановки $\pi \in \Pi$. Однако далеко не для всякой игры $v \in V$ (за исключением почти положительных и некоторых других) каждый дележ вида v^π содержится во множестве $\mathrm{ex}\, W(v)$ крайних точек многогранника $W(v)$. Простой пример доставляет следующая игра четырех лиц: $N = \{1,2,3,4\}$; $v(N) = v(\{1,3,4\}) = 1$, $v(\{1,3\}) = 1/2$ и $v(S) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что в этом случае $v^\pi \notin \mathrm{ex}\, W(v)$ при $\pi := (1,3,4,2)$, поскольку $v^\pi = 1/2(v^{\pi_1} + v^{\pi_2})$, где $\pi_1 := (1,2,3,4)$, а $\pi_2 := (1,2,4,3)$.

Как уже отмечалось во введении, теорема о крайних точках многогранника Вебера позволяет получить более простое доказательство теоремы о строении ядер выпуклых кооперативных игр, установленной в [8] чисто комбинаторными методами. Здесь, как обычно [13], игру $v \in V$ мы называем *выпуклой*, если для любых коалиций $S, T \subseteq N$ выполняются неравенства

$$v(S) + V(T) \leqslant v(S \cap T) + v(S \cup T).$$

Напомним (см., например, [12]), что *ядром* игры $v \in V$ называется совокупность $C(\prec_v) := \{x \in I(v) \mid \nexists y \in I(v)[x \prec_v y]\}$ всех максимальных элементов множества

$$I(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N),\ x_i \geqslant v(i),\ i \in N\}$$

индивидуально-рациональных дележей этой игры относительно классического доминирования $\prec_v$, определяемого на $I(v)$ так:

$$x \prec_v y \Leftrightarrow \exists T \in \mathscr{C}\{[y(T) \leqslant v(T)]\&[x_i < y_i,\ i \in T]\}.$$

Отметим (см., например, [8]), что в случае выполнения неравенств

$$v(N) \geqslant v(T) + \sum_{N \setminus T} v(i), \quad T \subseteq N, \tag{50}$$

(и только в этом случае) справедливо равенство $C(\prec_v) = C(v)$, где

$$C(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N),\ x(T) \geqslant v(T), \quad T \subseteq N\}.$$

Ясно, что выпуклые игры удовлетворяют неравенствам (50). Поэтому ядро каждой выпуклой игры $v \in V$ совпадает с многогранником $C(v)$. Описание этого многогранника в терминах H-дележей дает теорема о строении ядер выпуклых игр [8], доказываемая здесь с помощью теорем 2, 3 в несколько более сильной формулировке.

Теорема 6. *Для каждой выпуклой игры $v \in V$ имеет место представление*
$$C(\prec_v) = \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_W\}. \qquad (51)$$
Справедливо и обратное утверждение: если для игры $v \in V$ выполняется равенство (51), *то v — выпуклая игра.*

Доказательство. Известно [19, 23], что игра $v \in V$ является выпуклой тогда и только тогда, когда выполняется равенство $C(v) = W(v)$. Но по теореме 5 для любой игры $v \in V$ выполняется соотношение $W(v) = \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_W\}$. Комбинируя это соотношение с упоминавшимся уже равенством $C(\prec_v) = C(v)$, справедливым для каждой выпуклой игры $v \in V$, получаем, что $C(\prec_v) = \{\Phi^p(v) \mid p \in \mathscr{P}_W\}$ для любой выпуклой игры $v \in V$.

Второе утверждение теоремы вытекает из теоремы 5, приведенного выше критерия выпуклости (v — выпуклая игра $\Leftrightarrow C(v) = W(v)$) и того факта, что равенство (51) влечет выполнение условия (50). Действительно, на основании равенства (51) и теоремы 3 имеем $v^\pi \in I(v)$ для всех $\pi \in \Pi$. Последние включения, как нетрудно проверить, обеспечивают выполнение неравенств (50), а тем самым и справедливость равенства $C(\prec_v) = C(v)$. Это равенство вместе с теоремой 5 и соотношением (51) и дает искомое соотношение $C(v) = W(v)$. Теорема 6 доказана.

Следуя [5, 6], для каждой игры $v \in V$ и коалиции $S \subseteq N$ через $v_2^-(S, N \setminus S)$ будем обозначать величину $v^-(N) - v^-(S) - v^-(N \setminus S)$, где v^- — отрицательная вариация игры v, определенная в первом параграфе.

