ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель—июнь 2003. Серия 1. Том 10, № 2, 79–101

УДК 519.71

О СЛАБОПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ В ОДНОМ ПРЕДЭЛЕМЕНТАРНОМ БАЗИСЕ

И. К. Шаранхаев

Рассматриваются слабоповторные булевы функции в предэлементарном базисе $\{\cdot, \vee, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)\}$. Дано полное описание слабоповторных булевых функций в этом базисе по отношению обобщенной однотипности.

Введение

Слабоповторные булевы функции используются при сравнении базисов по сложности реализации булевых функций формулами. А именно добавление к базису слабоповторной функции позволяет не просто расширить его, но и сделать расширение минимальным, что дает возможность исследовать базисы по сложности формульных представлений [9]. Следует отметить, что задача полного описания структуры всех базисов сводится к нахождению слабоповторных функций.

Слабоповторность булевых функций тесно связана с таким понятием, как неразделимость булевых функций, важность изучения которого следует из известного результата А. В. Кузнецова [3] о том, что любая булева функция представляется бесповторной формулой над множеством неразделимых функций «почти» однозначно.

Первым результатом в изучении слабоповторных функций был результат В. А. Стеценко [7] об описании всех обобщенных типов функций, слабоповторных в базисе $\{\cdot, \vee, -, 0, 1\}$. Следующим был результат Н. А. Перязева [5] об описании всех слабоповторных функций в базисе $\{\oplus, \cdot, \vee, -, 0, 1\}$. Затем К. Д. Кириченко [1] нашел слабоповторные булевы функции для двух серий предэлементарных базисов.

В настоящей статье продолжены исследования в этом направлении и получено полное описание слабоповторных булевых функций в одном предэлементарном базисе.

Изложению основных результатов предпошлем необходимые определения. Все неопределяемые ниже понятия можно найти, например, в [6].

Рангом булевой функции f (обозначение rang f) называется число ее существенных переменных.

Булевы функции от 0, 1 и 2 переменных называются соответственно *константными, унарными и бинарными.* Бинарные функции, за исключением линейных функций $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$, называются *элементарными.*

Функция, получаемая из функции f заменой некоторых переменных константами 0 и 1, называется *остаточной* подфункцией функции f.

Функция f называется *бесповторной* в базисе B, если ее можно представить в этом базисе формулой, в которой каждая переменная встречается не более одного раза. В противном случае f называется *повторной* в B.

Функция f называется *слабоповторной* в базисе B, если каждая остаточная подфункция функции f является бесповторной, а f повторна в базисе B.

Базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ называется *элементарным,* а базис $B = B_0 \cup \{f\}$, где f — слабоповторная функция в B_0, называется *предэлементарным.*

Функция $f(\widetilde{\omega})$ называется *разделимой,* если возможно разбиение множества переменных $\widetilde{\omega}$ на такие непересекающиеся множества $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, что $\tilde{u} \neq \varnothing, |\tilde{v}| > 1$, и найдутся функции $g(\tilde{u}, z)$ и $h(\tilde{v})$ такие, что $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$. При этом множество переменных $\tilde{v}$ будем называть *выделимым,* а множество $\tilde{u}$ — *основным.* В противном случае функция f называется *неразделимой.*

Связь слабоповторных и неразделимых функций устанавливает следующая теорема, полученная Н. А. Перязевым [4].

Теорема 1. *Булева функция f является неразделимой тогда и только тогда, когда она либо существенная и элементарная, либо существует базис, в котором она слабоповторна.*

Для определения того, является ли некоторое множество переменных выделимым или основным в f, можно использовать следующий критерий из [3].

Теорема 2. I. *Множество переменных $\tilde{v}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является выделимым тогда и только тогда, когда среди остаточных подфункций функции f по $\tilde{v}$ найдется не более двух различных.*

II. *Множество переменных $\tilde{u}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является основным тогда и только тогда, когда каждая остаточная подфункция функции f по $\tilde{u}$ равна либо константе, либо некоторой функции $t(\tilde{v})$, либо $\bar{t}(\tilde{v})$.*

Множество переменных $\tilde{v}$ функций $f_1(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ будем называть *совместно выделимым*, если имеются функции $g_1(\tilde{u}, z)$, $g_2(\tilde{u}, z)$, $h(\tilde{v})$ такие, что $f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_1(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = g_2(\tilde{u}, h(\tilde{v}))$.

Множество переменных $\tilde{u}$ функций $f_1(\tilde{u}, \tilde{v})$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v})$ будем называть *совместно основным*, если имеются функции $g(\tilde{u}, z)$, $h_1(\tilde{v})$, $h_2(\tilde{v})$ такие,

что $f_1(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h_1(\tilde{v}))$ и $f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = g(\tilde{u}, h_2(\tilde{v}))$.

Для определения того, является ли некоторое множество переменных выделимым или основным в f, также можно использовать следующий критерий [2].

Теорема 3. I. *Множество переменных $\tilde{v}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является выделимым тогда и только тогда, когда имеется переменная $y \in \tilde{u}$ такая, что $\tilde{v}$ совместно выделимо в f_y^0 и f_y^1.*

II. *Множество переменных $\tilde{u}$ функции $f(\tilde{u}, \tilde{v})$ является основным тогда и только тогда, когда имеется переменная $y \in \tilde{v}$ такая, что $\tilde{u}$ является совместно основным в f_y^0 и f_y^1.*

Введем обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функции f и g называются *однотипными*, если $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — произвольная перестановка чисел от 1 до n.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если f однотипна с g или $\bar{g}$. Очевидно, что на множестве булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Базис B^* будем называть *приведенным* для базиса B, если каждая неразделимая и бесповторная в B функция содержится в B^*.

Для нахождения приведенного базиса B^* необходимо проделать следующие шаги:

1) для каждой функции $f \in B$ надо добавить к B все ее остаточные подфункции, получим B';

2) для каждой функции $f \in B'$ добавим к B' все функции обобщенно однотипные с f, получим B'';

3) исключим из B'' все разделимые функции, получим B^*.

Обозначим через B_g^- наибольший из базисов $B''' \subset B^*$ такой, что неразделимая функция $g \in B$ не реализуется бесповторно в B'''. Очевидно, что при введенном порядке базис B_g^- непосредственно предшествует базису B. Функция g является слабоповторной в B_g^-, так как для каждой остаточной функции $g' = g_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ функция g не является бесповторной в базисе $B_g^- \cup \{g'\}$. Поэтому функция g' должна быть бесповторной в B_g^-.

Все слабоповторные функции над элементарным базисом описывает следующая

Теорема 4. *Система булевых функций*

$$
\begin{array}{ll}
x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4, & \\
x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4), & \\
x_1(x_2 \vee \dots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_n, & n \geqslant 3, \\
x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geqslant 3, \\
x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, & n \geqslant 2,
\end{array}
$$

является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в базисе B_0.

Будем использовать следующий критерий бесповторности в B_0, полученный Б. А. Субботовской [8].

Теорема 5. *Функция f является бесповторной в базисе B_0 тогда и только тогда, когда для всех g, где либо $g = f$, либо g — остаточная подфункция функции f, выполняется следующее свойство: для любой существенной переменной y функции g среди остаточных функций g_y^0 и g_y^1 ровно одна имеет фиктивные переменные, которые являются существенными в g.*

Представление булевой функции в виде бесповторной суперпозиции неразделимых функций является в некотором смысле единственным, т. е. при фиксации определенного порядка переменных, например по возрастанию индексов, при бесскобочной записи для ассоциативных функций, когда отрицание встречается только над переменными, получаем канонический вид для представления функции в виде бесповторной суперпозиции неразделимых булевых функций. Этот факт следует из теоремы 6, доказанной А. В. Кузнецовым [3].

Формулы Φ и Ψ над базисным множеством B будем называть *близкими* (обозначение $\Phi \simeq \Psi$), если существует последовательность формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ такая, что $\Phi \equiv \Phi_1$, $\Psi \equiv \Phi_m$ и Φ_{k+1} получается из Φ_k $(k = 1, \dots, m-1)$ применением одного из следующих тождеств близости:

1) $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \simeq g(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$ для любых функций f, g таких, что $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_n)$;

2) $f(x_1, \dots, x_n) \simeq \bar{g}(x_1, \dots, x_n)$ для любых функций f, g таких, что $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{g}(x_1, \dots, x_n)$;

3) $f(x_1, \dots, x_n) \simeq g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$, где $i_1, \dots, i_n$ перестановка элементов $1, \dots, n$, для любых функций f, g таких, что $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$;

4) $f(f(x, y), z) \simeq f(x, f(y, z))$ для любых бинарных функций f таких, что $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$;

5) $x \simeq \bar{\bar{x}}$.

Теорема 6. *Две бесповторные формулы над множеством неконстантных неразделимых функций эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются близкими.*

Представление функции бесповторной формулой в B_0 будем называть *нормальным*, если отрицание встречается только над переменными. По теореме 6 нормальное представление функции единственно с точностью до коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции. Кроме того, если переменная y входит в нормальное представление f в степени τ, то в нормальное представление любой остаточной подфункции функции f переменная y будет входить в степени τ.

Если $\tilde{u} = \{u_1, \ldots, u_k\}$, то обозначим $(\&\tilde{u}) = u_1 \cdot \ldots \cdot u_k$ и $(\vee\tilde{u}) = u_1 \vee \cdots \vee u_k$.

Для функций, слабоповторных в небинарных базисах, К. Д. Кириченко [1, 2] были получены следующие результаты.

Теорема 7. *Для любой булевой функции f, слабоповторной в B и неслабоповторной в B_g^- такой, что $\operatorname{rang} f > \operatorname{rang} B^* + 2$ и $\operatorname{rang} g = \operatorname{rang} B^* = n$, найдется обобщенно однотипная с ней функция h, которая может быть задана одной из следующих формул:*

1) $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{n-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \cdots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k), x_1, \ldots, x_{n-k})$, *где* $p(1, y_1, \ldots, y_n) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_n})$;

2) $h(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}) = t(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}))$, *где функция* $t(x_1, \ldots, x_k, z_1, z_2)$ *такова, что для любого* $i \leqslant k$ *переменная* z_1 *фиктивна в остаточной функции* $t^0_{x_i}$, *а* z_2 *— в остаточной функции* $t^1_{x_i}$.

Лемма 1. *Пусть функция g слабоповторна в B_0 и для любой переменной y и константы τ остаточная функция g^τ_y является существенной, если некоторая функция f повторна в B_0 и бесповторна в $B_0 \cup \{g\}$, и обе остаточные подфункции функции f по некоторой переменной бесповторны в B_0. Тогда эти остаточные подфункции являются существенными.*

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ бесповторна в B_0, $f^\sigma_{x_i} = t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — существенная остаточная функция и $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ — все фиктивные переменные функции $f^{\bar{\sigma}}_{x_i}$. Тогда найдется такой набор констант $\tau_1, \ldots, \tau_k$, что $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i^\sigma t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \bar{x}_i^\sigma t^{\tau_1, \ldots, \tau_k}_{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.*

Через S^g_B обозначим множество булевых функций, слабоповторных в B, но неслабоповторных в B_g^-.

