ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2003. Серия 1. Том 10, № 3, 3–11

УДК 519.17

ПРОДОЛЖЕНИЕ 3-РАСКРАСКИ С 6-ГРАНИ НА ПЛОСКИЙ ГРАФ БЕЗ 3-ЦИКЛОВ*)

В. А. Аксёнов, О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Получены необходимые и достаточные условия продолжаемости правильной 3-раскраски вершин некоторой 6-грани до правильной 3-раскраски вершин плоского графа без циклов длины 3.

§ 1. Определения и известные результаты

При доказательстве ряда свойств вершинно 3-раскрашиваемых плоских графов были использованы условия продолжаемости 3-раскраски с некоторой части (например, вершин грани [1]–[3]) на весь граф. Как правило, доказательства этих свойств составляют основную трудность. Можно надеяться, что свойство продолжаемости раскраски с некоторой части графа на весь граф может представлять самостоятельный интерес.

Напомним несколько обозначений и определений. Пусть $m(G)$ и $n(G)$ — число ребер и вершин в графе G, $t(G)$ — число циклов длины 3 в графе G, $d(x)$ — степень вершины x, i-грань — грань с i граничными ребрами (мосты засчитываются дважды) и i-цикл — простой цикл с i ребрами. При фиксированном плоском представлении связного графа G пусть $f(G)$ обозначает число граней, а $f_i(G)$ — число i-граней. Пусть P — цикл в заданном представлении графа G. Тогда через $\mathrm{int}(P)$ и $\mathrm{ext}(P)$ соответственно будем обозначать подграфы в G, порожденные вершинами внутренней и внешней компонент цикла P в графе G (включая вершины цикла). Цикл P назовем *разделяющим,* если множества $\mathrm{int}(P) - P$ и $\mathrm{ext}(P) - P$ непусты.

*)Исследования первого и третьего авторов выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00039) и голландско-российской программы NWO (грант 047-008-006), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00796) и INTAS (грант 97-1001).

Пусть в плоском графе 5-грань F имеет общее ребро с 3-циклом T (рис. 1). Раскраску вершин 5-грани F, при которой три вершины x_1, x_2 (общие для F и T) и вершина x_3, противоположная ребру (x_1, x_2) в F, окрашены в разные цвета, будем называть *специальной*.

Будем называть i-грань P $(i > 4)$, на которой задана 3-раскраска, *отделенной* от грани S, если существует такой 4-цикл Q, что P и S лежат в разных компонентах Q. В этом случае Q будем называть *отделяющим* 4-циклом. При доказательстве основного результата этой статьи будут использованы ранее доказанные теоремы, описывающие условия продолжаемости 3-раскраски с вершин 4- и 5-граней.

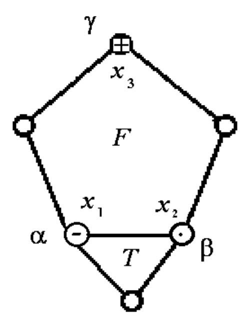

Рис. 1

Теорема 1 [2, 4]. *Пусть G — плоский граф и $t(G) < 2$. Тогда любую правильную 3-раскраску вершин 4-грани можно продолжить на весь граф.*

Теорема 2. *Пусть G — плоский граф и $t(G) < 2$. Правильную 3-раскраску вершин 5-грани F нельзя продолжить на весь граф тогда и только тогда, когда раскраска грани F является специальной $(t(G) = 1)$ и каждая i-грань $(i > 4)$, отличная от F, имеет отделяющий 4-цикл.*

Теорема 2 легко следует из полного описания случаев непродолжаемости 3-раскраски вершин 5-грани на весь граф, в котором $t(G) = 1$ и $f_i(G) = 0$ при $i > 5$, установленного в [1]:

Теорема 3 [1]. *Пусть G — плоский граф, $t(G) < 2$ и $f_i(G) = 0$ при $i > 5$. Правильную 3-раскраску вершин 5-грани F нельзя продолжить на весь граф тогда и только тогда, когда раскраска грани F специальная $(t(G) = 1)$ и каждая 5-грань, отличная от F, имеет отделяющий 4-цикл.*

