ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2003. Серия 1. Том 10, № 2, 66–78

УДК 519.172

НЕКОТОРЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНЦИДЕНТОРНОГО (k,l)-ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА*)

А. В. Пяткин

Исследуется минимальное число цветов, достаточное для (k,l)-раскраски инциденторов любого мультиграфа степени Δ при разных значениях k и l. Получены новые верхние оценки для этого числа.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ обозначаются соответственно его максимальная степень и максимальные исходящая и входящая полустепени. Пусть $E' \subset E$. Подграф $G' = (V, E')$ называется 2-*фактором*, если $\Delta(G') \leqslant 2$. Отметим, что в отличие от традиционного определения 2-фактора в этом определении не требуется однородности мультиграфа G'. Подграф $G' = (V, E')$ называется *линейным фактором*, если $\Delta^+(G') \leqslant 1$ и $\Delta^-(G') \leqslant 1$. Ясно, что любой линейный фактор является 2-фактором. Обратное, вообще говоря, не верно. Будем говорить, что подграф G' *покрывает* вершину $v \in V$, если ее степень в G' больше нуля.

Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02–01–00039 и 03–01–06473), Фонда содействия отечественной науке и Молодежного гранта СО РАН.

мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Для дуги $e = uv$ будем писать $f(e) = (a, b)$, если $f(u, e) = a$ и $f(v, e) = b$. Раскраску инциденторов называем *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (k, l)-*раскраской*, где $0 \leqslant k \leqslant l$, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[k, l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (k, l)-*хроматическим числом* и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$.

Заметим, что в случае $k = l = 0$ мы имеем дело с обычной задачей реберной раскраски мультиграфов и $\chi_{0,0}(G) = \chi'(G)$ — это реберное хроматическое число мультиграфа G. Впервые задача раскраски инциденторов сформулирована в работе [10]. В ней было доказано, что $\chi_{0,\infty}(G) = \Delta(G)$. Случай $k = 1$, $l = \infty$ рассмотрен в работе [13], где было установлено, что $\chi_{1,\infty}(G) = \max\{\Delta(G),\ \Delta^+(G)+1,\ \Delta^-(G)+1\}$. В ней же была высказана гипотеза, что для раскраски смешанного мультиграфа требуется $\max\{\chi'(G),\ \Delta(G) + 1\}$ цветов. Для кубических мультиграфов эта гипотеза доказана в [15]. Окончательно случай $l = \infty$ изучен в 1999 г. в кандидатской диссертации автора, где было доказано, что

$$\chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G),\ \Delta^+(G) + k,\ \Delta^-(G) + k\}. \tag{1}$$

Различные доказательства этой формулы можно найти в работах [2, 4, 16].

Понятия (k, l)-инциденторной раскраски и (k, l)-хроматического числа были введены в работе [6]. В ней найдены значения и оценки (k, l)-хроматического числа для некоторых k и l, в частности показано, что $\chi_{0,1}(G) = \Delta(G)$.

Положим $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G)|\ G$ — мультиграф степени $\Delta\}$. Из (1) вытекает равенство $\chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$. Очевидно, что

$$k + \Delta \leqslant \chi_{k,l+1}(\Delta) \leqslant \chi_{k,l}(\Delta) \leqslant \chi_{k+1,l}(\Delta). \tag{2}$$

Нижняя оценка в (2) получается при рассмотрении мультиграфа, имеющего источник или сток степени Δ. В [6] была высказана гипотеза, что для любого k существует такое l, что

$$\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta). \tag{3}$$

Так как $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$, то при $k = 0$ гипотеза верна. Заметим, что при $l = 0$ равенство $\chi_{0,0}(\Delta) = \chi_{0,\infty}(\Delta)$ не выполняется, так как из формулы Шеннона [12] следует, что $\chi_{0,0}(\Delta) = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Таким образом, при $k = 0$ искомое l равно 1. В [11] было показано, что