Лемма 3. *Пусть функция $f \in S^g_B$ и f представляется в виде 2 теоремы 7. Тогда $\operatorname{rang} f \leqslant 2 \operatorname{rang} B^*$.*

1. Некоторые свойства бесповторных булевых функций в предэлементарных базисах

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть функция g слабоповторна в B_0. Тогда если некоторая функция f повторна в B_0 и бесповторна в $B_0 \cup \{g\}$ и обе остаточные подфункции функции f по некоторой переменной y бесповторны в B_0, то эти остаточные подфункции являются одновременно либо существенными, либо несущественными, причем фиктивные переменные у них различны.*

Доказательство. Заметим, что из теоремы 4 только для слабоповторных в B_0 функций, обобщенно однотипных с функциями $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ и $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2\bar{x}_3$, найдется такая переменная, что остаточные подфункции по этой переменной несущественны и имеют по одной различной фиктивной переменной. Для остальных типов слабоповторных в B_0 функций остаточные подфункции по любой переменной существенны.

В представление f функция g не может входить более одного раза, иначе по любой переменной x одна из остаточных функций f_x^τ или $f_x^{\bar{\tau}}$ повторна в B_0, что не удовлетворяет условию леммы.

Функцию f представим в виде $t(\tilde{u}_0, g(h_1(\tilde{u}_1), \ldots, h_n(\tilde{u}_n)))$. Из сказанного выше следует, что функции $t(\tilde{u}_0, z), h_1, \ldots, h_n$ бесповторны в B_0. Из теоремы 5 следует, что $y \notin \tilde{u}_0$, иначе либо f_y^τ, либо $f_y^{\bar{\tau}}$ повторна в B_0.

Пусть $y \in \tilde{u}_i$. Если h_i — неунарная, то одна из остаточных функций f_y^τ или $f_y^{\bar{\tau}}$ повторна в B_0, что невозможно. Если же h_i — унарная, то очевидно, что лемма справедлива. Лемма 4 доказана.

Для функций, повторных в B_0, но бесповторных в $B = B_0 \cup \{g\}$, где g равна $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ или $x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, *нормальным представлением* будем называть такую формулу, в которую каждая переменная входит не более одного раза и отрицание встречается только над переменными. Это определение корректно, так как легко проверить, что всегда можно избавиться от отрицания над функцией g.

Лемма 5. *У всякой функции f, бесповторной в $B = B_0 \cup \{g\}$, где функция $g = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ или $g = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, степени переменных в нормальном представлении остаточных функций f_y^0 и f_y^1 равны.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что если некоторая переменная входит в нормальное представление функции t, бесповторной в B_0, в некоторой степени τ, то для любой остаточной подфункции функции t эта переменная будет входить в нормальное представление в степени τ.

Докажем от противного, что предыдущее свойство справедливо и для любой функции, однотипной с g. Заметим, что нормальное представление каждой остаточной подфункции функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ не содержит отрицаний. Пусть p однотипна с g, т. е. $p = g(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_{i_n}})$. Допустим, имеется такая переменная x_{i_k}, что степени переменных в нормальном представлении остаточных функций $p_{x_{i_k}}^0$ и $p_{x_{i_k}}^1$ различны. Из вида остаточных подфункций функции g следует, что существует такая константа τ, что $p_{x_{i_k}}^\tau$ имеет два нормальных представления, в которых степени переменных различны. Это невозможно, так как $p_{x_{i_k}}^0$ и $p_{x_{i_k}}^1$ бесповторны в B_0.

Так как любая функция, бесповторная в B, представляется в виде бесповторной суперпозиции функций, каждая из которых бесповторна в B_0 или g, то с учетом изложенного выше следует, что для любой функции f, бесповторной в B, нормальное представление любой остаточной подфункции содержит переменные в тех же степенях, в которых они входили в нормальное представление функции f. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть функция g слабоповторна в базисе B_0, $B = B_0 \cup \{g\}$, функция f — существенная и бесповторная в B и для некоторой переменной y и константы τ остаточная функция f_y^τ существенна и повторна в B_0. Тогда если остаточная функция $f_y^{\bar\tau}$ бесповторна в B_0, то она несущественна.*

Доказательство. Как и в лемме 4, отметим, что из теоремы 4 только для слабоповторных в B_0 функций, обобщенно однотипных с функциями $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3x_4$ и $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2\bar{x}_3$, найдется такая переменная, что остаточные подфункции по этой переменной несущественны и имеют по одной различной фиктивной переменной. Для остальных типов слабоповторных в B_0 функций остаточные подфункции по любой переменной существенны.

Функцию f представим в виде $t(\tilde{u}_0, g(h_1(\tilde{u}_1), \ldots, h_n(\tilde{u}_n)))$. Докажем от противного, что $t(\tilde{u}_0, z)$ не может быть обобщенно однотипна с g. Пусть $f = g^\sigma(\tilde{u}_0, g(h_1(\tilde{u}_1), \ldots, h_n(\tilde{u}_n)))$. Переменная y не принадлежит $\tilde{u}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, иначе f_y^τ и $f_y^{\bar\tau}$ повторны в B_0, что не удовлетворяет условиям леммы.

Если $y \in \tilde{u}_0$, то либо f_y^τ и $f_y^{\bar\tau}$ повторны в B_0, либо f_y^τ несущественна, что невозможно по условиям леммы. Итак, $t(\tilde{u}_0, z)$ бесповторна в B_0.

Пусть $y \in \tilde{u}_0$. У остаточной функции $t_y^{\bar\tau}(\tilde{u}_0, z)$ переменная z должна быть фиктивна, в противном случае обе остаточные функции f_y^τ и $f_y^{\bar\tau}$ повторны в B_0. Фиктивность переменной z означает, что в данном случае лемма справедлива.

Пусть $y \notin \tilde{u}_0$, т. е. $y \in \tilde{u}_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажем, что h_i бесповторна в B, причем h_i — неунарная функция и $h_{iy}^{\bar\tau}$ — константа. Если h_i —

унарная, то имеем следующее:

— остаточные функции f_y^τ и $f_y^{\bar\tau}$ либо одновременно повторны в B_0, либо одновременно бесповторны в B_0, что невозможно;

— остаточная функция f_y^τ несущественна, что не удовлетворяет условиям леммы.

Если $h_i{}_y^{\bar\tau}$ не является константой, то остаточные функции f_y^τ и $f_y^{\bar\tau}$ повторны в B_0. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ слабоповторна в базисе B_0 и $B = B_0 \cup \{g\}$. Если остаточная функция $f_y^\tau = g(h_1, \ldots, h_n)$, где h_i бесповторна в B_0 для любого i, а остаточная функция $f_y^{\bar\tau} = g(h_1, \ldots, h_{j-1}, \sigma, h_{j+1}, \ldots, h_n)$, где σ — некоторая константа, то f бесповторна в B.*

Доказательство. Функция $f = y^\tau g(h_1, \ldots, h_n) \vee y^{\bar\tau} g(h_1, \ldots, h_{j-1}, \sigma, h_{j+1}, \ldots, h_n)$. При $\sigma = 0$ функция $f = g(h_1, \ldots, y^\tau \cdot h_j, \ldots, h_n)$, при $\sigma = 1$ функция $f = g(h_1, \ldots, y^{\bar\tau} \vee h_j, \ldots, h_n)$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ слабоповторна в базисе B_0 и не является обобщенно однотипной с функцией $z_1 \oplus z_2$ и $B = B_0 \cup \{g\}$. Если f — существенная функция ранга $n+1$ и для некоторой переменной y остаточная функция f_y^τ обобщенно однотипна с g, то f бесповторна в B тогда и только тогда, когда либо остаточная функция $f_y^{\bar\tau}$ является константой, либо существуют переменная z и константа σ такие, что $f_y^{\bar\tau} = f_{y\,z}^{\tau\,\sigma}$.*

Доказательство. Необходимость. Функция f может принимать вид $(x_k^{\sigma_k} g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n}))^\delta$ или $g^\sigma(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, (x_j^{\sigma_j} x_k^{\sigma_k})^\delta, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$. Отсюда следует, что в эту сторону лемма верна.

Достаточность. Не уменьшая общности, можно считать, что $f_y^\tau = g(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $f_y^{\bar\tau}$ равна либо 0, либо 1, либо $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. В первом случае $f = y^\tau \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$, во втором $f = y^{\bar\tau} \vee g(x_1, \ldots, x_n)$, в третьем случае $f = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y^\tau \cdot x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ при $\sigma = 0$ и $f = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y^{\bar\tau} \vee x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ при $\sigma = 1$. Лемма 8 доказана.

2. Слабоповторные булевы функции в одном предэлементарном базисе

В этом разделе получено полное описание слабоповторных булевых функций в одном предэлементарном базисе. Основным утверждением является

Лемма 9. *Для булевой функции $g(x_1, \ldots, x_5) = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$ и базиса $B = B_0 \cup \{g\}$ булева функция f слабоповторна в B и неслабоповторна в B_0 тогда и только тогда, когда f обобщенно однотипна с одной из следующих функций:*

1) $\bar{x}_1 g(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \vee x_1 x_5(x_2 x_4 \vee x_3 x_6)$;

2) $\bar{x}_1 x_2 g(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \vee x_1(x_4 \vee x_5(x_6 \vee x_7(x_2 \vee x_3)))$.

Доказательство. Достаточность. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что все остаточные подфункции указанных функций являются бесповторными в B, а сами функции повторны в B в силу леммы 6.

Необходимость. Функция g обладает следующими очевидными свойствами:

1) $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g(x_2, x_1, x_5, x_4, x_3) = g(x_3, x_5, x_1, x_4, x_2) = g(x_5, x_3, x_2, x_4, x_1)$;

2) $\bar{g}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_5, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_2)$.

Это означает, что всегда можно избавиться от отрицания над функцией g, а обобщенная однотипность совпадает с однотипностью.