Чтобы вывести теорему 2 из теоремы 3 рассмотрим произвольный плоский граф G, удовлетворяющий условиям теоремы 2, т. е. такой, что $t(G) < 2$ и на вершинах 5-грани F задана 3-раскраска. Построим плоский граф G^*, содержащий G в качестве подграфа, такой, что $f_i(G^*) = 0$ при $i > 5$. При этом будем следить за тем, чтобы в G^* не было циклов длины 3 и 4, не принадлежащих G.

Пусть в G имеется m-грань P $(m > 5)$, ограниченная циклом $C_P = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Если в цикле C_P есть хотя бы одна хорда, то рассмотрим в G кратчайший цикл C, образованный хордой (x_i, x_j) и одной из x_i-x_j-цепей цикла C_P. Не теряя общности, будем считать, что $C = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Из свойств плоской укладки G и минимальности цикла

C следует, что в C_P нет хорд с концами в вершинах x_i, где $1 < i < k$.

Пусть $k = 3$, т. е. C является 3-циклом. Добавим к G вершину y_2, смежную с x_2 и x_5 и расположенную внутри грани P. Поскольку в G нет ребра (x_2, x_5), полученный граф G_2 не содержит новых 3-циклов. Предположим, что в G_2 есть новый 4-цикл. Из-за наличия в G ребра (x_1, x_3) таким циклом может являться только (y_1, x_2, x_3, x_5) или (y_1, x_2, x_1, x_5). В первом случае в G имеются два 3-цикла (x_1, x_2, x_3) и (x_3, x_4, x_5), что противоречит условию $t(G) < 2$. Во втором случае из существования в G ребра (x_1, x_5) следует, что в C_P нет хорд (x_2, x_{m-1}) и (x_3, x_{m-1}). Это означает, что в графе G_3, полученном добавлением к G вершины y_3, смежной с x_2 и x_{m-1}, нет новых 3- и 4-цикллов. Остается заметить, что в любом из построенных графов G_i, $i = 2, 3$, вместо m-грани P имеются 5-грань и $(m-1)$-грань, лежащие внутри цикла C_P.

Пусть $k > 3$. Из минимальности цикла C и сделанных выше замечаний следует, что в C_P отсутствуют хорды (x_2, x_{m-1}), (x_1, x_{m-1}) и (x_2, x_k). Поэтому определенный ранее граф G_3 вновь не содержит циклов длины 3 и 4, проходящих через вершину y_3.

Наконец, рассмотрим случай, когда цикл C_P не имеет хорд. Очевидно, что в графе G_2 не может быть новых 3-циклов. Если в G_2 есть 4-цикл, проходящий через вершину y_2, то в G имеется вершина z_2, смежная с x_2 и x_5 (и не принадлежащая C_P). Но тогда в G нет вершины z_1, смежной с x_1 и x_4, так как в противном случае из планарности G получим $z_1 = z_2$ (рис. 2). В этом случае в G имеются два 3-цикла (x_1, x_2, z_1) и (x_4, x_5, z_1). Следовательно, при добавлении к G вершины y_1, смежной с с x_1 и x_4, получаем граф G_1, не содержащий новых циклов длины 3 и 4.

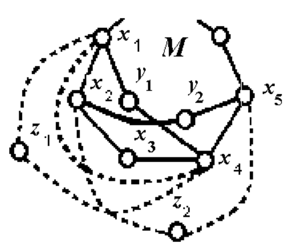

Рис. 2

Описанная процедура может быть продолжена до тех пор, пока не возникнет граф G^* без i-граней ($i > 5$), в котором добавленные вершины не принадлежат 4-циклам.