$$\chi_{k,l}(3) = \begin{cases} k + 4, & \text{если } k = l = 0 \text{ или } k = l = 1; \\ k + 3 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Существенное продвижение в изучении (k,l)-хроматического числа было сделано в работе [4]. В ней доказаны формулы $\chi_{k,k}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$ при $k \geqslant \Delta(G) - 1$ и $\chi_{k,\Delta(G)-1}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$. Более того, построены примеры, показывающие, что при $l < \Delta(G) - 1$ последнее равенство может не выполняться. Это означает, что если в гипотезе (3) заменить $\chi(\Delta)$ на $\chi(G)$, то она будет неверна. Тем не менее из указанных результатов не следует справедливость гипотезы (3), так как в ней l не должно зависеть от Δ. В [4] были также уточнены некоторые оценки для (k,l)-хроматического числа, полученные в [6], в частности показано, что $\chi_{1,1}(\Delta) \leqslant \lceil 3\Delta/2 \rceil$. Основным инструментом для получения перечисленных результатов является теорема Визинга о линейном факторе, которая приведена в следующем разделе.

Отметим также некоторые работы, в которых изучались другие виды раскрасок инциденторов. К ним относятся предписанная [1] (для каждой дуги задается допустимое для окраски ее инциденторов множество цветов), тотальная [2, 7] (одновременно красятся инциденторы и вершины мультиграфа), интервальная [3, 5] (при каждой вершине использованные цвета должны образовывать интервал) и обобщённая [9] (для некоторых дуг помимо инциденторов красятся также и средние части) инциденторные раскраски.

В настоящей статье техника разбиения ориентированного мультиграфа на 2-факторы и линейные факторы используется для получения новых верхних оценок для (k,l)-хроматического числа при различных ограничениях на k и l.

1. Разбиение ориентированного мультиграфа на 2-факторы и линейные факторы

Существенным подспорьем в изучении раскраски инциденторов является теорема Петерсена [14] о разбиении любого мультиграфа степени $\Delta \leqslant 2t$ на t непересекающихся 2-факторов. Это связано с тем, что для 2-фактора легко построить раскраску инциденторов f, использующую только 3 цвета a, b и c, где $a < b < c$. Действительно, для каждого цикла (компоненты связности) 2-фактора зададим некоторое направление обхода и положим $f(e) = (a,b)$, если дуга e сонаправлена обходу, и $f(e) = (b,c)$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что f является (k,l)-раскраской инциденторов, где $k = \min\{b-a, c-b\}$ и $l = \max\{b-a, c-b\}$. Такую раскраску 2-фактора будем называть *канонической*. Отметим два свойства канонической раскраски, которые используются в дальнейшем: во-первых, цвет b используется при каждой вершине, во-вторых, цвет a используется для окраски только начальных, а цвет c — только конечных инциденторов. Ясно, что при

канонической раскраске линейного фактора достаточно лишь двух цветов. Поэтому полезным дополнением к теореме Петерсена является следующее утверждение из [4].

Теорема Визинга (о линейном факторе). *В любом ориентированном мультиграфе степени Δ существует линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ.*

Нам потребуются два следствия из этой теоремы.

Лемма 1. *В любом ориентированном мультиграфе степени Δ существует линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ, компонентами которого являются только пути длины не более двух.*

Для доказательства достаточно рассмотреть линейный фактор, удовлетворяющий условиям теоремы Визинга и имеющий наименьшее число ребер. Далее такие линейные факторы будем называть *минимальными.*

Лемма 2. *Любой ориентированный мультиграф $G = (V, E)$ степени Δ можно разбить на $(\Delta - k)$ 2-факторов и $(2k - \Delta)$ линейных факторов, где $\Delta \geqslant k \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$.*

Доказательство. Применяя $2k - \Delta$ раз подряд теорему Визинга, получаем $2k - \Delta$ линейных факторов, после удаления которых остается мультиграф степени не более $2\Delta - 2k$. По теореме Петерсена этот мультиграф можно разбить на $\Delta - k$ 2-фактора. Лемма 2 доказана.

С помощью леммы 2 можно расширить множество тех k и l, для которых достигается нижняя оценка в неравенстве (2).

Теорема 1. *Если $k \geqslant \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\chi_{k,k}(\Delta) = k + \Delta$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени Δ. При $k > \Delta$ утверждение было доказано в работах [4, 11]. Пусть $\lceil \Delta/2 \rceil \leqslant k \leqslant \Delta$. По лемме 2 имеем $E = E_1 \cup \ldots \cup E_k$, где E_i образует 2-фактор при $i = 1, \ldots, \Delta - k$ и линейный фактор при остальных значениях i. Каждый 2-фактор E_i раскрасим канонически цветами i, $k + i$ и $2k + i$ $(i = 1, \ldots, \Delta - k)$, а линейный фактор E_j — цветами j и $j + k$ $(j = \Delta - k + 1, \ldots, k)$. Нетрудно убедиться, что такая (k, k)-раскраска будет правильной, а наибольшим использованным цветом является $\Delta + k$. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей леммой.