Выпишем все остаточные подфункции функции $g(x_1, \ldots, x_5)$ по одной переменной:

$$
\begin{array}{ll}
g^0_{x_1} = x_5(x_3 \vee x_2 x_4); & g^1_{x_1} = x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5); \\
g^0_{x_2} = x_3(x_1 x_4 \vee x_5); & g^1_{x_2} = x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_4); \\
g^0_{x_3} = x_2(x_1 \vee x_4 x_5); & g^1_{x_3} = x_5 \vee x_1(x_2 \vee x_4); \\
g^0_{x_4} = x_1 x_2 \vee x_3 x_5; & g^1_{x_4} = (x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3); \\
g^0_{x_5} = x_1(x_2 \vee x_3 x_4); & g^1_{x_5} = x_3 \vee x_2(x_1 \vee x_4).
\end{array}
$$

Из вида остаточных подфункций функции g следует, что нормальное представление остаточных подфункций функции, обобщенно однотипной с g, записывается формулами определенных видов. Например, если нулевая остаточная подфункция по некоторой переменной представляется в виде формулы $\Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3\Phi_4)$, то единичная — в виде формулы $\Psi_1 \vee \Psi_2(\Psi_3 \vee \Psi_4)$. Далее, если известно нормальное бесповторное в B_0 представление одной остаточной подфункции по любой переменной, то можно построить ровно две функции, однотипные с g, которые имеют такую остаточную подфункцию. Например, пусть f однотипна с g и $f^\tau_y = x_1(x_2 \vee x_3 x_4)$. Задача состоит в расстановке переменных. В силу свойства 1 функции g фиксируем переменную y на первой позиции. Из вида остаточных подфункций функции g переменная x_1 на пятой позиции, x_2 — на третьей. Так как x_3 и x_4 симметричны в остаточной функции f^τ_y, получаем два варианта для f: $g(y^{\bar{\tau}}, x_3, x_2, x_4, x_1)$ и $g(y^{\bar{\tau}}, x_4, x_2, x_3, x_1)$.

Для любой функции f, слабоповторной в B и неслабоповторной в B_0, $\operatorname{rang} f > 5$ потому, что f имеет остаточную подфункцию, бесповторную в B, но повторную в B_0. Поочередно будем искать слабоповторные функции рангов 6, 7 и ранга больше 7.

Найдем слабоповторные функции ранга 6. Имеется существенная переменная y такая, что $f_y^\tau = g^\sigma(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_5^{\sigma_5})$. Тогда функция $h(y, x_1, \ldots, x_5) = f^\sigma(y^{\bar\tau}, x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_5^{\sigma_5})$ такова, что $h_y^0 = g(x_1, \ldots, x_5)$.

Для любых x_k и σ в $h_{y x_k}^{0 \sigma}$ все переменные входят без отрицаний. Поэтому в силу леммы 5 все переменные входят в h_y^1 без отрицаний.

Очевидно, что либо $h_y^1 = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_5})$, либо h_y^1 существенна и бесповторна в B_0, либо h_y^1 несущественна и бесповторна в B_0.

Пусть $h_y^1 = g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_5})$. Рассмотрим остаточную функцию $h_{x_4}^0 = \bar y(x_1x_2 \vee x_3x_5) \vee y g_{x_4}^0(x_{i_1}, \ldots, x_{i_5})$. Из вида остаточных подфункций функции g следует, что $h = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_4, x_{i_5})$. Учитывая свойство 1 функции g, остается проверить на слабоповторность в B функции $h_1 = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_1, x_2, x_5, x_4, x_3)$, $h_2 = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_1, x_3, x_2, x_4, x_5)$, $h_3 = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_1, x_3, x_5, x_4, x_2)$, $h_4 = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_1, x_5, x_2, x_4, x_3)$ и $h_5 = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y g(x_1, x_5, x_3, x_4, x_2)$. Следующие остаточные подфункции функций $h_1, \ldots, h_5$ повторны в B, так как они слабоповторны в B_0 и необобщенно однотипны с g: ${h_1}_{x_3 x_4 x_5}^{1\ 1\ 0} = x_1(x_2 \vee \bar y) \vee x_2 y$, ${h_2}_{x_1 x_4 x_5}^{1\ 0\ 0} = \bar y x_2 \vee y x_3$, ${h_3}_{x_1 x_4 x_5}^{1\ 0\ 0} = \bar y x_2 \vee y x_3$, ${h_4}_{x_2 x_4 x_5}^{1\ 0\ 0} = \bar y x_1 \vee y x_3$, ${h_5}_{x_2 x_4 x_5}^{1\ 0\ 0} = \bar y x_1 \vee y x_3$.

Отметим, что и в дальнейшем проверка функций на слабоповторность в B будет сводиться к нахождению остаточных подфункций, слабоповторных в B_0 и необобщенно однотипных с g, т. е. повторных в B, так как это означает, что сами функции неслабоповторны в B.

Пусть $h = \bar y g(x_1, \ldots, x_5) \vee y t(x_1, \ldots, x_5)$, где функция t — существенная и бесповторная в B_0. Выпишем остаточные функции $h_{x_1}^0 = \bar y x_5(x_3 \vee x_2x_4) \vee y t_{x_1}^0$, $h_{x_1}^1 = \bar y(x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5)) \vee y t_{x_1}^1$, $h_{x_2}^0 = \bar y x_3(x_1x_4 \vee x_5) \vee y t_{x_2}^0$, $h_{x_2}^1 = \bar y(x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_4)) \vee y t_{x_2}^1$.

Функция t бесповторна в B_0. По теореме 5 для любой переменной x_i либо $t_{x_i}^\tau = t_{x_i}^{\bar\tau}$ (т. е. x_i фиктивна в t), либо если $t_{x_i}^\tau \neq t_{x_i}^{\bar\tau}$, то только одна из этих остаточных функций существенна. У функции t нет фиктивных переменных, поэтому только одна из остаточных функций $t_{x_1}^0$ и $t_{x_1}^1$ существенна. Аналогичная ситуация с $t_{x_2}^0$ и $t_{x_2}^1$. Рассмотрим случаи, когда каждая из этих остаточных функций существенна, и выясним, какой вид она имеет.

Пусть $t_{x_1}^0$ существенна. Остаточная функция $h_{x_1}^0$ либо бесповторна в B_0, либо однотипна с g. Если $h_{x_1}^0$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 имеем $t_{x_1}^0 = x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Если $h_{x_1}^0$ однотипна с g, то либо $t_{x_1}^0 = x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5)$, либо $t_{x_1}^0 = x_4 \vee x_3(x_2 \vee x_5)$.

Пусть $t_{x_1}^1$ существенна. Если $h_{x_1}^1$ бесповторна в B_0, то $t_{x_1}^1 = x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5)$. Если $h_{x_1}^1$ однотипна с g, то либо $t_{x_1}^1 = x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, либо $t_{x_1}^1 = x_4(x_3 \vee x_2x_5)$.

Пусть $t_{x_2}^0$ существенна. Если $h_{x_2}^0$ бесповторна в B_0, то по теореме 5

имеем $t^0_{x_2} = x_3(x_1x_4 \vee x_5)$. Если $h^0_{x_2}$ однотипна с g, то либо $t^0_{x_2} = x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_4)$, либо $t^0_{x_2} = x_4(x_1x_3 \vee x_5)$.

Пусть $t^1_{x_2}$ существенна. Если $h^1_{x_2}$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 имеем $t^1_{x_2} = x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_4)$. Если $h^1_{x_2}$ однотипна с g, то либо $t^1_{x_2} = x_3(x_1x_4 \vee x_5)$, либо $t^1_{x_2} = x_4(x_1x_3 \vee x_5)$.

Учитывая, что нормальное представление функции, бесповторной в B_0, очень схоже с нормальным представлением существенной остаточной функции по любой существенной переменной, можно легко найти вид самой функции. Например, рассмотрим остаточную подфункцию $t^0_{x_1} = x_5(x_3 \vee x_2x_4)$. Очевидно, что t может быть равна одной из следующих функций: $x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, $x_5(x_1 \vee x_3 \vee x_2x_4)$, $(x_1 \vee x_5)(x_3 \vee x_2x_4)$, $x_5(x_3 \vee (x_1 \vee x_2)x_4)$, $x_5(x_3 \vee x_2(x_1 \vee x_4))$. Так как известен вид существенной остаточной функции по x_2, остается только функция $x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$.

После рассмотрения всех случаев имеются следующие функции: $x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, $x_2 \vee x_3(x_1x_4 \vee x_5)$ и $x_4(x_1x_3 \vee x_2x_5)$. Остается проверить на слабоповторность в B функции $h_1 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee y(x_1 \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4))$, $h_2 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee y(x_2 \vee x_3(x_1x_4 \vee x_5))$, $h_3 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yx_4(x_1x_3 \vee x_2x_5)$. Легко заметить, что $h_1(y, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = h_2(y, x_2, x_1, x_5, x_4, x_3)$, а остаточная функция ${h_1}^{0\ 1}_{x_2x_4} = x_1(y \vee x_3) \vee x_3x_5$ повторна в B_0. Поэтому h_1 неслабоповторна в B, а h_3 — функция первого типа.

Пусть $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yt(x_1, \ldots, x_5)$, где функция t — несущественная и бесповторная в B_0. Все переменные не являются одновременно фиктивными в t, иначе h бесповторна в B.

Пусть фиктивна одна переменная. Из свойства 1 функции g следует, что достаточно рассмотреть случаи, когда фиктивны x_1 и x_4.

Пусть $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yt(x_2, x_3, x_4, x_5)$. Рассмотрим функцию $h^0_{x_1} = \bar{y}x_5(x_3 \vee x_2x_4) \vee yt(x_2, x_3, x_4, x_5)$. Функция $h^0_{x_1}$ является либо бесповторной в B_0, либо однотипной с g. Если $h^0_{x_1}$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 функция t равна $x_5(x_3 \vee x_2x_4)$, что невозможно, так как t — остаточная подфункция функции g по одной переменной. Поэтому h бесповторна в B по лемме 8. Если $h^0_{x_1}$ однотипна с g, то функция t равна либо $x_2 \vee x_3(x_4 \vee x_5)$, либо $x_4 \vee x_3(x_2 \vee x_5)$. В первом случае t — остаточная подфункция функции g по одной переменной. Поэтому h бесповторна в B. Во втором случае нужно проверить на слабоповторность в B функцию $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee y(x_4 \vee x_3(x_2 \vee x_5))$. Остаточная функция $h^{1\ 0\ 0}_{x_2x_3x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$ повторна в B, т. е. h неслабоповторна в B.

Пусть $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yt(x_1, x_2, x_3, x_5)$. Рассмотрим функцию $h^0_{x_4} = \bar{y}(x_1x_2 \vee x_3x_5) \vee yt(x_1, x_2, x_3, x_5)$. Если $h^0_{x_4}$ бесповторна в B_0, то по теореме 5 функция t равна $x_1x_2 \vee x_3x_5$, т. е. является остаточной подфункцией функции g по одной переменной. Поэтому по лемме 8 функция h бесповторна в B. Если $h^0_{x_4}$ однотипна с g, то функция t равна либо

$(x_1 \vee x_5)(x_2 \vee x_3)$, либо $(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_5)$. В первом случае t — остаточная подфункция функции g по одной переменной, что невозможно по лемме 8. Во втором случае проверяем на слабоповторность в B функцию $h = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee y(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_5)$. Остаточная функция $h^{1\ 1\ 1}_{x_3 x_4 x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_2$ повторна в B.