Замечание 3.3. В работе [5] (см. также [6]) установлено, что для каждой игры $v \in V$ справедливо равенство
$$H(v) = C(v_H), \qquad (52)$$
где игра v_H определяется так:
$$v_H(S) := v(S) - v_2^-(S, N \setminus S,) \quad S \subseteq N.$$
Более того, в [5] доказано, что для любой характеристической функции $v \in V$ игра v_H является выпуклой. В то же время нетрудно построить примеры игр, чьи множества Вебера не могут быть представлены в виде ядра какой-либо (не обязательно выпуклой) кооперативной игры n лиц, что, по-видимому, говорит о более сложной структуре этих множеств по сравнению с множествами Харшаньи.

§ 4. Множество Вебера и взвешенные дележи Шепли

Приступая к установлению взаимоотношений между взвешенными дележами Шепли [20] и множеством Вебера, сначала введем необходимые

понятия и обозначения. Всюду ниже множество игроков $N = \{1, \ldots, n\}$ считается фиксированным, если не оговорено противное, и предполагается, что $n \geqslant 2$. Для произвольного натурального числа $m \leqslant n$ положим $I = I_m := \{1, \ldots, m\}$. Упорядоченное семейство $\xi = (N_1, \ldots, N_m)$ будем называть упорядоченным разбиением (или просто разбиением) множества N, если выполняются следующие условия: (i) $\bigcup\limits_{k \in I} N_k = N$; (ii) $N_j \cap N_k = \varnothing$ для всех $j \neq k$, $j, k \in I$; (iii) $N_k \neq \varnothing$ для всех $k \in I$.

Совокупность всех упорядоченных разбиений множества игроков N будем обозначать через $\Xi = \Xi(N)$. Напомним, что для любого непустого конечного множества A через $\Delta(A)$ ($\mathrm{ri}\ \Delta(A)$) обозначается единичный симплекс (относительная внутренность единичного симплекса) в $\mathbb{R}^A$: $\Delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^A_+ \mid x(A) = 1\}$, $\mathrm{ri}\ \Delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^A_{++} \mid x(A) = 1\}$, где $\mathbb{R}^A_+ = \{x \in \mathbb{R}^A \mid x_a \geqslant 0,\ a \in A\}$, $x(B) = \sum\limits_{a \in B} x_a$ для любых $x \in \mathbb{R}^A$ и $B \subseteq A$, а $\mathbb{R}^A_{++} := \{x \in \mathbb{R}^A \mid x_a > 0,\ a \in A\}$.

Пусть $\xi = (N_1, \ldots, N_m)$ — произвольное разбиение из $\Xi(N)$. Положим $N^k := \bigcup\limits_{j=1}^{k} N_j$, $k = 1, \ldots, m$, и для каждой коалиции $S \in \mathscr{C}$ введем обозначения: $S_k := S \cap N_k$, $S^k := S \cap N^k$ и $r_\xi(S) := \max\{k \mid S_k \neq \varnothing\}$. Далее обозначим через Ω^o_ξ совокупность всех векторов вида $\omega_\xi = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$, где $\omega^k \in \mathrm{ri}\ \Delta(N_k)$: $\Omega^o_\xi = \prod\limits_{k=1}^{m} \mathrm{ri}\ \Delta(N_k)$. Для каждого $\omega = \omega_\xi := (\omega^1, \ldots, \omega^m) \in \Omega^o_\xi$ через $p(\omega)$ обозначим d-распределение из $\mathscr{P}_H$, определяемое следующим способом:

$$p^S_i(\omega) = \begin{cases} \omega^r_i / \omega^r(S_r), & \text{если } i \in S_r, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{53}$$

где $r = r_\xi(S)$. Совокупность d-распределений, получаемых по формуле (53), будем обозначать через $\mathscr{P}^\xi_{Sh}$. Определяя указанным способом множества $\mathscr{P}^\xi_{Sh} = \{p(\omega) \mid \omega \in \Omega^o_\xi\}$ для каждого $\xi \in \Xi$, введем в рассмотрение их объединение

$$\mathscr{P}_{Sh} := \bigcup_{\xi \in \Xi} \mathscr{P}^\xi_{Sh}. \tag{54}$$

Распределения из $\mathscr{P}_{Sh}$ будем называть *взвешенными d-распределениями Шепли* (или *распределениями Шепли*).

Пусть v — произвольная игра из $V = V(N)$. Положим

$$\Omega^o := \bigcup_{\xi \in \Xi} \Omega^o_\xi$$

и для каждого $\omega \in \Omega^o$ через $\phi^v(\omega)$ обозначим H-дележ $\Phi^{p(\omega)}(v)$ игры v, где определение d-распределения $p(\omega)$ дано в (53).

Определение 4.1. Совокупность дележей $\{\phi^v(\omega) \mid \omega \in \Omega^o\}$ будем называть *множеством Шепли* игры v и обозначать через $Sh(v)$. Элементы введенного множества

$$Sh(v) := \{\Phi^{p(\omega)}(v) \mid \omega \in \Omega^o\}$$

будем называть взвешенными дележами Шепли игры v (см. [20, 21]).