Лемма 3. *Если при некоторых натуральных t, p, k и l, где $k \leqslant l$, верно неравенство $\chi_{k,l}(2t) \leqslant p$, то при любых натуральных s и r выполняются неравенства*

1) $\chi_{k,l}(2tr) \leqslant pr$; 2) $\chi_{ks,ls}(2ts) \leqslant ps$; 3) $\chi_{ks,ls}(2tsr) \leqslant psr$.

Доказательство. 1. Пусть G — мультиграф степени $2tr$. По теореме Петерсена он разбивается на tr непересекающихся 2-факторов. Объединяя их в группы по t штук, получим разбиение графа G на r подграфов степени не выше $2t$. Раскрасив каждый из них в p цветов, получим (k,l)-раскраску графа G в pr цветов.

2. Пусть G — мультиграф степени $2ts$. Как и в предыдущем случае, разобьем G на s мультиграфов степени не выше $2t$. Обозначим их через $G_1,\dots,G_s$. Пусть f_j — (k,l)-раскраска графа G_j в p цветов $(j=1,\dots,s)$. Построим (ks,ls)-раскраску f инциденторов мультиграфа G следующим образом. Рассмотрим произвольный инцидентор i. Тогда $i\in G_j$ для некоторого $j=1,\dots,s$. Положим $f(i)=s(f_j(i)-1)+j$. Ясно, что $f(i)\leqslant s(p-1)+s=sp$ для любого инцидентора i. Покажем, что f является (ks,ls)-раскраской. Пусть i_1 и i_2 являются соответственно начальным и конечным инциденторами некоторой дуги $e\in G_j$. Тогда $f(i_2)-f(i_1)=s(f_j(i_2)-f_j(i_1))\in[ks,ls]$. Предположим, что f не является правильной раскраской, т. е. $f(i_1)=f(i_2)$ для некоторых смежных инциденторов $i_1\in G_{j_1}$ и $i_2\in G_{j_2}$. Тогда $s(f_{j_1}(i_1)-f_{j_2}(i_2))=j_2-j_1$. Так как $|j_2-j_1|<s$, то $j_1=j_2$. Следовательно, $f_{j_1}(i_1)=f_{j_1}(i_2)$, что противоречит правильности раскраски f_{j_1}.

3. Получается последовательным применением оценок 1 и 2. Лемма 3 доказана.

Верхнюю оценку $\chi_{1,1}(\Delta)\leqslant\lceil 3\Delta/2\rceil$ из [4] теперь нетрудно обобщить на случай произвольного k.

Теорема 2. *При любом $k\geqslant 1$ справедливо неравенство $\chi_{k,k}(\Delta)\leqslant\lceil 3\Delta/2\rceil+k-1$.*

Доказательство. Так как $\chi_{1,1}(2)=3$, то по лемме 3 имеем $\chi_{k,k}(2kt)\leqslant 3kt$ при любых натуральных t и k. Пусть $\Delta=2kt+m$, где $0<m<2k$, а G — мультиграф степени Δ. Если $m=1$, то по теореме Визинга мультиграф G разбивается на линейный фактор и мультиграф степени не более $2kt$. Этот мультиграф красим в $3kt$ цветов и добавляем каноническую (k,k)-раскраску линейного фактора цветами $3kt+1$ и $3kt+k+1$. Если $m=2$, то $k>1$, так как $m<2k$. Применяя теорему Визинга дважды, разобьем G на два линейных фактора и мультиграф степени не более $2kt$. Этот мультиграф раскрасим в $3kt$ цветов, первый линейный фактор — цветами $3kt+1$ и $3kt+k+1$, а второй — цветами $3kt+2$ и $3kt+k+2$. Так как $k>1$, эта раскраска будет правильной.