Пусть фиктивны две переменные. Обозначим их через $\tilde{u}$. Тогда всегда имеются наборы констант $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\sigma}$ такие, что функции $g^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}}$ и $g^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{u}}$ существенны и различны. Остаточные функции $h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}} = \bar{y}g^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}} \vee yt$ и $h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{u}} = \bar{y}g^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{u}} \vee yt$ бесповторны в B_0, по теореме 5 функция t одновременно равна $g^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}}$ и $g^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{u}}$, что невозможно.

Пусть фиктивны три переменные. Тогда либо все аналогично предыдущему случаю, либо возможно следующее: имеются две фиктивные переменные (обозначим их через $\tilde{v}$) и набор констант $\tilde{\tau}$ такие, что остаточные функции $h^{\tilde{\tau}\,0}_{\tilde{v}\,y}$ и $h^{\tilde{\tau}\,1}_{\tilde{v}\,y}$ имеют ровно по одной различной фиктивной переменной, а по теореме 5 это противоречит бесповторности в B_0 остаточной функции $h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{v}}$.

Пусть фиктивны четыре переменные. Из свойства 1 функции g достаточно проверить на слабоповторность в B функции $h_1 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yx_1$ и $h_2 = \bar{y}g(x_1, \ldots, x_5) \vee yx_4$. Остаточные функции ${h_1}^{0\ 1\ 1}_{x_2 x_4 x_5} = x_1(x_3 \vee y) \vee x_3\bar{y}$ и ${h_2}^{1\ 0}_{x_2 x_5} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$ повторны в B.

Нахождение слабоповторных функций ранга 6 завершено.

При дальнейших рассуждениях понадобится следующее свойство. Пусть функция f — существенная и бесповторная в B ранга 6, но повторная в B_0. Очевидно, что f равна либо $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} g(x_{i_2}^{\sigma_{i_2}}, \ldots, x_{i_6}^{\sigma_{i_6}})$, либо $x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} \vee g(x_{i_2}^{\sigma_{i_2}}, \ldots, x_{i_6}^{\sigma_{i_6}})$, либо $g(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_k^{\sigma_k} x_j^{\sigma_j}, \ldots, x_{i_5}^{\sigma_{i_5}})$, либо $g(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_k^{\sigma_k} \vee x_j^{\sigma_j}, \ldots, x_{i_5}^{\sigma_{i_5}})$. Пусть переменная y такова, что f^{τ}_y и $f^{\bar{\tau}}_y$ — существенные и бесповторные в B_0. Из вида остаточных подфункций функции g можно сделать следующий вывод. Во-первых, нормальное представление функций f^{τ}_y и $f^{\bar{\tau}}_y$ не может быть задано формулами $z \cdot \Phi$ и $z \vee \Phi$ соответственно, во-вторых, нормальные представления f^{τ}_y и $f^{\bar{\tau}}_y$ одновременно не имеют подформул $z_1 z_2$ и $z_1 \vee z_2$ соответственно.

Будем искать слабоповторные функции ранга 7. Пусть функция f — слабоповторная в B и неслабоповторная в B_0. Тогда имеются переменная y и константа τ такие, что либо $f^{\tau}_y = (x_k^{\sigma_k} \cdot g^{\sigma}(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, x_{i_5}^{\sigma_{i_5}}))^{\delta}$, либо $f^{\tau}_y = g(x_{i_1}^{\sigma_{i_1}}, \ldots, (x_j^{\sigma_j} \cdot x_k^{\sigma_k})^{\delta}, \ldots, x_{i_5}^{\sigma_{i_5}})$. Тогда имеется такая функция h, обобщенно однотипная с f, что либо $h^0_y = x_1 g(x_2, \ldots, x_6)$, либо $h^0_y = g(x_1 x_2, x_3, \ldots, x_6)$, либо $h^0_y = g(x_3, x_4, x_5, x_1 x_2, x_6)$.

Обозначим через $t(x_1, \ldots, x_6)$ функцию h^1_y. Так как любая остаточная функция $(h^0_y)^{\tau_i}_{x_i}$ не содержит переменных с отрицаниями, в нормальном представлении остаточной функции $t^{\tau_i}_{x_i}$ также отсутствуют

переменные с отрицаниями. В силу леммы 5 в нормальном представлении функции t отсутствуют переменные с отрицаниями.

Пусть функция t повторна в B_0. Очевидно, что t не имеет фиктивных переменных, т. е. не представима в виде $g(x_{i_1},\ldots,x_{i_5})$. Иначе либо одна из остаточных подфункций функции h_y^0 по фиктивной переменной существенна, что противоречит лемме 6, либо h разделима и по теореме 1 неслабоповторна. Тогда t может принимать один из следующих видов: 1) $x_{i_1}g(x_{i_2},\ldots,x_{i_6})$; 2) $x_{i_1}\vee g(x_{i_2},\ldots,x_{i_6})$; 3) $g_1(x_{i_1}x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_6})$; 4) $g_1(x_{i_1}\vee x_{i_2},x_{i_3},\ldots,x_{i_6})$, где g_1 получается из g перестановкой переменных.

Пусть $h_y^0=x_1g(x_2,\ldots,x_6)$. Тогда $h=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee yt(x_1,\ldots,x_6)$. Докажем, что функция t не представима в виде 3 и 4. Одна из переменных x_{i_1} или x_{i_2} отлична от x_1, пусть для определенности x_{i_1}. Возьмем остаточную функцию $h_{x_{i_1}}^{\tau}$, где при $\tau=1$ функция t принимает вид 3 и при $\tau=0$ — вид 4. Тогда $(h_{x_{i_1}}^{\tau})_y^1$ однотипна с g, а $(h_{x_{i_1}}^{\tau})_y^0$ существенна и бесповторна в B_0, что противоречит лемме 6.

Функция t не представима в виде 1. Так как при $i_1=1$ функция h разделима и по теореме 1 неслабоповторна, а при $i_1\neq 1$ остаточная функция $h_{y\,x_1}^{0\,1}$ равна $=g(x_2,\ldots,x_6)$ и $h_{y\,x_1}^{1\,1}$ существенна и бесповторна в B_0, что противоречит лемме 6.

Остается вид 2. Если $i_1\neq 1$, то $h_{y\,x_1}^{0\,1}$ однотипна с g, а $h_{y\,x_1}^{1\,1}$ существенна и бесповторна в B_0, что аналогично предыдущей ситуации. Если $i_1=1$, то, рассмотрев остаточную подфункцию функции h по x_k, где $k\neq 1$, убеждаемся в том, что $h_{x_{i_k}}^{\tau}$ существенна и повторна в B_0 ранга 6, остаточные функции $h_{y\,x_{i_k}}^{0\,\tau}$ и $h_{y\,x_{i_k}}^{1\,\tau}$ существенны и бесповторны в B_0 и представляются формулами $x_1\cdot\Phi$ и $x_1\vee\Psi$ соответственно, что невозможно.

Аналогично рассматриваются случаи $h_y^0 = g(x_1x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ и $h_y^0=g(x_3,x_4,x_5,x_1x_2,x_6)$.

Пусть функция t бесповторна в B_0. Пусть $h_y^0 = x_1g(x_2,\ldots,x_6)$. Тогда $h=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee yt(x_1,\ldots,x_6)$. Очевидно, что переменные $x_2,\ldots,x_6$ одновременно не являются фиктивными в t.

Пусть x_1 фиктивна в t. Рассмотрим остаточную функцию $h_{x_1}^1 = \bar{y}g(x_2,\ldots,x_6)\vee yt(x_2,\ldots,x_6)$. По лемме 8 функция t равна либо $x_6(x_4\vee x_3x_5)$, либо $x_3\vee x_4(x_5\vee x_6)$, либо $x_2x_3\vee x_4x_6$, либо $(x_2\vee x_6)(x_3\vee x_4)$. Далее проверяем на слабоповторность в B функции $h_1=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee yx_6(x_4\vee x_3x_5)$, $h_2=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee yx_3\vee x_4(x_5\vee x_6)$, $h_3=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee yx_2x_3\vee x_4x_6$, $h_4=\bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee y(x_2\vee x_6)(x_3\vee x_4)$. Остаточные функции ${h_1}_{x_2x_3x_4}^{1\,1\,1} = x_6(x_1\vee y)\vee\bar{y}x_1$, ${h_2}_{x_2x_5x_6}^{0\,0\,1} = x_4(x_1\vee y)\vee yx_3$, ${h_3}_{x_2x_4x_5}^{1\,1\,1} = (x_3\vee x_6)(x_1\vee y)\vee x_1\bar{y}$, ${h_4}_{x_2x_5x_6}^{0\,0\,1} = y(x_3\vee x_4)\vee x_4x_1$ повторны в B.

Пусть x_1 существенна в t. Рассмотрим функцию $h^1_{x_1} = \bar{y}g(x_2, \ldots, x_6) \vee yt^1_{x_1}$. Из леммы 8 остаточная функция $t^1_{x_1}$ равна либо константе, либо остаточной подфункции функции $g(x_2, \ldots, x_6)$ по одной переменной.

Пусть $t^1_{x_1}$ — константа. Тогда $h = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_1 \vee p(x_2, \ldots, x_6))$, где p не является константой. Пусть функция p имеет фиктивные переменные $\tilde{u}$; если p — существенная, то $\tilde{u}$ — любая переменная. Тогда имеется набор $\tilde{\tau}$ такой, что остаточные функции $h^{0\,\tilde{\tau}}_{y\,u}$ и $h^{0\,\tilde{\tau}}_{y\,u}$ существенны и бесповторны в B_0, различны и представимы в виде $x_1 \cdot \Phi$ и $x_1 \vee \Psi$ соответственно, что невозможно.

Если $t^1_{x_1}$ является остаточной подфункцией функции $g(x_2, \ldots, x_6)$, то $t^1_{x_1}$ равна либо $x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, либо $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, либо $x_2x_3 \vee x_4x_6$, либо $(x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$.