Первый результат, касающийся соотношения между взвешенными дележами Шепли и множеством Вебера, был установлен в 70-х годах прошлого века [22]. Именно, с использованием полилинейного расширения Оуэна в [22] была доказана справедливость вложений $\{\phi^v(\omega) \mid \omega \in \mathscr{P}^\eta_{Sh}\} \subseteq W(v)$, $v \in V$, для одноэлементного разбиения $\eta = (N)$. Обобщение этого результата на случай произвольных разбиений $\xi \in \Xi$ было осуществлено в [20] (см. также [21]) на основе довольно громоздкой конструкции прямого вычисления распределений вероятностей, отвечающих взвешенным дележам Шепли общего вида. Ниже предлагается новое, более простое доказательство вложений $Sh(v) \subseteq W(v)$, $v \in V$, опирающееся на установленную в предыдущем параграфе теорему 5 о представлении множества $W(v)$.

Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения, полезные для анализа структуры множества $\mathscr{P}_{Sh}$. Для $I = \{1, \dots, m\}$ и неотрицательных чисел $t_1, \dots, t_m$ положим

$$\nu_m(t_1, \dots, t_m) := \sum_{T \subseteq I} (-1)^{|T|} \Big(1 + \sum_{i \in T} t_i\Big)^{-1} \tag{55}$$

(здесь принимается обычное соглашение $\sum\limits_{\varnothing} t_i := 0$).

Лемма 4.1. *При любом $m \geqslant 1$ функция ν_m является неотрицательной и строго возрастающей по каждой переменной на внутренности положительного ортанта $\mathbb{R}^m_+$. При этом равенство $\nu_m(t_1, \dots, t_m) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из компонент вектора $(t_1, \dots, t_m)$ обращается в нуль.*

Доказательство. [2] Индукцией по m. При $m = 1$ функция

$$\nu_1\ (t_1) = 1 - \frac{1}{1 + t_1}, \quad t_1 \in \mathbb{R}_+,$$

одной переменной t_1 очевидным образом удовлетворяет всем утверждениям леммы 4.1. Считая, что эта лемма верна для функции $\nu_{m-1}(t_1, \dots, t_{m-1})$ при некотором $m \geqslant 2$, убедимся в ее справедливости для функции

[2] Автор признателен проф. В. В. Иванову за излагаемый ниже вариант, позволивший существенно сократить и упростить первоначальное доказательство.

$\nu_m\,(t_1,\ldots,t_m)$. Покажем сначала, что $\varphi_m(t_1,\ldots,t_m)>0$ тогда и только тогда, когда $t_i>0$ для каждого $i=1,\ldots,m$, и $\varphi_m(t_1,\ldots,t_m)=0$ в остальных случаях. С этой целью разобьем слагаемые, стоящие в правой части формулы (55), определяющей функцию ν_m, на две группы: содержащие переменную t_m и все остальные. Учитывая, что для каждого подмножества $T\subseteq I$, включающего элемент m, справедливо равенство

$$\Bigl(1+\sum_{i\in T}t_i\Bigr)^{-1}=\frac{1}{1+t_m}\Bigl(1+\sum_{i\in T\setminus m}\tau_i\Bigr)^{-1},$$

где $\tau_i:=\frac{t_i}{1+t_m}$, $i\in T\setminus m$, получаем рекуррентное соотношение

$$\nu_m\,(t_1,\ldots,t_m)=\nu_{m-1}\,(t_1,\ldots,t_{m-1})-\frac{1}{1+t_m}\,\nu_{m-1}\Bigl(\frac{t_1}{1+t_m},\ldots,\frac{t_{m-1}}{1+t_m}\Bigr). \tag{56}$$

Отсюда в силу индукционного предположения о строгом возрастании функции ν_{m-1} и условиях обращения ее в нуль имеем: функция ν_m является неотрицательной и $\nu_m(t_1,\ldots,t_m)=0$ тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из компонент вектора $(t_1,\ldots,t_m)$ обращается в нуль.

Что касается строгого возрастания ν_m по каждой из переменных, то ввиду симметричности ν_m относительно ее аргументов можно ограничиться рассмотрением, например, последнего из них. В этом случае нужное утверждение вытекает из рекуррентного соотношения (56) и того факта, что на основании индукционного предположения функция одного переменного $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, определяемая формулой

$$\varphi(t):=\frac{1}{1+t}\nu_{m-1}\Bigl(\frac{t_1}{1+t},\ldots,\frac{t_{m-1}}{1+t}\Bigr),$$

является строго убывающей при любых значениях $t_1,\ldots,t_{m-1}\in\mathbb{R}_{++}$. Лемма 4.1 доказана.