Если $m\geqslant 3$, то $\lceil 3\Delta/2\rceil=3kt+\lceil 3m/2\rceil\geqslant 3kt+m+2$. Применяя к мультиграфу G теорему Петерсена и в случае нечетного m теорему Визинга, разобьем G на два мультиграфа G_1 и G_2, степень первого из которых не превосходит $2kt$, а второго — $m+1$. По доказанному имеем $\chi_{k,k}(G_1)\leqslant 3kt$. Так как $m+1\leqslant 2k$, то по теореме 1 имеем $\chi_{k,k}(G_2)\leqslant$

$m+1+k$. Значит, $\chi_{k,k}(G) \leqslant 3kt+m+1+k \leqslant \lceil 3\Delta/2 \rceil + k - 1$. Теорема 2 доказана.

В случае $l > k$ верхнюю оценку для (k,l)-хроматического числа можно улучшить.

Теорема 3. *При $k \geqslant 1$ и любых натуральных t и m справедливо неравенство $\chi_{k,(2m+1)k}((4m+2)kt) \leqslant (4m+3)kt$.*

Доказательство. По лемме 3 достаточно доказать, что $\chi_{1,2m+1}(4m+2) \leqslant 4m+3$ при любом m. Пусть $G=(V,E)$ — мультиграф степени $4m+2$. Можно считать, что он однороден. По теореме Петерсена $E = \bigcup\limits_{i=1}^{2m+1} E_i$, где каждый мультиграф (V, E_i) является однородным 2-фактором. Раскраска графа G осуществляется в два этапа: сначала строятся канонические $(1,1)$-раскраски каждого из 2-факторов (объединение этих раскрасок может не быть правильной раскраской G), а затем они преобразуются в $(1, 2m+1)$-раскраску мультиграфа G.

На первом этапе для каждого $i = 1, \ldots, 2m+1$ канонически раскрасим 2-фактор E_i цветами $2i-1$, $2i$ и $2i+1$. Ясно, что раскраска мультиграфа G, полученная в результате объединения этих $(1,1)$-раскрасок 2-факторов, может не быть правильной, поскольку смежные инциденторы дуг, принадлежащие E_i и E_{i+1} для некоторых i, могут получить одинаковые цвета. Рассмотрим произвольную вершину v и 2-фактор E_i, где $i \in \{1, \ldots, 2m+1\}$. Вершине v инцидентны два инцидентора дуг из E_i. Заметим, что один из них обязательно раскрашен цветом $2i$, а другой — либо цветом $2i-1$, либо цветом $2i+1$. Будем говорить, что 2-фактор E_i является *красным при вершине* v, если этот инцидентор окрашен цветом $2i-1$, и *синим при вершине* v в противном случае. Ясно, что все четные цвета из множества $\{2,\ 4, \ldots, 4m+2\}$ использованы при v ровно по одному разу. Нечетный цвет $2i+1$ назовем *плохим*, если им окрашены два инцидентора при вершине v, и *свободным*, если не окрашен ни один. Непосредственно из определения канонической раскраски 2-фактора следует, что

1) если 2-фактор E_i синий при вершине v, то примыкающий к ней инцидентор дуги этого 2-фактора, окрашенный нечетным цветом, является конечным, а если E_i красный при вершине v, — то начальным;

2) цвета 1 и $4m+3$ не могут быть плохими; цвет 1 свободен тогда и только тогда, когда 2-фактор E_i является синим, а $4m+3$ — когда E_{2m+1} является красным;

3) для всякого $i \in \{1, \ldots, 2m\}$ цвет $2i+1$ свободен тогда и только тогда, когда E_i красный, а E_{i+1} синий;

4) при $i \in \{1, \ldots, 2m\}$ цвет $2i+1$ является плохим тогда и только тогда, когда E_i синий, а E_{i+1} красный;

На втором этапе осуществляется перекраска плохих цветов при каждой вершине мультиграфа. Пусть цвета $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ являются плохими при вершине v. Все эти цвета нечетные, т. е. $a_j = 2i_j + 1$ при каждом $j = 1, \dots, p$. Покажем, что найдутся такие свободные цвета $b_1 < \dots < b_{p+1}$, что $b_i < a_i < b_{i+1}$ для каждого $i = 1, \dots, p$.