Известно, что функция t бесповторна в B_0, нормальное представление t не содержит отрицаний и нормальное представление единичной остаточной подфункции функции t. Отсюда функция t равна одной из следующих функций: 1) $x_1x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, 2) $x_6(x_1x_4 \vee x_3x_5)$, 3) $x_6(x_4 \vee x_1x_3x_5)$, 4) $(x_1 \vee x_2)x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, 5) $x_6(x_4(x_1 \vee x_2) \vee x_3x_5)$, 6) $x_6(x_4 \vee (x_1 \vee x_2)x_3x_5)$, 7) $x_1x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, 8) $x_3 \vee x_1x_4(x_5 \vee x_6)$, 9) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_1x_6)$, 10) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_1x_6)$, 11) $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, 12) $x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2)(x_5 \vee x_6)$, 13) $x_3 \vee x_4(x_5(x_1 \vee x_2) \vee x_6)$, 14) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6(x_1 \vee x_2))$, 15) $x_1x_2x_3 \vee x_4x_6$, 16) $(x_1 \vee x_5)x_2x_3 \vee x_4x_6$, 17) $(x_1x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, 18) $((x_1 \vee x_5)x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$.

Соответственно нужно проверить на слабоповторность в B функции $h_1 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee yx_1x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, $h_2 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_1x_4 \vee x_3x_5)$, $h_3 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_4 \vee x_1x_3x_5)$, $h_4 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_1 \vee x_2)x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, $h_5 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_4(x_1 \vee x_2) \vee x_3x_5)$, $h_6 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_4 \vee (x_1 \vee x_2)x_3x_5)$, $h_7 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6))$, $h_8 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_1x_4(x_5 \vee x_6))$, $h_9 = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_1x_6))$, $h_{10} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_1x_6))$, $h_{11} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y((x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6))$, $h_{12} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2)(x_5 \vee x_6))$, $h_{13} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5(x_1 \vee x_2) \vee x_6))$, $h_{14} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6(x_1 \vee x_2)))$, $h_{15} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_2x_3 \vee x_4x_6)$, $h_{16} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y((x_1 \vee x_5)x_2x_3 \vee x_4x_6)$, $h_{17} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, $h_{18} = \bar{y}x_1g(x_2, \ldots, x_6) \vee y((x_1 \vee x_5)x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$.

Остаточная функция ${h_1}^0_{x_1}$ равна нулю, поэтому она разделима по теореме 2. Остаточные функции ${h_2}^{1\,1\,0\,1}_{x_2x_3x_4x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_5$, ${h_3}^{1\,1\,0\,1}_{x_2x_3x_5x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$, ${h_4}^{1\,1\,0\,1}_{x_2x_3x_5x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$, ${h_5}^{1\,1\,0\,1}_{x_2x_3x_5x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$, ${h_6}^{1\,1\,0\,1}_{x_2x_3x_5x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_4$, ${h_7}^{1\,1}_{x_2x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4) \vee (x_1x_3 \vee x_4)$, ${h_8}^{1\,1}_{x_2x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4) \vee (x_3 \vee x_1x_4)$, ${h_9}^{1\,1\,0}_{x_2x_4x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_5) \vee (x_3 \vee x_1x_5)$, ${h_{10}}^{1\,0\,1}_{x_2x_3x_4} = \bar{y}x_1(x_5 \vee x_6) \vee (x_5 \vee x_1x_6)$, ${h_{11}}^{0\,1\,1}_{x_2x_5x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4) \vee (x_1x_3 \vee x_4)$, ${h_{12}}^{0\,1\,1}_{x_2x_5x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4) \vee (x_3 \vee x_1x_4)$,

${h_{13}}^{0\,1\,1\,0}_{x_3x_4x_5x_6} = \bar{y}x_1x_2 \vee y(x_1 \vee x_2)$, ${h_{15}}^{1\,1\,1}_{x_2x_5x_6} = \bar{y}x_1(x_3 \vee x_4) \vee (x_1x_3 \vee x_4)$, ${h_{16}}^{1\,0\,1\,1}_{x_3x_4x_5x_6} = \bar{y}x_1 \vee yx_2$, ${h_{17}}^{1\,1}_{x_3x_5} = \bar{y}x_1(x_2 \vee x_6) \vee (x_1x_2 \vee x_6)$, ${h_{18}}^{1\,1\,0}_{x_3x_4x_5} = \bar{y}x_1(x_2 \vee x_6) \vee (x_1x_2 \vee x_6)$ повторны в B.

$h_{14} = \bar{y}x_1g(x_2,\ldots,x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6(x_1 \vee x_2)))$ — функция второго типа из леммы 9.

Пусть $h^0_y = g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6)$. Тогда $h = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yt(x_1, \ldots, x_6)$. Переменные x_1 и x_2 одновременно не фиктивны в t, иначе h будет разделимой.

Пусть x_2 существенна, а x_1 фиктивна в t. Рассмотрим остаточную функцию $h^1_{x_1} = \bar{y}g(x_2, \ldots, x_6) \vee yt(x_2, \ldots, x_6)$. По лемме 8 функция t должна быть равна остаточной подфункции функции $g(x_2, \ldots, x_6)$. В этом случае $(h^1_{x_2})^1_y$ не будет остаточной подфункцией функции $g(x_1, x_3, x_4, x_5, x_6)$ или константой, что невозможно.

Пусть теперь x_1 и x_2 существенны в t. Рассмотрим остаточные функции $h^1_{x_1} = \bar{y}g(x_2, \ldots, x_6) \vee yt^1_{x_1}$ и $h^1_{x_2} = \bar{y}g(x_1, x_3, \ldots, x_6) \vee yt^1_{x_2}$. Остаточная функция $t^1_{x_1}$ по лемме 8 равна одной из следующих функций: 1) константе, 2) $x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, 3) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, 4) $x_3(x_2 \vee x_5x_6)$, 5) $x_6 \vee x_2(x_3 \vee x_5)$, 6) $x_2x_3 \vee x_4x_6$, 7) $(x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, 8) $x_2(x_3 \vee x_4x_5)$, 9) $x_4 \vee x_3(x_2 \vee x_5)$, 10) $x_4(x_2x_5 \vee x_6)$, 11) $x_2 \vee x_6(x_4 \vee x_5)$. Остаточная функция $t^1_{x_2}$ равна одной из следующих функций: 1) константа, 2) $x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, 3) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, 4) $x_3(x_1 \vee x_5x_6)$, 5) $x_6 \vee x_1(x_3 \vee x_5)$, 6) $x_1x_3 \vee x_4x_6$, 7) $(x_1 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, 8) $x_1(x_3 \vee x_4x_5)$, 9) $x_4 \vee x_3(x_1 \vee x_5)$, 10) $x_4(x_1x_5 \vee x_6)$, 11) $x_1 \vee x_6(x_4 \vee x_5)$.

Пусть $t^1_{x_1}$ и $t^1_{x_2}$ — неконстанты одновременно. Так как переменные x_1 и x_2 симметричны в h^0_y, для определенности считаем, что $t^1_{x_1}$ — неконстанта.

На примере разберем способ рассмотрения возможных вариантов для функции t.

Пусть $t^1_{x_1} = x_6(x_4 \vee x_3x_5)$. Известно, что функция t бесповторна в B_0 и в ее нормальном представлении отсутствуют отрицания. Учитывая вид остаточной функции $t^1_{x_1}$, можно построить следующие функции, возможные в качестве функции t: $x_1x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, $x_6(x_1x_4 \vee x_3x_5)$, $x_6(x_4 \vee x_1x_3x_5)$, $(x_1 \vee x_2)x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, $x_6((x_1 \vee x_2)x_4 \vee x_3x_5)$, $x_6(x_4 \vee (x_1 \vee x_2)x_3x_5)$.

Так как известно, каким функциям может быть равна остаточная функция $t^1_{x_2}$, остаются 3 последних функции. Таким образом, действуя описанным выше способом, получим следующие функции: 1) $x_3(x_1x_2 \vee x_5x_6)$, 2) $x_6 \vee x_1x_2(x_3 \vee x_5)$, 3) $x_1x_2x_3 \vee x_4x_6$, 4) $(x_1x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, 5) $x_1x_2(x_3 \vee x_4x_5)$, 6) $x_4 \vee x_3(x_1x_2 \vee x_5)$, 7) $x_4(x_1x_2x_5 \vee x_6)$, 8) $x_1x_2 \vee x_6(x_4 \vee x_5)$, 9) $(x_1 \vee x_2)x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, 10) $x_6(x_4(x_1 \vee x_2) \vee x_3x_5)$, 11) $x_6(x_4 \vee (x_1 \vee x_2)x_3x_5)$, 12) $x_3(x_1 \vee x_2) \vee x_4(x_5 \vee x_6)$, 13) $x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2)(x_5 \vee x_6)$, 14) $x_3 \vee x_4(x_5(x_1 \vee x_2) \vee x_6)$, 15) $x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6(x_1 \vee x_2))$.

Пусть $t^1_{x_1}$ и $t^1_{x_2}$ — константы. Функция t бесповторна в B_0 и неконстанта. Так как $t^1_{x_1}$ — константа, т. е. несущественна, то переменная x_2 существенна в $t^0_{x_1}$. Отсюда следует, что остаточная функция $h^0_{x_1} = \bar{y}x_6(x_4 \vee x_3x_5) \vee yt^0_{x_1}$ бесповторна в B_0. Поэтому по лемме 2 найдется константа σ такая, что $t^{0\ \sigma}_{x_1 x_2} = x_6(x_4 \vee x_3x_5)$. Учитывая, что $t^1_{x_2}$ — константа, для функции t возможен еще один вариант: 16) $x_1 \vee x_2 \vee x_6(x_4 \vee x_3x_5)$.

Таким образом, нужно проверить на слабоповторность в B функции $h_1 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yx_3(x_1x_2 \vee x_5x_6)$, $h_2 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_6 \vee x_1x_2(x_3 \vee x_5))$, $h_3 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_2x_3 \vee x_4x_6)$, $h_4 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_2 \vee x_6)(x_3 \vee x_4)$, $h_5 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yx_1x_2(x_3 \vee x_4x_5)$, $h_6 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_4 \vee x_3(x_1x_2 \vee x_5))$, $h_7 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yx_4(x_1x_2x_5 \vee x_6)$, $h_8 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_1x_2 \vee x_6(x_4 \vee x_5))$, $h_9 = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_1 \vee x_2)x_6(x_4 \vee x_3x_5)$, $h_{10} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_4(x_1 \vee x_2) \vee x_3x_5)$, $h_{11} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee yx_6(x_4 \vee (x_1 \vee x_2)x_3x_5)$, $h_{12} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_3(x_1 \vee x_2) \vee x_4(x_5 \vee x_6))$, $h_{13} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2)(x_5 \vee x_6))$, $h_{14} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5(x_1 \vee x_2) \vee x_6))$, $h_{15} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_3 \vee x_4(x_5 \vee x_6(x_1 \vee x_2)))$, $h_{16} = \bar{y}g(x_1x_2, x_3, \ldots, x_6) \vee y(x_1 \vee x_2 \vee x_6(x_4 \vee x_3x_5))$.