Следствие 4.1. *При любом $m\geqslant 1$ и $(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m_+$ справедливо неравенство*

$$\sum_{T\subseteq I}(-1)^{|T|}\Bigl(1+\sum_{i\in T}t_i\Bigr)^{-1}\geqslant 0, \tag{57}$$

где $I=\{1,\ldots,m\}$. При этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из компонент вектора $(t_1,\ldots,t_m)$ обращается в нуль.

Далее используются обозначения, аналогичные тем, что вводились ранее: для множества I, вектора $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)\in\mathbb{R}^I$ и подмножества $S\subseteq I$ через $\omega(S)$ обозначается соответствующая сумма компонент вектора ω, т. е. $\omega(S):=\sum\limits_{i\in S}\omega_i$.

Следствие 4.2. *Для любого вектора $\omega \in \mathbb{R}^I_{++}$ и непустого подмножества $S \subseteq I$ справедливы неравенства*

$$\sum_{T\subseteq I\setminus S}(-1)^{|T|}\frac{\omega_i}{\omega(S\cup T)} > 0, \quad i \in S. \tag{58}$$

Доказательство. При $S=I$ неравенство очевидно. Если же $S\neq I$, требуемое соотношение устанавливается применением следствия 4.1 к числам $t_k = \omega_k/\omega(S)$, $k \in I\setminus S$, и последующим умножением получающегося неравенства на величину $\omega_i/\omega(S)$. Следствие 4.2 доказано.

Вычислим значения оператора K, определенного в первом параграфе, на d-распределениях вида $p(\omega)$.

Предложение 4.1. *Пусть $\xi = (N_1,\dots,N_m)$ — некоторое разбиение из $\Xi(N)$, S — произвольная коалиция из $\mathscr{C}$ и $\omega = (\omega^1,\dots,\omega^m)$ — вектор весов из Ω^0_ξ. Пусть $S_k = S\cap N_k$, $S^k = S\cap N^k$ и $r = r_\xi(S) = \max\{k \mid S_k \neq \varnothing\}$. Тогда если $S^{r-1}\neq N^{r-1}$, то $K^S_i(p(\omega)) = 0$ при любом $i\in S$. Если же $S^{r-1} = N^{r-1}$, то величины $K^S_i(p(\omega))$ вычисляются следующим образом:*

$$K^S_i(p(\omega)) = \begin{cases} \sum\limits_{T\subseteq N_r\setminus S_r}(-1)^{|T|}\omega^r_i/\omega^r(S_r\cup T), & \text{\textit{если} } i\in S_r,\\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}}\end{cases} \tag{59}$$

Доказательство. Зафиксируем разбиение $\xi = (N_1,\dots,N_m)$ из $\Xi(N)$, вектор весов $\omega = (\omega^1,\dots,\omega^m)$ из Ω^0_ξ и рассмотрим произвольную коалицию $S\in\mathscr{C}$. Сначала укажем способ вычисления величин $p^{S\cup T}_i(\omega)$ при $T\subseteq N\setminus S$. Непосредственно из определения числа $r = r(S)$ вытекают равенства $p^{S\cup T}_i(\omega) = 0$ при всех $i\in S$ и $T\subseteq N\setminus S$, удовлетворяющих условию $T\cap(N\setminus N^r)\neq\varnothing$. Далее, полагая $T_r = T\cap N_r$ и $T^r = T\cap N^r$, из определения величин $p^{S\cup T}_i(\omega)$ получаем $p^{S\cup T}_i(\omega) = p^{S_r\cup T_r}_i(\omega)$ при всех $i\in S_r$ и $T\subseteq N^r\setminus S$. Принимая во внимание эти соотношения, имеем

$$K^S_i(p(\omega)) = \sum_{T\subseteq N_r\setminus S_r}\Bigg[\sum_{Q\subseteq N^r\setminus S:\ Q_r=T}(-1)^{|Q|}\Bigg]p^{S_r\cup T}_i(\omega), \quad i\in S_r,$$

где $Q_r = Q\cap N_r$. Отсюда, полагая $0^0 = 1$ и учитывая равенства

$$\sum_{Q\subseteq N^r\setminus S:\ Q_r=T}(-1)^{|Q|} = (-1)^{|T|}\sum_{R\subseteq N^{r-1}\setminus S^{r-1}}(-1)^{|R|} = (-1)^{|T|}(1-1)^{|N^{r-1}\setminus S^{r-1}|},$$

а также очевидные формулы

$$p^{S\cup T}_i(\omega) = \begin{cases}\omega^r_i/\omega(S_r\cup T_r), & \text{если } i\in S_r,\ T\subseteq N^r,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

справедливые для каждого $i\in S$ и $T\subseteq N\setminus S$, получаем требуемые соотношения (59). Предложение 4.1 доказано.