Очевидно, что граф G^* удовлетворяет условиям теоремы 3. Так как G^* получен из G последовательным добавлением вершин степени 2, то 3-раскраска грани F непродожаема на G^* тогда и только тогда, когда она не продолжаема на G. С другой стороны, при построении графа G^* не возникали новые 4-циклы и каждая i-грань ($i > 5$) в G была разделена на несколько 5-граней в G^*. Поэтому условие, что в графе G каждая i-грань ($i > 4$) имеет отделяющий 4-цикл, равносильно условию о том, что в G^* каждая 5-грань имеет отделяющий 4-цикл. Для завершения доказательства остается применить теорему 3 к графу G^*.

§ 2. Продолжение 3-раскраски вершин 6-грани на все вершины графа

Для полного описания условий продолжения 3-раскраски вершин 6-грани потребуется еще одно определение. 3-раскраску вершин 6-грани будем называть *специальной*, если любые две противоположные вершины грани окрашены в один цвет (рис. 3).

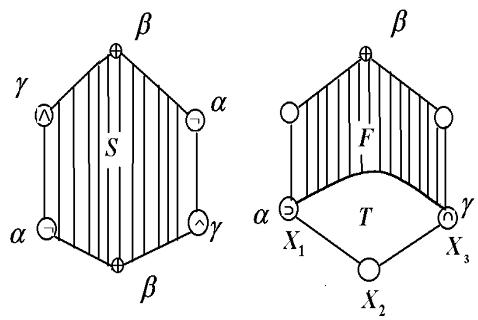

Рис. 3

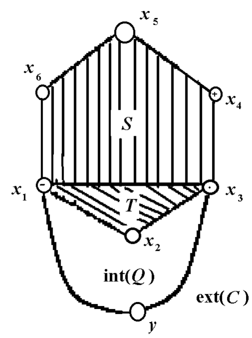

Рис. 4

Замечание. Если к 6-грани $S = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$, на которой задана специальная раскраска, добавить ребро (x_1, x_3), то получится 5-грань F, на которой также задана специальная раскраска.

Следующая теорема дает описание условий продолжаемости 3-раскраски с вершин некоторой 6-грани на весь граф.

Теорема 4. *Пусть в плоском графе G нет циклов длины три. Правильную 3-раскраску вершин 6-грани S нельзя продолжить на весь граф тогда и только тогда, когда раскраска 6-грани является специальной и каждая i-грань ($i > 4$) имеет отделяющий 4-цикл.*

Доказательство. Будем различать два подслучая.
(A) В S есть две такие вершины, окрашенные в разные цвета (рис. 4), что расстояние между ними равно 2. Можно считать, что такими вершинами являются x_1 и x_3.

Добавив к G ребро (x_1, x_3), получим граф G'. Если $t(G') > 1$, то в G имеется вершина y, смежная с x_1, x_3, причем $y \neq x_2$. Выберем цикл $C = (x_1, x_3, y)$ такой, что в $\mathrm{ext}(C)$ нет вершин, смежных с x_1 и x_3. Тогда $t(\mathrm{ext}(C)) = 1$.

Пусть $Q = (x_1, x_2, x_3, y)$. Тогда $t(\mathrm{int}(Q)) = 0$ и по теореме 1 любую правильную раскраску 4-цикла Q можно продолжить на $\mathrm{int}(Q)$. В G'

3-раскраска задана на 5-цикле $F=(x_1,x_3,x_4,x_5,x_6)$ и, следовательно, в соответствии с теоремой 2 раскрашиваемость графа будет определяться раскрашиваемостью компоненты $\mathrm{ext}(C)$. Таким образом, 3-раскраска F непродолжаема тогда и только тогда, когда, во-первых, она специальная, и в силу замечания она специальная на S в G; во-вторых, любая i-грань ($i > 4$) на $\mathrm{ext}(C)$ имеет отделяющий 4-цикл. Грани, лежащие в $\mathrm{int}(Q)$, также имеют отделяющий 4-цикл, а именно Q. Следовательно, в рассматриваемом случае теорема 3 верна.