Функции $h_1, \ldots, h_8$ бесповторны в B по лемме 7, а для каждой h_i, где $9 \leqslant i \leqslant 16$, найдутся переменная x_k и константа τ такие, что остаточные функции $h_{i\,x_k\,y}^{\ \tau\ 0}$ и $h_{i\,x_k\,y}^{\ \tau\ 1}$ существенны и бесповторны в B_0 и имеют подформулы x_1x_2 и $x_1 \vee x_2$ соответственно, что невозможно.

Аналогично рассматривается случай $h^0_y = g(x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_6)$.

Нахождение слабоповторных функций ранга 7 завершено.

Перейдем к отысканию слабоповторных функций ранга более 7. По теореме 7 любая слабоповторная функция однотипна с одной из следующих функций: $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{5-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \cdots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k), x_1, \ldots, x_{5-k})$, где $p(1, y_1, \ldots, y_5) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_5})$, и $h(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}) = t(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}))$, где функция $t(x_1, \ldots, x_k, z_1, z_2)$ такова, что для любого $i \leqslant k$ переменная z_1 фиктивна в остаточной функции $t^0_{x_i}$, а z_2 — в остаточной функции $t^1_{x_i}$.

Пусть $h(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k, x_1, \ldots, x_{5-k}) = p((\vee\tilde{u}_1) \vee \cdots \vee (\vee\tilde{u}_k), (\&\tilde{u}_1), \ldots, (\&\tilde{u}_k), x_1, \ldots, x_{5-k})$, где $p(1, y_1, \ldots, y_5) = g(y_{i_1}, \ldots, y_{i_5})$. Рассмотрим все случаи для k, $1 \leqslant k \leqslant 5$.

Пусть $k = 1$. Среди переменных из $\tilde{u}$ выделим переменную y и выполним разложение по этой переменной. Функция $h(\tilde{u}, x_1, x_2, x_3, x_4) = yp(1, \&\tilde{u}, x_1, \ldots, x_4) \vee \bar{y}p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, \ldots, x_4)$. Остаточная функция $h^0_y = p(\vee\tilde{u}, 0, x_1, \ldots, x_4) = (\overline{\vee\tilde{u}})p(0, 0, x_1, \ldots, x_4) \vee (\vee\tilde{u})p(1, 0, x_1, \ldots, x_4) = (\vee\tilde{u})p(1, 0, x_1, \ldots, x_4) \vee (\overline{\vee\tilde{u}})t(x_1, \ldots, x_4)$.

Из свойства 1 функции g достаточно рассмотреть два случая: остаточная функция $h^1_y = p(1, \&\tilde{u}, x_1, \ldots, x_4) = g(\&\tilde{u}, x_1, \ldots, x_4)$, т. е.

$p(1,0,x_1,\dots,x_4) = x_4(x_2 \vee x_1x_3)$, и $h_y^1 = p(1,\&\tilde{u},x_1,\dots,x_4) = g(x_1,x_2,x_3,\&\tilde{u},x_4)$, т. е. $p(1,0,x_1,\dots,x_4) = x_1x_2 \vee x_3x_4$.

Рассмотрим первый случай. Имеем $h_y^0 = p(\vee\tilde{u},0,x_1,\dots,x_4) = (\vee\tilde{u})x_4(x_2 \vee x_1x_3) \vee (\overline{\vee\tilde{u}})t(x_1,\dots,x_4)$. Среди переменных из $\tilde{u}$ выбрав переменную z, имеем $\tilde{u} = \tilde{u}^* \cup z$. Учитывая, что функция $(h_y^0)_{\tilde{u}^*}^{\tilde{0}} = zx_4(x_2 \vee x_1x_3) \vee \bar{z}t(x_1,\dots,x_4)$ должна быть бесповторна в B, вид остаточных подфункций функции g и лемму 2, функция t может быть равна одной из следующих функций: a) константе, b) x_4, c) $x_2 \vee x_1x_3$, d) $x_4(x_2 \vee x_1x_3)$, e) x_2x_4, f) $x_1x_3x_4$, g) $x_1 \vee x_2(x_3 \vee x_4)$, h) $x_3 \vee x_2(x_1 \vee x_4)$.

Рассмотрим все варианты.

a) $t = 1$. Тогда $h_y^0 = p(\vee\tilde{u},0,x_1,\dots,x_4) = x_4(x_2 \vee x_1x_3) \vee (\overline{\vee\tilde{u}})$. Остаточные подфункции функции $h_{x_4}^1$ по y содержат переменные из $\tilde{u}$ в разных степенях, что противоречит лемме 5.

$t = 0$. Функция $h = \bar{y}g(\&\tilde{u},x_1,\dots,x_4) \vee y(\vee\tilde{u})x_4(x_2 \vee x_1x_3)$. Остаточная функция $h_{x_1x_2}^{1\,1} = \bar{y}(x_4 \vee (\&\tilde{u})) \vee y(\vee\tilde{u})x_4 = x_4(\bar{y} \vee (\vee\tilde{u})) \vee \bar{y}(\&\tilde{u})$ повторна в B.

b) $t = x_4$. Аналогично случаю $t = 1$.

c) $t = x_2 \vee x_1x_3$. Тогда $h_y^0 = (x_2 \vee x_1x_3)(x_4 \vee (\overline{\vee\tilde{u}}))$. Остаточные подфункции функции $h_{x_4}^0$ по y содержат переменные $\tilde{u}$ в разных степенях, противоречие.

d) $t = x_4(x_2 \vee x_1x_3)$. Функция h бесповторна в B по лемме 7.

e) $t = x_2x_4$. Тогда $h_y^0 = x_4x_2 \vee (\vee\tilde{u})x_4x_1x_3 = x_4(x_2 \vee (\vee\tilde{u})x_1x_3)$. Функция $h = yg(\&\tilde{u},x_1,\dots,x_4) \vee \bar{y}x_4(x_2 \vee (\vee\tilde{u})x_1x_3)$. Остаточная функция $h_{x_1x_2}^{1\,0} = x_3x_4(y \vee (\vee\tilde{u})) \vee y(\&\tilde{u})$ повторна в B.

f) $t = x_1x_3x_4$. Тогда $h_y^0 = (\vee\tilde{u})x_2x_4 \vee x_1x_3x_4 = x_4((\vee\tilde{u})x_2 \vee x_1x_3)$. Функция $h = yg(\&\tilde{u},x_1,\dots,x_4) \vee \bar{y}x_4((\vee\tilde{u})x_2 \vee x_1x_3)$. Остаточная функция $h_{x_1x_3}^{1\,0} = x_2x_4(y \vee (\vee\tilde{u})) \vee y(\&\tilde{u})$ повторна в B.

g) $t = x_1 \vee x_2(x_3 \vee x_4)$. Тогда $h_y^0 = g((\overline{\vee\tilde{u}}),x_1,\dots,x_4)$. Для любой переменной x_i и константы τ остаточные подфункции функции $h_{x_i}^\tau$ по y содержат переменные из $\tilde{u}$ в разных степенях.

h) $t = x_3 \vee x_2(x_1 \vee x_4)$. Аналогично случаю $t = x_1 \vee x_2(x_3 \vee x_4)$.

Рассмотрим второй случай, т. е. $h_y^1 = p(1,\&\tilde{u},x_1,\dots,x_4) = g(x_1,x_2,x_3,\&\tilde{u},x_4)$. Тогда $h_y^0 = p(\vee\tilde{u},0,x_1,\dots,x_4) = (\vee\tilde{u})(x_1x_2 \vee x_3x_4) \vee (\overline{\vee\tilde{u}})t(x_1,\dots,x_4)$. Так как остаточная функция h_y^0 бесповторна в B, функция t может быть равна одной из следующих функций: a) константе, b) x_1x_2, c) x_3x_4, d) $x_1x_2 \vee x_3x_4$, e) $x_1 \vee x_3x_4$, f) $x_1x_2 \vee x_3$, g) $x_2 \vee x_3x_4$, h) $x_1x_2 \vee x_4$, i) $(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)$, j) $(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_4)$.

Рассмотрим все варианты.

a) $t = 1$. $h_y^0 = x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee (\overline{\vee\tilde{u}})$. Остаточные подфункции функции $h_{x_4}^1$ по y содержат переменные из $\tilde{u}$ в разных степенях, что противоречит лемме 5.

$t = 0$. Функция $h = \bar{y}g(x_1, x_2, x_3, \&\tilde{u}, x_4) \vee y(\vee\tilde{u})(x_1x_2 \vee x_3x_4)$. Остаточная функция $h^{1\ 0\ 1}_{x_1x_2x_3} = \bar{y}((\&\tilde{u}) \vee x_4) \vee y(\vee\tilde{u})x_4$ повторна в B.

b) $t = x_1x_2$. Аналогично случаю $t = 0$.

c) $t = x_3x_4$. Тогда $h^0_y = x_3x_4 \vee (\vee\tilde{u})x_1x_2$. Функция $h = yg(x_1, x_2, x_3, \&\tilde{u}, x_4) \vee \bar{y}(x_3x_4 \vee (\vee\tilde{u})x_1x_2)$. Остаточная функция $h^{1\ 1\ 0}_{x_1x_3x_4} = \bar{y}x_2(\vee\tilde{u}) \vee y(x_2 \vee (\&\tilde{u}))$ повторна в B.

d) $t = x_1x_2 \vee x_3x_4$. Функция h бесповторна в B по лемме 7.

Нетрудно заметить, что в случаях e)–j) имеются переменная x_i и константа τ такие, что остаточные подфункции функции $h^\tau_{x_i}$ по y содержат переменные из $\tilde{u}$ в разных степенях, противоречие.

Пусть $k = 2$. Среди переменных из $\tilde{u}_1$ выделим переменную y и выполним разложение по этой переменной. Тогда $h(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = yp(1, \&\tilde{u}_1, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) \vee \bar{y}p((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2), 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3)$. Остаточная функция $h^0_y = p((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2), 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)}p(0, 0, 0, x_1, x_2, x_3) \vee ((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2))p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = ((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2))p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) \vee \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)}t(x_1, x_2, x_3)$.

Из вида остаточных подфункций функции g следует, что функция $p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3)$ может быть представима одним из следующих видов: 1) $(\&\tilde{u}_2)(x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3})$, 2) $x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3})$, 3) $x_{i_1}(x_{i_2} \vee (\&\tilde{u}_2)x_{i_3})$, 4) $(\&\tilde{u}_2)x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3}$.

Рассмотрим все варианты.

1) $p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = (\&\tilde{u}_2)(x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3})$. Из множества переменных $\tilde{u}_2$ выберем переменную z, тогда $\tilde{u}_2 = \tilde{u}^*_2 \cup z$. Рассмотрим остаточные функции $(h^0_y)^0_z = \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}^*_2)}t$ и $(h^0_y)^1_z = (\&\tilde{u}^*_2)(x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3})$. Они содержат переменные из $\tilde{u}^*_2$ в разных степенях, противоречие.