Действительно, если E_1 синий, то $b_1 = 1$. В противном случае, так как E_{i_1} синий, найдется такое число $j \in [1, i_1 - 1]$, что E_j является красным, а E_{j+1} — синим. Но тогда цвет $2j + 1 < a_1$ свободен и можно положить $b_1 = 2j + 1$. Аналогично находится цвет b_{p+1}. Наконец, для всякого $s = 1, \dots, p - 1$ 2-фактор E_{i_s+1} является красным, а $E_{i_{s+1}}$ — синим. Следовательно, для некоторого $j \in [i_s + 1, i_{s+1} - 1]$ 2-фактор E_j будет красным, а E_{j+1} — синим. Тогда цвет $2j+1$ свободен и удовлетворяет соотношению $a_s < 2j + 1 < a_{s+1}$. Следовательно, можно положить $b_{s+1} = 2j + 1$.

Выберем число q таким образом, что $a_q < 2m + 2 < a_{q+1}$ (если $a_1 > 2m + 2$ или $a_p < 2m + 2$, то считаем, что $q = 0$ или $q = p$ соответственно). Для $i = 1, \dots, q$ начальный инцидентор цвета a_i перекрашивается в цвет b_i. Так как цвет сопряженного конечного инцидентора не превосходит $2m + 2$, то разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги не будет превосходить $2m - 1$. Аналогично для каждого $j = q+1, \dots, p$ конечный инцидентор цвета a_j перекрашивается в цвет b_{j+1}.

Заметим, что так как перекрашиваются только инциденторы нечетного цвета, ни у какой дуги не могут быть перекрашены оба инцидентора. Следовательно, осуществив такую перекраску для каждой вершины v, получим $(1, 2m+1)$-раскраску мультиграфа G в $4m + 3$ цвета. Теорема 3 доказана.

Таким образом, верхняя оценка $\lceil 3\Delta/2 \rceil$ для $\chi_{k,k}(\Delta)$ из теоремы 2 при $l = (2m + 1)k$ обобщается до $\lceil (4m + 3)\Delta/(4m + 2) \rceil$ (с точностью до аддитивной константы, зависящей только от k и m). Проиллюстрируем это утверждение для случая $k = m = 1$.

Следствие. *Если* $\Delta \not\equiv 5 \pmod 6$, *то* $\chi_{1,3}(\Delta) \leqslant \lceil 7\Delta/6 \rceil$.

Доказательство. Пусть $\Delta = 6t + s$, где $s < 5$. Рассмотрим произвольный мультиграф G степени Δ. Случай $s = 0$ рассмотрен при доказательстве теоремы 3.

Если $s = 1$, то в G существует линейный фактор, покрывающий все вершины. Раскрасим его в два цвета, а оставшийся мультиграф степени не более $6t$ раскрасим в $7t$ цветов и получим искомую раскраску.

Если $s = 2$, то G разбивается на 2-фактор и мультиграф степени не более $6t$; первый из них красится в три цвета, а второй — в $7t$ цветов.

При $s = 3$ мультиграф G представим в виде $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$,

где $\Delta(G_1) \leqslant 6t$, $\Delta(G_2) \leqslant 2$, а G_3 является линейным фактором. По теореме 3 мультиграф G_1 красим цветами $1, \ldots, 7t$, 2-фактор G_2 — цветами $7t+1, 7t+2, 7t+3$, а линейный фактор G_3 — цветами x и $7t+4$. Далее каждый инцидентор цвета x перекрашиваем в цвет из множества $\{7t+1, 7t+2, 7t+3\}$, отсутствующий при вершине, к которой примыкает данный инцидентор. Получим (1,3)-раскраску инциденторов мультиграфа G.

Наконец, если $s = 4$, то $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где $\Delta(G_1) \leqslant 6t$, а G_2 и G_3 являются 2-факторами. Мультиграф G_1 красим цветами $1, \ldots, 7t$, G_2 — цветами $7t+1, 7t+2, 7t+3$, а G_3 — цветами $x, 7t+4, 7t+5$, после чего перекрашиваем все инциденторы цвета x в свободные цвета из множества $\{7t+1, 7t+2, 7t+3\}$ так же, как в предыдущем случае. Следствие доказано.

Доказательство этой оценки при $\Delta \not\equiv 5 \pmod 6$, к сожалению, не получается, хотя для $\Delta = 5$ она доказывается в следующем разделе (теорема 5). Это доказательство, однако, требует более тщательного выбора линейного фактора и более тонких способов построения раскраски.

2. Использование минимального линейного фактора

В этом разделе доказываются две теоремы с применением минимальных линейных факторов для мультиграфов малой степени.