Используя предложение 4.1 и следствие 4.2, на основании теоремы 5 о представлении множества Вебера получаем, что каждый взвешенный дележ Шепли $\phi^v(\omega) = \Phi^{p(\omega)}(v)$ принадлежит множеству Вебера кооперативной игры v. Таким образом, применение указанных результатов дает новое доказательство следующей известной теоремы, установленной ранее с помощью прямого построения соответствующих распределений вероятности на множестве Π.

Теорема 7 [20]. *Для любой игры $v \in V$ имеет место вложение*

$$Sh(v) \subseteq W(v).$$

§ 5. Доказательство вспомогательных результатов

Обратимся к доказательству лемм 2.2, 2.4. и 2.5 — вспомогательных результатов, использовавшихся при характеризации крайних точек многогранника Вебера.

Напомним некоторые сокращения, применявшиеся в предыдущих параграфах, и введем необходимые дополнительные обозначения. Как и ранее, для $q \in \mathscr{P}$ и $T \in \mathscr{C}$ полагаем $q(T) = \sum\limits_{i \in T} q_i^T$. Напомним также, что для каждого $k = 1, \ldots, n$ семейство $\mathscr{C}^{(k)}$ задается в виде $\mathscr{C}^{(k)} := \{T \in \mathscr{C} \mid |T| = k\}$. Далее, если $T \in \mathscr{C}$, $|T| \leqslant k \leqslant n$, то семейство всех подмножеств большой коалиции N, содержащих коалицию T и имеющих мощность k, обозначим через $\mathscr{C}_T^{(k)}$, где

$$\mathscr{C}_T^{(k)} = \mathscr{C}_T \cap \mathscr{C}^{(k)} = \{S \in \mathscr{C}_T \mid |S| = k\}.$$

Положим $\mathscr{C}_T^k := \bigcup\limits_{r=k}^{n} \mathscr{C}_T^{(r)}$, $k = 1, \ldots, n$. Наконец, семейство всех подмножеств коалиции $N \setminus T$, имеющих мощность k, будем обозначать через $\mathscr{C}_{(k)}^T$, где

$$\mathscr{C}_{(k)}^T = \{S \subseteq N \setminus T \mid |S| = k\}, \quad k = 1, \ldots, |N \setminus T|.$$

Доказательство леммы 2.2. Пусть элемент $q \in \mathscr{P}_+$ удовлетворяет равенствам (23). Для проверки включения $q \in \mathscr{Q}_W$ зафиксируем произвольную коалицию $T \in \mathscr{C}$ и положим $m = |T|$. Далее введем величины $A_k^T := \sum\limits_{i \in T} \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T^k} q_i^S$ при $k = m+1, \ldots, n$ и $A_{n+1}^T := 0$. Положим $A^T = \sum\limits_{i \in T} \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T} q_i^S$ и сначала докажем индукцией по k справедливость соотношений

$$A^T = \sum_{S \in \mathscr{C}_T^{(k)}} q(S) + A_{k+1}^T, \quad k = m, \ldots, n. \tag{60}$$

Поскольку $\mathscr{C}_T^{(m)}$ содержит только коалицию T, имеем

$$A^T = \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T} q_i^S = q(T) + \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T^{m+1}} q_i^S = \sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(m)}} q(S) + A_{m+1}^T.$$

Теперь допустим, что равенство (60) справедливо при всех $k = m,\ldots, r-1 < n$, и докажем его для $k = r$. Поскольку $q(S) = \sum\limits_{i\in S} q_i^S = \sum\limits_{I\in N\setminus S} q_j^{S\cup j}$ для всех $S \in \mathscr{C} \setminus \{N\}$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A^T &= \sum_{R\in\mathscr{C}_T^{(r-1)}} q(R) + A_r^T = \sum_{R\in\mathscr{C}_T^{(r-1)}} q(R) + \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T^r} q_i^S \\ &= \sum_{R\in\mathscr{C}_T^{(r-1)}}\sum_{j\in N\setminus R} q_j^{R\cup j} + \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(r)}} q_i^S + A_{r+1}^T \\ &= \sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(r)}}\Big(\sum_{j\in S\setminus T} q_j^S + \sum_{i\in T} q_i^S\Big) + A_{r+1}^T \\ &= \sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(r)}}\sum_{i\in S} q_i^S + A_{r+1}^T = \sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(r)}} q(S) + A_{r+1}^T. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (60) справедливо при $k = r$, что и завершает доказательство его справедливости при всех $k = m,\ldots, n$.

Применяя это равенство при $k = n$, получаем

$$A^T = \sum_{S\in\mathscr{C}_T^{(n)}} q(S) + A_{n+1}^T = \sum_{i\in N} q_i^N = 1.$$

Итак, $A^T = \sum\limits_{i\in T}\sum\limits_{S\in\mathscr{C}_T} q_i^S = 1$ для всех $T \in \mathscr{C}$. Следовательно, выполняется требуемое включение $q \in \mathscr{Q}_W$.