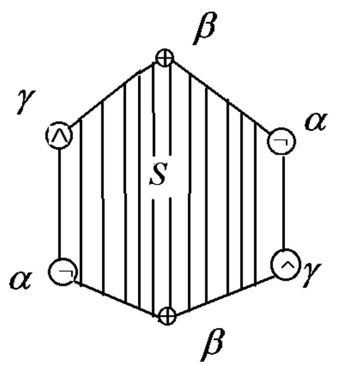

Рис. 5

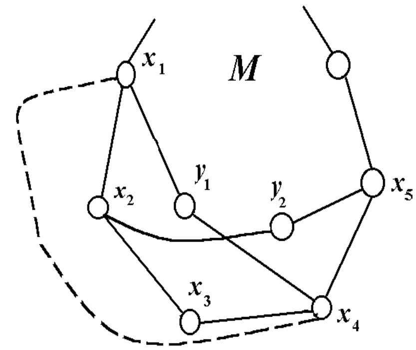

Рис. 6

(B) В S любые две вершины, находящиеся на расстоянии 2, окрашены одним цветом (рис. 5); при этом все вершины окрашены в два цвета.

Докажем, что такая раскраска продолжаема на весь граф.

(B*) Достаточно рассмотреть более узкий класс графов таких, что $f_i(G)=0$, $i>6$, $f_6(G)=1$ и $t(G)=0$.

Пусть M, $M \neq S$, — некоторая i-грань в G, $i > 5$ (рис. 6). Добавив к G вершину y_1, смежную с x_1 и x_4, получим граф G_1. Если $t(G_1) > 0$, то вершины x_1 и x_4 смежны. Но тогда x_2 и x_5 несмежны в графе G_2, полученном добавлением вершины y_2, смежной с x_2 и x_5, и $t(G_2)=0$. Описанная процедура может быть продолжена до тех пор, пока не появится граф G^* без i-граней ($i > 5$) кроме той, на которой задана раскраска.

Из 3-раскраски графа G^* легко получить требуемую 3-раскраску исходного графа G.

Раскрашиваемость вершин в G в случае (B*) доказываем индукцией по числу вершин в графе.

Нетрудно убедиться в раскрашиваемости любого графа, содержащего 7 вершин.

Пусть G_0 — минимальный граф удовлетворяющий условиям (B*), но не имеющий необходимой 3-раскраски, и $S = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ есть 6-грань, на вершинах которой задана 3-раскраска.

Рассмотрим свойства этого графа.

Свойство 1. *Граф G_0 вершинно двусвязен.*

Из условий (В*) следует, что если в G_0 есть точка сочленения x, то она инцедентна грани S. При этом можно считать, что $x = x_1 = x_3$ и $d(x_2) = 1$, т. е. граничный цикл грани S состоит из 4-цикла $Q = (x_1, x_4, x_5, x_6)$ и висячего ребра (x_1, x_2). 3-раскраска цикла Q по теореме 1 может быть продолжена на граф $G \setminus x_2$. Следовательно, исходная раскраска грани S продолжаема на G_0. Противоречие.

Свойство 2. *В G_0 нет разделяющих 4- и 5-циклов.*

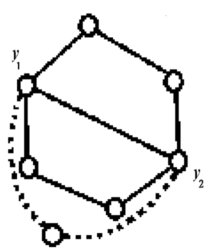

Рис. 7

Утверждение очевидно в силу того, что $t(G_0) = 0$ и для любого разделяющего 4- или 5-цикла C_1, компонента C_1, содержащая окрашенную 6-грань, удовлетворяет условиям (В*), а другая компонента удовлетворяет либо теореме 1, либо теореме 2. Раскрасив сначала компоненту C_1, содержащую S, по индукционному предположению, а затем продолжив раскраску с C_1 на другую компоненту, получим искомую 3-раскраску графа G_0. Противоречие.