Теорема 4. *Справедливо соотношение* $\chi_{1,2}(4) = 5$.

Доказательство. Ввиду оценки (2) достаточно доказать, что $\chi_{1,2}(4) \leqslant 5$. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени 4. Можно считать, что G однороден. Тогда по теореме Петерсена в G найдется однородный 2-фактор F. По лемме 1 в мультиграфе $G \setminus F$ существует минимальный линейный фактор, покрывающий все вершины (так как $G \setminus F$ является однородным мультиграфом степени 2, то компонентами связности этого минимального линейного фактора будут пути длины один и два). Множество его ребер обозначим через E_1. Легко видеть, что множество ребер $E_2 = G \setminus (E_1 \cup F)$ является паросочетанием.

Будем строить (1,2)-раскраску f в два этапа.

1. Пусть $e = uv \in E_1$. Если вершине v инцидентны две дуги из E_1 (и, следовательно, ни одной дуги из E_2), то полагаем $f(e) = (2, 4)$. В противном случае красим $f(e) = (1, 2)$. Для каждой дуги $e \in E_2$ положим $f(e) = (4, 5)$. Канонически раскрасим 2-фактор F цветами x, 3 и y, где $x < 3 < y$. При этом все инциденторы, окрашенные цветом x, будут начальными, а цветом y — конечными.

2. Для каждой вершины v перекрасим примыкающий к ней инцидентор цвета x (цвета y) в свободный при этой вершине цвет из множества

$A_1 = \{1, 2\}$ (множества $A_2 = \{4, 5\}$). Покажем, что такая перекраска возможна. Действительно, если вершине v инцидентно по одной дуге из E_1 и E_2, то при ней использовано ровно по одному цвету из множеств A_1 и A_2. В противном случае вершине v инцидентны две дуги из E_1 и свободными являются цвета 2 и 5.

Нетрудно проверить, что полученная раскраска является (1,2)-раскраской мультиграфа G. Теорема 4 доказана.

Заметим, что из теоремы 4 и леммы 3 следует неравенство $\chi_{k,2k}(4kt) \leqslant 5kt$, откуда с точностью до аддитивной константы, зависящей только от k, получается оценка $\chi_{k,2k}(\Delta) \leqslant \lceil 5\Delta/4 \rceil$.

Теперь докажем теорему об (1,3)-раскраске мультиграфов степени 5.

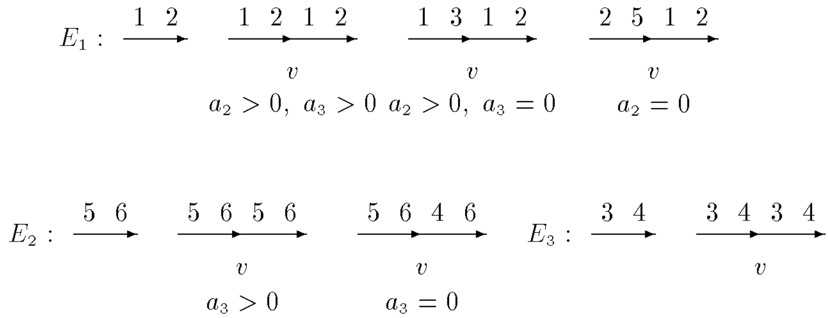
Теорема 5. *Справедливо равенство* $\chi_{1,3}(5) = 6$.

Доказательство. Ввиду оценки (2) достаточно доказать, что $\chi_{1,3}(5) \leqslant 6$. Пусть $G = (V, E)$ — однородный мультиграф степени 5. Применим три раза подряд лемму 1, т. е. обозначим через E_1, E_2 и E_3 множества ребер минимальных линейных факторов в мультиграфах G, $G \setminus E_1$ и $G \setminus (E_1 \cup E_2)$ соответственно. Тогда мультиграф $F = G \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ является 2-фактором. Пусть $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2, 3$. Будем говорить, что вершина v имеет *тип* (a_1, a_2, a_3), если ее степень в подграфе G_i равна a_i $(i = 1, 2, 3)$. По выбору линейных факторов имеем $a_1 \geqslant 1$, $a_1 + a_2 \geqslant 2$ и $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 3$ для любой вершины v типа (a_1, a_2, a_3). Будем искать (1,3)-раскраску f инциденторов мультиграфа G в три этапа.