Докажем, что всякий элемент из $\mathscr{Q}_W$ удовлетворяет соотношениям (23). Рассмотрим произвольный элемент $q \in \mathscr{Q}_W$. Согласно определению многогранника $\mathscr{Q}_W$ выполняется равенство $\sum\limits_{i\in N} q_i^N = \sum\limits_{i\in N}\sum\limits_{T\in\mathscr{C}_N} q_i^T = 1$. Поэтому для проверки указанных соотношений остается убедиться, что для любого $T \in \mathscr{C}$ такого, что $1 \leqslant |T| \leqslant n-1$, справедливо равенство

$$q(T) = \sum_{j\in N\setminus T} q_j^{T\cup j}. \tag{61}$$

Коалиция $T \in \mathscr{C}$, состоящая из $n-1$ участника, представима в виде $T = N\setminus i$ при некотором $i \in N$. Поэтому для такой коалиции справедливо равенство

$$\sum_{j\in T}(q_j^T + q_j^N) = q(T) + \sum_{j\in T} q_j^N = 1.$$

Поскольку $\sum\limits_{j\in N} q_j^N = 1$ и $T = N \setminus i$, получаем

$$q(T) = 1 - \sum_{j\in N\setminus i} q_j^N = q_i^N = \sum_{j\in N\setminus T} q_j^N,$$

что и доказывает равенство (61) в случае $|T| = n-1$. Предположим, что это равенство выполняется для любой коалиции S такой, что $1 < n-(r-1) \leqslant |S| \leqslant n-1$, и рассмотрим произвольный элемент $T \in \mathscr{C}$ мощности $n-r$. В силу включения $q \in \mathscr{Q}_W$ имеем

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T} q_i^S &= q(T) + \sum_{i\in T}\sum_{S\in\mathscr{C}_T | S\neq T} q_i^S = q(T) + \sum_{i\in T}\sum_{\varnothing\neq S\subseteq N\setminus T} q_i^{T\cup S} \\
&= q(T) + \sum_{\varnothing\neq S\subseteq N\setminus T}\left[\sum_{i\in T\cup S} q_i^{T\cup S} - \sum_{i\in S} q_i^{T\cup S}\right] \\
&= q(T) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k)}} [q(T\cup S) - q(S, T\cup S)] \\
&= q(T) + q(N) + \sum_{k=1}^{r-1}\left[\sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k)}} q(T\cup S) - \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k+1)}} q(S, T\cup S)\right] \\
&- \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(1)}} q(S, T\cup S),
\end{aligned}$$

где $q(S, T\cup S) = \sum\limits_{i\in S} q_i^{T\cup S}$. Учитывая индукционное предположение, получаем, что при любом $k = 1, \ldots, r-1$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k)}} q(T\cup S) &= \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k)}}\sum_{j\in N\setminus(T\cup S)} q_j^{T\cup S\cup j} \\
&= \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k+1)}}\sum_{j\in S} q_j^{T\cup S} = \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(k+1)}} q(S, T\cup S).
\end{aligned}$$

Следовательно, в каждой из квадратных скобок предыдущего равенства уменьшаемое равняется вычитаемому. На основании сказанного имеем

$$1 = q(T) + q(N) - \sum_{S\in\mathscr{C}^T_{(1)}} q(S, T\cup S) = q(T) + 1 - \sum_{j\in N\setminus T} q_j^{T\cup j},$$

откуда следует справедливость равенства (61) при любом $T \in \mathscr{C} \setminus \{N\}$. Лемма 2.2 доказана.

Доказательство леммы 2.4. Выберем произвольные $\pi \in \Pi$, $i \in N$ и $T \in \mathscr{C}_i$. Рассмотрим случай $T = S_i^\pi \cup i$. По определению p^π имеем $p_i^{\pi,S} = 0$ для любой коалиции $S \in \mathscr{C}_i$, в которую входит хотя бы один игрок из $N \setminus (S_i^\pi \cup i)$. Следовательно,

$$K_i^T(p^\pi) = \sum_{Q \subseteq N \setminus T} (-1)^{|Q|} p_i^{\pi, T \cup Q} = 1 \geqslant 0.$$

По той же причине в ситуации, когда $T \setminus (S_i^\pi \cup i) \neq \varnothing$, получаем $p_i^{\pi, T\cup Q} = 0$ при любом $Q \subseteq N \setminus T$. Следовательно, $K_i^T(p^\pi) = 0$. Наконец, в случае $T \setminus i \subseteq S_i^\pi$ при $R := S_i^\pi \setminus T \neq \varnothing$ имеем

$$K_i^T(p^\pi) = \sum_{Q \subseteq R} (-1)^{|Q|} p_i^{\pi, T\cup Q} = \sum_{Q \subseteq R} (-1)^{|Q|} = (1-1)^{|R|} = 0.$$