Свойство 2$'$. *В G_0 нет разделяющих 6-циклов.*

Пусть $C_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_6)$ — разделяющий 6-цикл и пусть $S \in \mathrm{ext}(C_2)$. Очевидно, что $C_2 \neq S$. Пусть $y_1 \in C_2$ и $y_1 \notin S$. Никакая пара противоположных вершин в C_2 не соединена в G_0 цепью длины 1 или 2, так как в противном случае в силу неравенства $n(G) > 7$ в G_0 был бы разделяющий 4- или 5-цикл (рис. 7). Добавив к $\mathrm{ext}(C_2)$ ребро (y_1, y_4), получим такой граф G_3, что $n(G_3) < n(G_0)$ и G_3 удовлетворяет условиям (В*).

Теперь рассмотрим граф $G_4 = \mathrm{int}(C_2)$. Раскраска 6-грани цикла C_2, полученная в G_3, не будет специальной. Значит, G_4 удовлетворяет либо условиям (А), либо (В*), а так как $n(G_4) < n(G_0)$, то существует 3-раскраска графа G_4, являющаяся продолжением 3-раскраски 6-грани цикла C_2. Объединив раскраски G_3 и G_4, получим искомую раскраску G_0. Противоречие.

Свойство 3. *В G_0 нет 4-граней.*

Пусть в G_0 есть 4-грань $F = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Возможны следующие случаи.

3.1. Все вершины грани F принадлежат S. Без потери общности можно считать, что $y_i = x_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Так как $n(G_0) > 7$, то цикл (x_1, x_4, x_5, x_6) является разделяющим, что противоречит свойству 2.

3.2. Грани S принадлежат три вершины грани F (рис. 8). Так как $n(G_0) > 7$, то в G_0 есть разделяющий 6-цикл $(x_1, y_4, x_3, x_4, x_5, x_6)$, что противоречит свойству $2'$.

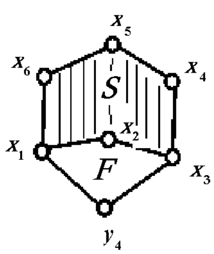

Рис. 8

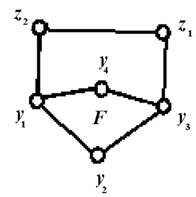

Рис. 9

3.3. Грани S принадлежат не более двух вершин грани F.

В грани F выберем пару противоположных вершин, по крайней мере одна из которых не принадлежит S. Пусть этими вершинами являются y_1 и y_3. Рассмотрим граф G_5, полученный из G_0 отождествлением вершин y_1 и y_3. Заметим, что если $t(G_5) = 0$, то раскраска грани S является правильной в G_5. В этом случае граф G_5 удовлетворяет индукционному предположению и из его 3-раскраски легко получить искомую 3-раскраску графа G_0.

Если $t(G_5) > 0$, то в G_0 имеется цепь длины 3, соединяющая вершины y_1 и y_3 (рис. 9). Так как $n(G_0) > 7$, то либо $(y_1, y_2, y_3, z_1, z_2)$, либо $(y_1,\ y_4,\ y_3,\ z_1,\ z_2)$ является разделяющим 5-циклом. Это противоречит свойству 2.

Заметим, что при отождествлении вершин y_1 и y_3 не может возникнуть пара смежных одинаково раскрашенных вершин, так как тогда в графе G_5 возник бы треугольник.

Свойство 4. *В* G_0 *нет вершин степени* 2.

Из минимальности графа G_0 следует, что если $d(x) = 2$, то $x \in V(S)$. Можно считать, что $x = x_2$.

По условию (B*) вершины x_1 и x_3 окрашены в один цвет. В силу свойства 2 в G_0 может быть только одна цепь длины 3, соединяющая эти вершины (рис. 10). Значит, граф G_6, полученный из G_0 удалением вершины x_2 и отождествлением вершин x_1 и x_3, таков, что $t(G_6) \leqslant 1$.

Граф G_6 удовлетворяет теореме 1 и раскраску, заданную на 4-грани $(x_1 = x_3, x_4, x_5, x_6)$, можно продолжить на весь граф G_6, а из неё легко получить искомую раскраску G_0. Противоречие.