2) $p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3})$. Из множества переменных $\tilde{u}_1$ выберем переменную z, тогда $\tilde{u}_1 = \tilde{u}^*_1 \cup z$. Остаточная функция $(h^0_y)^{\tilde{0}\ \tilde{0}}_{\tilde{u}^*_1\tilde{u}_2} = \bar{z}t(x_1, x_2, x_3) \vee zx_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$. Отсюда следует, что функция t равна либо константе, либо конъюнкции переменных.

Последовательно рассмотрим все варианты.

a) $t = 0$. Тогда $h^0_y = ((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3}) = x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3}((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)))$. Остаточная функция $(h^0_y)^{1\ 1\ \tilde{0}}_{x_{i_1}x_{i_2}\tilde{u}_1} = x_{i_3}(\vee\tilde{u}_2) \vee (\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

b) $t = 1$. Тогда $h^0_y = x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3}) \vee \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)}$. Остаточная функция $(h^0_y)^{\tilde{0}\ 1\ 0}_{\tilde{u}_1x_{i_1}x_{i_2}} = (\&\tilde{u}_2) \vee (\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

c) $t = x_{i_1}$. Тогда $h^0_y = \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)}x_{i_1} \vee ((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3}) = x_{i_1}(\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)} \vee (\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}x_{i_3})$. Остаточная функция $(h^0_y)^{\tilde{0}\ 1\ 0}_{\tilde{u}_1x_{i_1}x_{i_2}} = (\&\tilde{u}_2) \vee (\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

d) $t = x_{i_2}$. Тогда $h^0_y = \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)}x_{i_2} \vee ((\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee$

$x_{i_2}x_{i_3})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 1\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}} = (\&\tilde{u}_2)\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

e) $t = x_{i_3}$. Аналогично случаю $t = x_{i_2}$.

f) $t = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = \overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} \vee ((\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2)\vee x_{i_2}x_{i_3}) = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\vee x_{i_1}(\&\tilde{u}_2) = x_{i_1}((\&\tilde{u}_2)\vee x_{i_2}x_{i_3})$. Функция h бесповторна в B по лемме 7.

g) $t = x_{i_1}x_{i_2}$. Тогда $h_y^0 = \overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}x_{i_1}x_{i_2} \vee ((\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2)\vee x_{i_2}x_{i_3})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 1\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}} = (\&\tilde{u}_2)\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

h) $t = x_{i_2}x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = \overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}x_{i_2}x_{i_3} \vee ((\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2))x_{i_1}((\&\tilde{u}_2)\vee x_{i_2}x_{i_3})$.

Выберем из множества переменных $\tilde{u}_2$ переменную z. Тогда $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2^*\cup z$. В остаточных функциях $(h_y^0)^0_z = x_{i_2}x_{i_3}(\overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2^*)}\vee x_{i_1})$ и $(h_y^0)^1_z = x_{i_1}((\&\tilde{u}_2^*)\vee x_{i_2}x_{i_3})$ переменные из $\tilde{u}_2^*$ содержатся в разных степенях, противоречие.

i) $t = x_{i_1}x_{i_3}$. Аналогично случаю $t = x_{i_1}x_{i_2}$.

3) $p(1,0,\&\tilde{u}_2,x_1,x_2,x_3) = x_{i_1}(x_{i_2}\vee(\&\tilde{u}_2)x_{i_3})$. Из множества переменных $\tilde{u}_1$ выберем переменную z. Тогда $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1^*\cup z$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ \tilde{0}}_{\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2} = \bar{z}t(x_1,x_2,x_3)\vee zx_{i_1}x_{i_2}$ бесповторна в B_0. Поэтому функция t равна одной из следующих функций: a) константе, b) x_{i_1}, c) x_{i_2}, d) $x_{i_1}x_{i_2}$, e) $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$, f) $x_{i_1}x_{i_2}\vee x_{i_3}$, g) $x_{i_1}(x_{i_2}\vee x_{i_3})$, h) $x_{i_2}(x_{i_1}\vee x_{i_3})$.

Рассмотрим все варианты.

a) $t = 1$. Тогда $h_y^0 = \overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}\vee x_{i_1}(x_{i_2}\vee(\&\tilde{u}_2)x_{i_3})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 0\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}} = (\&\tilde{u}_2)\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

$t = 0$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}(x_{i_2}((\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2))\vee x_{i_3}(\&\tilde{u}_2))$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_3}} = x_{i_2}(\vee\tilde{u}_2)\vee(\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

b) $t = x_{i_1}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}(\overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}\vee x_{i_2}\vee(\&\tilde{u}_2)x_{i_3})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 0\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}} = (\&\tilde{u}_2)\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

c) $t = x_{i_2}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}(\overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}\vee x_{i_1})\vee x_{i_1}x_{i_3}(\&\tilde{u}_2)$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_3}} = x_{i_2}(x_{i_1}\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2}))\vee x_{i_1}(\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

d) $t = x_{i_1}x_{i_2}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}(x_{i_2}\vee(\&\tilde{u}_2)x_{i_3})$. Функция h бесповторна в B по лемме 7.

e) $t = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}(x_{i_2}(x_{i_3}\vee((\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)))\vee x_{i_3}(\&\tilde{u}_2))$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1}} = x_{i_2}(x_{i_3}\vee(\vee\tilde{u}_2))\vee x_{i_3}(\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

f) $t = x_{i_1}x_{i_2}\vee x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}x_{i_2}\vee\overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)}x_{i_3}\vee x_{i_1}x_{i_3}(\&\tilde{u}_2)$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 0\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}} = (\overline{\vee\tilde{u}_2})\vee(\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

g) $t = x_{i_1}(x_{i_2}\vee x_{i_3})$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}x_{i_2}\vee x_{i_1}x_{i_3}((\&\tilde{u}_2)\vee\overline{(\vee\tilde{u}_1)\vee(\vee\tilde{u}_2)})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{0\ 1\ 1\ \tilde{0}}_{x_{i_2} x_{i_3} x_{i_1} \tilde{u}_1} = (\&\tilde{u}_2)\vee(\overline{\vee\tilde{u}_2})$ повторна в B.

h) $t = x_{i_2}(x_{i_1} \vee x_{i_3})$. Тогда $h_y^0 = x_{i_1}x_{i_2} \vee x_{i_3}(x_{i_1}(\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{1\ \tilde{0}}_{x_{i_3}\tilde{u}_1} = x_{i_1}(x_{i_2} \vee (\&\tilde{u}_2)) \vee x_{i_2}\overline{(\vee\tilde{u}_2)}$ повторна в B.

4) $p(1, 0, \&\tilde{u}_2, x_1, x_2, x_3) = (\&\tilde{u}_2)x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3}$. Из множества переменных $\tilde{u}_1$ выберем переменную z. Тогда $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1^* \cup z$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ \tilde{0}}_{\tilde{u}_1^*\tilde{u}_2} = \bar{z}t(x_1, x_2, x_3) \vee zx_{i_2}x_{i_3}$ бесповторна в B_0. Поэтому функция t равна одной из следующих функций: a) константе, b) x_{i_2}, c) x_{i_3}, d) $x_{i_2}x_{i_3}$, e) $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$, f) $x_{i_2}x_{i_3} \vee x_{i_1}$, g) $x_{i_2}(x_{i_1} \vee x_{i_3})$, h) $x_{i_3}(x_{i_1} \vee x_{i_2})$.

Рассмотрим все варианты.

a) $t = 1$. Тогда $h_y^0 = \overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)} \vee ((\&\tilde{u}_2)x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 0}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2}} = (\overline{\vee\tilde{u}_2}) \vee (\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

$t = 0$. Тогда $h_y^0 = (\&\tilde{u}_2)x_{i_1} \vee x_{i_2}x_{i_3}(\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_3}} = x_{i_2}(\vee\tilde{u}_2) \vee (\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

b) $t = x_{i_2}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}(\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)} \vee x_{i_3}) \vee (\&\tilde{u}_2)x_{i_1}$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_1}} = x_{i_2}(x_{i_3} \vee (\overline{\vee\tilde{u}_2})) \vee (\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

c) $t = x_{i_3}$. Аналогично случаю $t = x_{i_2}$.

d) $t = x_{i_2}x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}x_{i_3} \vee (\&\tilde{u}_2)x_{i_1}$. Функция h бесповторна в B по лемме 7.

e) $t = x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}x_{i_3}(x_{i_1} \vee (\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)) \vee (\&\tilde{u}_2)x_{i_1}$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1}_{\tilde{u}_1 x_{i_3}} = x_{i_2}(x_{i_1} \vee (\vee\tilde{u}_2)) \vee x_{i_1}(\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

f) $t = x_{i_2}x_{i_3} \vee x_{i_1}$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}x_{i_3} \vee x_{i_1}(\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)} \vee (\&\tilde{u}_2))$. Остаточная функция $(h_y^0)^{\tilde{0}\ 1\ 0}_{\tilde{u}_1 x_{i_1} x_{i_2}} = (\overline{\vee\tilde{u}_2}) \vee (\&\tilde{u}_2)$ повторна в B.

g) $t = x_{i_2}(x_{i_1} \vee x_{i_3})$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}x_{i_3} \vee x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_2}\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{1\ 1\ 0\ \tilde{0}}_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \tilde{u}_1} = (\&\tilde{u}_2) \vee \overline{(\vee\tilde{u}_2)}$ повторна в B.

h) $t = x_{i_3}(x_{i_1} \vee x_{i_2})$. Тогда $h_y^0 = x_{i_2}x_{i_3} \vee x_{i_1}((\&\tilde{u}_2) \vee x_{i_3}\overline{(\vee\tilde{u}_1) \vee (\vee\tilde{u}_2)})$. Остаточная функция $(h_y^0)^{1\ 0\ 1\ \tilde{0}}_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \tilde{u}_1} = (\&\tilde{u}_2) \vee \overline{(\vee\tilde{u}_2)}$ повторна в B.

Аналогично доказывается лемма для $k = 3, 4$ и 5.

Рассмотрим случай, когда слабоповторная функция ранга больше 7 однотипна с функцией $h(y, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}) = t(y, x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}), s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}))$. Выполним разложение по переменной y. Тогда функция $h = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5})) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, s(x_{k+1}, \ldots, x_{k+5}))$, где функция $t_1(x_1, \ldots, x_k, z)$ такова, что при любом i в остаточной функции $t^1_{x_i}$ фиктивна z, а $t_2(x_1, \ldots, x_k, z)$ такова, что при любом i в остаточной функции $t^0_{x_i}$ фиктивна z.

Очевидно, что нормальное представление функции s не содержит отрицаний. Функции t_1 и t_2 различны, иначе h не является слабоповторной по теореме 3. По лемме 3 функции t_1 и t_2 либо однотипны с g, либо бесповторны в B_0.