На первом этапе красятся инциденторы дуг из множеств E_1, E_2 и E_3. Сначала введем терминологию. Для всякого $i = 1, 2, 3$ дугу $e \in E_i$ назовем *простой*, если она принадлежит пути длины один в E_i. Пусть uvw — путь длины два в E_i. Дугу uv будем называть *начальной*, а vw — *конечной* дугой пути uvw. Раскраска строится следующим образом (см. рисунок).

Раскраска E_1. Полагаем $f(e) = (1, 2)$ для каждой простой или конечной дуги $e \in E_1$. Пусть uv является начальной дугой пути в E_1. Если вершина v покрыта и G_2, и G_3, то полагаем $f(uv) = (1, 2)$. Если v покрыта G_2, но непокрыта G_3, то полагаем $f(uv) = (1, 3)$. Наконец, положим $f(uv) = (2, 5)$ в случае, если v непокрыта G_2.

Раскраска E_2. Полагаем $f(e) = (5, 6)$ для каждой простой или начальной дуги $e \in E_2$, а также для тех конечных дуг, которые исходят из вершин, покрытых G_3. Для каждой конечной дуги $e \in E_2$, которая исходит из вершины, непокрытой G_3, полагаем $f(e) = (4, 6)$.



Вершина v имеет тип (a_1, a_2, a_3)

Раскраска E_3. Полагаем $f(e) = (3, 4)$ для всех дуг $e \in E_3$.

Пусть $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{5, 6\}$ и $A_3 = \{3, 4\}$. Заметим, что после первого этапа получается правильная (1,3)-раскраска мультиграфа $G \setminus F$. Действительно, цвета из A_1 использованы только для раскраски инциденторов дуг из E_1. Цвета из A_2 используются при каждой вершине либо для раскраски инциденторов дуг из E_2, либо при отсутствии таких дуг для раскраски инциденторов дуг из E_1. Наконец, цветами из A_3 красятся инциденторы дуг из E_3, а при их отсутствии цвет 3 может использоваться для раскраски инциденторов дуг из E_1, а цвет 4 — для раскраски инциденторов дуг из E_2. Отметим также, что если вершине v инцидентна ровно одна дуга $e \in E_i$, то при этой вершине использован ровно один цвет из множества A_i $(i = 1, 2, 3)$, причем им окрашен инцидентор (v, e). Докажем еще одно полезное утверждение:

$$\begin{gathered}\textit{если степень вершины } v \textit{ в } 2\textit{-факторе } F \textit{ равна } 2,\\ \textit{то при } v \textit{ существуют свободные цвета } x \in A_1,\ y \in A_2 \textit{ и } z \in A_3.\end{gathered} \tag{4}$$

Действительно, пусть степень вершины v в 2-факторе F равна 2, а ее тип есть (a_1, a_2, a_3). Тогда $a_1 + a_2 + a_3 = 3$. Рассмотрим все возможные типы вершины v. Если $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, то при v использовано ровно по одному цвету из A_i для окраски примыкающего к v инцидентора дуги из E_i для каждого $i = 1, 2, 3$. Если $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$, то при v использованы цвета 1, 3 и один цвет из A_2. Если $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, то при v использованы цвета 1, 5 и один цвет из A_3. Наконец, если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, то при v использованы цвета 4, 6 и один цвет из A_1. Утверждение (4) доказано.

На втором этапе канонически раскрасим 2-фактор F цветами x, y и z такими, что $x < z < y$. Далее при каждой вершине v использованные цвета x, y и z заменяем на свободные при ней цвета из множеств A_1, A_2 и A_3 соответственно, если такая возможность имеется. Нетрудно проверить, что если указанная перекраска удалась при всех вершинах, то

получится искомая (1,3)-раскраска инциденторов мультиграфа G. В противном случае переходим к третьему этапу.

На третьем этапе по очереди рассматриваются все вершины, при которых после второго этапа не удалось перекрасить инцидентор цвета x, y или z. Пусть v — одна из таких вершин, имеющая тип (a_1, a_2, a_3). Ввиду (4) $a_1 + a_2 + a_3 = 4$. Рассмотрим все возможные типы.