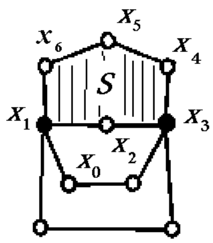

Рис. 10

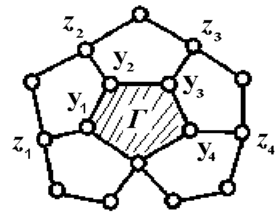

Рис. 11

Гранью Грецша (или *Г-гранью*) будем называть 5-грань, на границе которой имеется не менее четырех вершин степени 3 (рис. 11).

Оценим число Г-граней в графе G_0. В силу условий (В*) и свойства 3 имеем

$$2m = 5(f-1) + 6 = 5f + 1. \tag{1}$$

Из формулы Эйлера получаем

$$2n = 2m - 2f + 4 = 5f + 1 - 2f + 4 = 3f + 5. \tag{2}$$

Пусть p — число вершин степени 3. Тогда в силу свойств 1 и 4 имеем

$$2m \geqslant 4(n-p) + 3p = 4n - p \text{ или } p \geq 4n - 2m$$

Подставив в это неравенство (1) и (2), получим

$$p \geqslant 6f + 10 - 5f - 1 = f + 9. \tag{3}$$

Пусть g_i обозначает число 5-граней, содержащих i вершин степени 3 на своей границе. Тогда очевидны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} f &\geqslant 3p - g_2 - 2g_3 - 3g_4 - 4g_5 - 5, \\ f &\geqslant g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + 1, \\ f &\geqslant g_3 + g_4 + g_5 + 1. \end{aligned}$$

Просуммировав, получим $3f \geqslant 3p - g_4 - 2g_5 - 3$, т. е. $g_4 + 2g_5 \geqslant 3p - 3f - 3$. Отсюда и из (3) следует, что

$$g_4 + 2g_5 \geqslant 3f + 27 - 3f - 3 = 24. \tag{4}$$

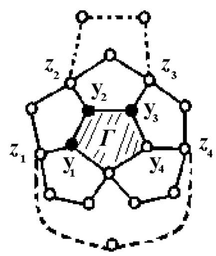

Рис. 12

Из формулы (4) следует неравенство $\Gamma(G_0) \geqslant 12$, где $\Gamma(G_0)$ — число Г-граней в графе G_0. Рассмотрим Г-грань, не имеющую с гранью S общих вершин степени 3 (см. рис. 12), и граф G_7, полученный из G_0 удалением вершин y_1, y_2, y_3 и отождествлением двух пар вершин z_1 и y_4, z_2 и z_3. В силу свойств 2 и $2'$ в G_0 нет цепей длины 3 между вершинами z_1 и y_4 и вершинами z_1 и z_3 (рис. 12). Следовательно, $t(G_7) = 0$ и в G_7 раскраска грани S правильная, т. е. граф G_7 удовлетворяет индукционному предположению. Поэтому раскраска грани S может быть продолжена на G_7.

Еще Грёцшем [2] было показано, что из 3-раскраски графа G_7 легко получить 3-раскраску графа G_0. Отсюда следует справедливость теоремы 4 в случае (В).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аксёнов В. А.** О продолжении 3-раскраски на плоских графах// Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 26. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1974. С. 3–19.

2. **Grotzsch H.** Zur Theorie der discreten Gebilde. VII. Ein Dreifarbensatz fur dreikreisfreie Netze auf der Kugel// Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg. Math.–Nat. Reihe, 1958/1959. V. 8. P. 109–120.

3. **Grunbaum B.** Grotzsch's theorem on 3-coloring// Michigan Math. J. 1963. V. 10, N 3. P. 303–310.

4. **Steinberg R.** The state of the three color problem// Quo vadis, graph theory. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 211-248. (Annals of Discrete Math.; V. 55).

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
11 апреля 2003 г.