Из сказанного вытекает, что при любых $i \in N$ и $T \in \mathscr{C}_i$ выполняются равенства $K_i^T(p^\pi) = 1$ при $T = S_i^\pi \cup i$ и $K_i^T(p^\pi) = 0$ в остальных случаях. Отсюда следует справедливость равенств (38). Равенства (39) непосредственно вытекают из определения векторов q^π и очевидных соотношений

$$L_i^T(q^\pi) = \sum_{Q \subseteq N \setminus T} q_i^{\pi, T \cup Q} = q_i^{\pi, S_i^\pi \cup i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in T \text{ и } T \subseteq S_i^\pi \cup i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

справедливых для любой перестановки $\pi \in \Pi$. Лемма 2.4 доказана.

Доказательство леммы 2.5. Для доказательства того, что L является невырожденным линейным оператором, ограничимся проверкой соотношения $L(q) = 0 \Rightarrow q = 0$ (линейность L непосредственно вытекает из определения). Итак, пусть $L(q) = 0$. Тогда $L_i^N(q) = q_i^N = 0$ при любом $i \in N$. Воспользуемся индукцией по $m = n - k$ и допустим, что равенство $L(q) = 0$ влечет справедливость соотношений $q_i^T = 0$ при любых $i \in N$, $T \in \mathscr{C}_i^{(k)} := \mathscr{C}_i \cap \mathscr{C}^{(k)}$ и $k \in [r+1, n]$. Рассмотрим произвольную коалицию $S \in \mathscr{C}_i^{(r)}$. Из равенства $L(q) = 0$ и определения оператора L следует, что

$$0 = L_i^S(q) = q_i^S + \sum_{T \in \mathscr{C}_S,\ T \neq S} q_i^T = q_i^S.$$

Значит, $q_i^S = 0$ при любом $i \in S$. Итак, $q_i^T = 0$ при любых $i \in N$ и $T \in \mathscr{C}_i$, что и доказывает невырожденность линейного оператора L.

Для доказательства соотношения $K = L^{-1}$ необходимо убедиться в том, что $q = K(p)$ является единственным решением (векторного) уравнения $L(q) = p$. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{S \in \mathscr{C}_T} q_i^S = p_i^T, \quad T \in \mathscr{C}_i, \quad i \in N.$$

Очевидно, что при $T = N$ справедливо равенство $q_i^N = p_i^N = K_i^N(p)$ при любом $i \in N$. Применяя индукцию по $m = n - k$ и предполагая, что при любых $k \in [r+1, n]$ выполняются соотношения $q_i^T = K_i^T(p)$ $(T \in \mathscr{C}_i^{(k)}$, $i \in N)$, рассмотрим произвольную коалицию $S \in \mathscr{C}_i^{(r)}$. Согласно определению оператора L из равенства $p_i^S = L_i^S(q)$ вытекает соотношение

$$q_i^S = p_i^S - \sum_{T \in \mathscr{C}_S,\ T \neq S} q_i^T.$$

Отсюда с использованием индукционного предположения получаем

$$q_i^S = p_i^S - \sum_{T \in \mathscr{C}_S,\ T \neq S} \sum_{Q \subseteq N \setminus T} (-1)^{|Q|} p_i^{T \cup Q}.$$

Учитывая, что $T \cup Q = S \cup [(T \setminus S) \cup Q]$ и полагая $R = (T \setminus S) \cup Q$, перепишем последнее равенство в следующей форме:

$$q_i^S = p_i^S - \sum_{R \subseteq N \setminus S,\ R \neq \varnothing} p_i^{S \cup R} \Bigl(\sum_{Q \subseteq R,\ Q \neq R} (-1)^{|Q|} \Bigr)$$
$$= p_i^S + \sum_{R \subseteq N \setminus S,\ R \neq \varnothing} (-1)^{|R|} p_i^{S \cup R} = K_i^S(p).$$

Следовательно, $q = K(p)$ является единственным решением рассматривавшейся системы линейных уравнений.

Чтобы доказать соотношение $L(\mathscr{Q}_W) = \mathscr{P}_W$, сначала покажем, что $L(q) \in \mathscr{P}_W$ при любом $q \in \mathscr{Q}_W$. Пусть q — произвольный элемент из $\mathscr{Q}_W$. Так как $q \geqslant 0$, то непосредственно из определения L следует, что $L(q) \geqslant 0$. Кроме того, в силу (i) при любых $i \in N$ и $T \in \mathscr{C}_i$ справедливы равенства

$$\sum_{S \in \mathscr{C}_T} (-1)^{|S|-|T|} L_i^S(q) = K_i^T(L(q)) = q_i^T.$$

Следовательно, $\sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T} (-1)^{|S|-|T|} L_i^S(q) \geqslant 0$. Наконец, согласно определению множества $\mathscr{Q}_W$ имеем $\sum\limits_{i \in T} L_i^T(q) = \sum\limits_{i \in T} \sum\limits_{S \in \mathscr{C}_T} q_i^S = 1$ при любом $T \in \mathscr{C}$. Из сказанного следует требуемое включение $L(q) \in \mathscr{P}_W$.