(a) Если v является вершиной типа (2,2,0), то ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $u_2v, vw_2 \in E_2$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = (1,3)$, $f(vw_1) = (1,2)$, $f(u_2v) = (5,6)$, $f(vw_2) = (4,6)$ и $f(v,e) = z$. Так как цвет 2 свободен при v, то можно осуществить перекраску $f(u_1v) = (1,2)$, $f(v,e) = 3$.

(b) Если v — вершина типа (2,0,2), то ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $u_2v, vw_2 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = (2,5)$, $f(vw_1) = (1,2)$, $f(u_2v) = f(vw_2) = (3,4)$ и $f(v,e) = z$. Так как цвет 6 свободен при v, то можно осуществить перекраску $f(u_2v) = (3,6)$, $f(v,e) = 4$.

(c) Пусть тип вершины v есть (2,1,1). Тогда ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, $e_3 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (1,2)$, $f(v,e_2) = \alpha \in A_2$, $f(v,e_3) = \beta \in A_3$ и $f(v,e) = x$. Обозначим через $\gamma \in A_3$ свободный при v цвет из A_3 и положим $f(u_1v) = (1,\gamma)$, $f(v,e) = 2$.

(d) Пусть v имеет тип (1,2,1). Тогда ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_2$, $e_1 \in E_1$, $e_3 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (5,6)$, $f(v,e_1) = \alpha \in A_1$, $f(v,e_3) = \beta \in A_3$ и $f(v,e) = y$. Обозначим через $\gamma \in A_3$ свободный при v цвет из A_3 и положим $f(vw_1) = (\gamma,6)$, $f(v,e) = 5$.

(e) Наконец, вершине типа (1,1,2) инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_3$, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (3,4)$, $f(v,e_1) = \alpha \in A_1$, $f(v,e_2) = \beta \in A_2$ и $f(v,e) = z$. Обозначим через $\gamma \in A_2$ свободный при v цвет из A_2 и положим $f(u_1v) = (3,\gamma)$, $f(v,e) = 4$.

Заметим, что на третьем этапе ни у одной дуги из E_1, E_2 или E_3 не перекрашиваются оба инцидентора. Это следует из того, что перекраске могут подвергнуться либо начальные инциденторы цвета 5, либо конечные инциденторы меньшего цвета. Следовательно, после третьего этапа получается искомая (1,3)-раскраска инциденторов мультиграфа G. Теорема 5 доказана.

В заключение приведем сводку результатов, касающихся мультиграфов степеней $\Delta = 4$ и $\Delta = 5$.

Из теорем 1 и 4 следует, что $\chi_{k,l}(4) = k + 4$ при $k \geqslant 1$ и $l > 1$. При $k = l = 1$ имеем оценку $5 \leqslant \chi_{k,l}(4) \leqslant 6$. Для всякого $l \geqslant 3$ по теореме 1 имеем $\chi_{3,l}(5) = 8$ и $7 \leqslant \chi_{2,l}(5) \leqslant 8$, а из теоремы 5 следует, что $\chi_{1,l}(5) = 6$. По теореме 2 выполняются неравенства $7 \leqslant \chi_{2,2}(5) \leqslant 9$ и $6 \leqslant \chi_{1,1}(5) \leqslant 8$, а из теоремы 4 следует оценка $6 \leqslant \chi_{1,2}(5) \leqslant 7$.

Автор выражает благодарность рецензенту В. Г. Визингу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
3. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.
4. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
5. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 1. С. 14–40.
6. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k,l)-раскраске инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
7. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
8. **Дистель Р.** Теория графов: Пер. с англ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
9. **Плеханова Н. С., Пяткин А. В.** Передача сообщений в локальной сети с двумя центральными ЭВМ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 2. С. 91–99.
10. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
11. **Пяткин А. В.** (k,l)-раскраска инциденторов кубических мультиграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 49–53.
12. **Шеннон К. Э.** Теорема о раскраске ребер графа // Кибернетический сборник. Вып. 1. М.: Мир, 1960. С. 249–253.
13. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.
14. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

15. Pyatkin A. V. Proof of Melnikov–Vizing conjecture for multigraphs with maximum degree at most 3 // Discrete Math. 1998. V. 185, N 1–3. P. 275-278.

16. Pyatkin A. V. The incidentor coloring of multigraphs and its applications // Discrete Appl. Math. 2002. V. 120, N 1–3. P. 209–217.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
3 марта 2003 г.