Пусть одна из функций t_1 и t_2 однотипна с g, а другая бесповторна в B_0. Рассмотрим остаточную функцию $h^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}}$. Если s существенна, то $\widetilde{\omega}$ — любая переменная функции s, иначе $\widetilde{\omega}$ — множество всех фиктивных переменных функции s. Тогда всегда найдется набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $g^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}}$ и $s^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}}$ существенны. Получили противоречие с леммой 6.

Пусть t_1 и t_2 однотипны с g. Тогда $(h^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}})^0_y = t_1(x_1, \ldots, x_k, g^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}})$ и $(h^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}})^1_y = t_2(x_1, \ldots, x_k, s^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}})$. Отсюда следует, что либо $h^{\tilde{\alpha}}_{\tilde{\omega}}$ повторна в B, либо $t_1 = t_2$, что невозможно, иначе h разделима по теореме 3.

Таким образом, функции t_1 и t_2 бесповторны в B_0. Функция s либо бесповторна в B_0, либо однотипна с g.

Пусть s бесповторна в B_0. Докажем от противного, что s не имеет фиктивных переменных.

Пусть $\tilde{u}$ — множество всех фиктивных переменных функции s, $|\tilde{u}| > 1$, $\tilde{\tau}$ — набор констант такой, что функция $g^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}}$ существенна. Тогда $(h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}})^0_y$ и $(h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}})^1_y$ существенны и различны. Поэтому $h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}}$ повторна в B_0. Из этого следует, что $h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}}$ повторна в B_0, где $\tilde{v}$ — множество фиктивных переменных функций s, $|\tilde{v}| < |\tilde{u}|$, $h^{\tilde{\tau}}_{\tilde{u}}$ является остаточной подфункцией функции $h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}}$. С другой стороны, $(h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}})^0_y$ и $(h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}})^1_y$ бесповторны в B_0, а $(h^{\tilde{\sigma}}_{\tilde{v}})^1_y$ имеет по крайней мере одну фиктивную переменную, что противоречит лемме 1.

Пусть $|\tilde{u}| = 1$. Обозначим эту фиктивную переменную через x_i. Остаточная функция $h^{\sigma}_{x_j} = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g^{\sigma}_{x_j}) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, s^{\sigma}_{x_j})$, где x_j — существенная переменная функции s и $s^{\sigma}_{x_j}$ — остаточная функция, которая не имеет фиктивных переменных, кроме x_i. Далее рассмотрим остаточную функцию $h^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i} = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i}) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, s^{\sigma}_{x_j})$, где $g^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i}$ существенна. Остаточные функции $(h^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i})^0_y$ и $(h^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i})^1_y$ существенны и различны. Поэтому $h^{\sigma\ \tau}_{x_j x_i}$ повторна в B_0. Отсюда следует, что $h^{\sigma}_{x_j}$ повторна в B_0, что невозможно по лемме 1.

Таким образом, функция s не имеет фиктивных переменных.

Допустим, что имеется переменная x_k такая, что фиктивная остаточная функция $s^{\delta}_{x_k}$ не равна константе. Тогда $h^{\delta}_{x_k} = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g^{\delta}_{x_k}) \vee yt_2(x_1, \ldots, x_k, s^{\delta}_{x_k})$. Пусть $\tilde{v}$ — фиктивные переменные функции $s^{\delta}_{x_k}$. Тогда существует набор $\tilde{\tau}$ такой, что остаточная функция $g^{\delta\ \tilde{\tau}}_{x_k \tilde{v}}$ существенна. Эта функция повторна в B_0, так как остаточные функции $(h^{\delta\ \tilde{\tau}}_{x_k \tilde{v}})^0_y$ и $(h^{\delta\ \tilde{\tau}}_{x_k \tilde{v}})^1_y$ существенны и различны. Поэтому $h^{\delta}_{x_k}$ также повторна в B_0, что противоречит лемме 1.

Таким образом, любая остаточная подфункция функции s либо константа, либо не содержит фиктивных переменных, а ее нормальное представление не содержит отрицаний. Тогда либо $s = x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_{k+5}$, либо $s = x_{k+1} \vee \cdots \vee x_{k+5}$.

Пусть $s = x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_{k+5}$. Тогда функция $h = \bar{y}t_1(x_1, \ldots, x_k, g(x_{k+1},$

$\ldots, x_{k+5}))\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}\cdot\ldots\cdot x_{k+5})$. Остаточная функция $h^{1\ \ 1}_{x_{k+1}x_{k+5}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+2}\vee x_{k+3})\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,x_{k+2}x_{k+3}x_{k+4})$. Так как остаточная функция $h^{1\ \ 1\ \ 1}_{x_{k+1}x_{k+5}x_{k+4}}$ повторна в B_0, функция $h^{1\ \ 1}_{x_{k+1}x_{k+5}}$ также повторна в B_0, что невозможно по лемме 1.

Аналогично доказывается случай $s = x_{k+1}\vee\cdots\vee x_{k+5}$.

Пусть функция s однотипна с функцией g. Тогда $h = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k, g(x_{k+1},\ldots,x_{k+5}))\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,g(x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_{k+5}}))$. Пусть переменная $x_{i_{k+4}}$ в $g(x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_{k+5}})$ отлична от x_{k+4}. Тогда $h^1_{x_{k+4}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k, (x_{k+1}\vee x_{k+5})(x_{k+2}\vee x_{k+3}))\vee\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,x_{j_{k+1}}\vee x_{j_{k+2}}(x_{j_{k+3}}\vee x_{j_{k+4}})$. Остаточная функция $(h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{j_{k+2}}})^0_y$ имеет одну фиктивную переменную, а $(h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{j_{k+2}}})^1_y$ существенна, т. е. по теореме 5 функция $h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{j_{k+2}}}$ бесповторна в B_0. Обозначим фиктивную переменную через x. Тогда имеется константа τ такая, что $h^{1\ \ 1\ \ \tau}_{x_{k+4}x_{j_{k+2}}x}$ повторна в B_0 по лемме 1. Получили противоречие с бесповторностью в B_0 остаточной функции $h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{j_{k+2}}}$.

Пусть $x_{i_{k+4}}$ равна x_{k+4}. Рассмотрим остаточную функцию $h^0_{x_{k+4}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1}x_{k+2}\vee x_{k+3}x_{k+5})\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,x_{i_{k+1}}x_{i_{k+2}}\vee x_{i_{k+3}}x_{i_{k+5}})$. Пусть функции $x_{k+1}x_{k+2}\vee x_{k+3}x_{k+5}$ и $x_{i_{k+1}}x_{i_{k+2}}\vee x_{i_{k+3}}x_{i_{k+5}}$ равны. Тогда либо равны $g(x_{k+1},\ldots,x_{k+5})$ и $g(x_{i_{k+1}},\ldots,x_{i_{k+5}})$, что невозможно по теореме 3, либо $h = \bar{y}t_1(x_1,\ldots,x_k,g(x_{k+1},\ldots,x_{k+5}))\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k, g(x_{k+1},x_{k+2},x_{k+5},x_{k+4},x_{k+3}))$. Остаточная функция $h^1_{x_{k+4}} = \bar{y}t_1(x_1,\ldots, x_k,(x_{k+1}\vee x_{k+5})(x_{k+2}\vee x_{k+3}))\vee yt_2(x_1,\ldots,x_k,(x_{k+1}\vee x_{k+3})(x_{k+2}\vee x_{k+5}))$. Остаточные функции $(h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{k+1}})^0_y$ и $(h^{1\ \ 1}_{x_{k+4}x_{k+1}})^1_y$ имеют по одной фиктивной переменной, причем эти переменные различны, что невозможно по лемме 1 и теореме 5.

Пусть функции $x_{k+1}x_{k+2}\vee x_{k+3}x_{k+5}$ и $x_{i_{k+1}}x_{i_{k+2}}\vee x_{i_{k+3}}x_{i_{k+5}}$ различны. Остаточные функции $(h^{0\ \ 0}_{x_{k+4}x_{k+1}})^0_y$ и $(h^{0\ \ 0}_{x_{k+4}x_{k+1}})^1_y$ имеют по одной различной фиктивной переменной, что невозможно по лемме 1 и теореме 5. Лемма 9 доказана.

Объединив лемму 9 и теорему 4, получим следующее утверждение.

Теорема 8. *Система булевых функций*

$$\begin{aligned}
&x_1(x_2\vee x_3)\vee x_3x_4, \\
&x_1(x_2\vee\cdots\vee x_n)\vee x_2\cdot\ldots\cdot x_n, && n\geqslant 3, \\
&x_1(x_2\vee x_3\cdot\ldots\cdot x_n)\vee x_2\cdot\bar{x}_3\cdot\ldots\cdot\bar{x}_n, && n\geqslant 3, \\
&x_1\cdot\ldots\cdot x_n\vee\bar{x}_1\cdot\ldots\cdot\bar{x}_n, && n\geqslant 2, \\
&\bar{x}_1g(x_2,\ldots,x_6)\vee x_1x_5(x_2x_4\vee x_3x_6), \\
&\bar{x}_1x_2g(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)\vee x_1(x_4\vee x_5(x_6\vee x_7(x_2\vee x_3))),
\end{aligned}$$

является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в базисе $B = B_0\cup\{g\}$, *где* $g(x_1,\ldots,x_5) = x_1(x_2\vee x_3x_4)\vee x_5(x_3\vee x_2x_4)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кириченко К. Д.** Слабоповторные булевы функции в некоторых предэлементарных базисах // Дискретная математика и информатика. Вып. 13. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2000.
2. **Кириченко К. Д.** Слабоповторные булевы функции в небинарных базисах // Дискретная математика и информатика. Вып. 14. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2000.
3. **Кузнецов А. В.** О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 186–225. (Труды Математического института им. В. А. Стеклова; Т. 51).
4. **Перязев Н. А.** Сложность представлений булевых функций формулами в немонолинейных базисах // Дискретная математика и информатика. Вып. 2. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995.
5. **Перязев Н. А.** Слабоповторные булевы функции в бинарном базисе // Дискретная математика и информатика. Вып. 4. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1998.
6. **Перязев Н. А.** Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 1999.
7. **Стеценко В. А.** О предплохих базисах в P_2 // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Наука, 1992. С. 139–177.
8. **Субботовская Б. А.** О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // Докл. АН СССР, 1963. Т. 149, № 4. С. 784–787.
9. **Черухин Д. Ю.** Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. М.: Наука, 1999. С. 77–122.

Адрес автора:

Иркутский
государственный университет,
Институт математики
и экономики, ул. К. Маркса, 1,
664003 Иркутск, Россия.
E-mail: goran5@mail.ru

Статья поступила
25 июня 2002 г.,
переработанный вариант —
11 марта 2003 г.