Для завершения доказательства равенства (41) зафиксируем произвольный элемент $p \in \mathscr{P}_W$ и покажем, что найдется вектор $q \in \mathscr{Q}_W$ такой, что $p = L(q)$. Действительно, в качестве q можно взять вектор $K(p)$, поскольку из (i) вытекают очевидные соотношения $L(q) = L(K(p)) = L(L^{-1})(p) = p$. Остается проверить справедливость включения $q = K(p) \in \mathscr{Q}_W$. Действительно, из включения $p \in \mathscr{P}_W$ и непосредственно из определения многогранника $\mathscr{P}_W$ вытекает неравенство

$q = K(p) \geqslant 0$. Далее в силу принадлежности $p \in \mathscr{P}_W$ для любой коалиции $T \in \mathscr{C}$ выполняются равенства

$$\sum_{i \in T} \sum_{S \in \mathscr{C}_T} q_i^S = \sum_{i \in T} L_i^T(K(p)) = \sum_{i \in T} p_i^T = 1,$$

что и завершает проверку включения $q = K(p) \in \mathscr{Q}_W$. Лемма 2.5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ауман Р., Шепли Л.** Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.
2. **Васильев В. А.** Об одном пространстве неаддитивных функций множеств // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 16(33). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1975. С. 99–120.
3. **Васильев В. А.** Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 17(34). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1975. С. 5–27.
4. **Васильев В. А.** Опорная функция ядра выпуклой кооперативной игры // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 21(38). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 30–35.
5. **Васильев В. А.** Об H-дележах кооперативных игр // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 24(41). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 18–32.
6. **Васильев В. А.** Об одном классе дележей в кооперативных играх // Докл. АН СССР, 1981. Т. 256, № 2. С. 265–268.
7. **Васильев В. А.** Об одном классе операторов в пространстве регулярных функций множества // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 28(45). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982. С. 102–111.
8. **Васильев В. А.** Характеризация ядер и обобщенных НМ-решений для некоторых классов кооперативных игр // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1988. С. 63–89. (Тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 10).
9. **Васильев В. А.** Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр // Математические труды. 1998. Т. 1, № 2. С. 24–67.
10. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
11. **Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
12. **Оуэн Г.** Теория игр. М.: Мир, 1971.
13. **Розенмюллер И.** Кооперативные игры и рынки. М.: Наука, 1974.

14. **Derks J., Haller H., Peters H.** The selectope for cooperative games // Intern. J. Game Theory. 2000. V. 29, N 1. P. 23–38.
15. **Derks J., Laan G. van der, Vasil'ev V. A.** On Harsanyi payoff vectors and the Weber set // Tinbergen Discussion Paper 02-105/1. 2002. Vrije Univ., Amsterdam.
16. **Dubey P., Neyman A., Weber R. J.** Value theory without efficiency // Math. Oper. Res. 1981. V. 6, N 1. P. 122–128.
17. **Hammer P. L., Peled U. N., Sorensen S.** Pseudo-Boolean functions and game theory. I. Core elements and Shapley value // Cahiers Centre Etudes Recherche Oper. 1977. V. 19, N 1-2. P. 159–176.
18. **Harsanyi J. A.** A simplified bargaining model for the n-person cooperative game // Intern. Econom. Rev. 1963. V. 4. P. 194–220.
19. **Ichiishi T.** Super-modularity: applications to convex games and to greedy algorithm for LP // J. Econom. Theory. 1981. V. 25, N 2. P. 283–286.
20. **Kalai E., Samet D.** On weighted Shapley values // Intern. J. Game Theory. 1987. V. 16. P. 205–222.
21. **Monderer D., Samet D., Shapley L. S.** Weighted values and the core // Intern. J. Game Theory. 1992. V. 21, N 1. P. 27–39.
22. **Owen G.** Multilinear extensions of games // J. Manag. Sci. 1972. V. 18/5. P. 64–79.
23. **Shapley L. S.** Cores of convex games // Intern. J. Game Theory. 1971. V. 1, N 1. P. 11–26.
24. **Vasil'ev V. A., Laan G. van der.** The Harsanyi set for cooperative TU-games // Siberian Adv. Math. 2002. V. 12, N 2. P. 97–125.
25. **Weber R. J.** Probabilistic values for games // The Shapley value. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. P. 101–119.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

Статья поступила
30 января 2003 г.