ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2003. Серия 1. Том 10, № 3, 12–22

УДК 519.17

КРИТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ ЭРДЁША И ДИРАКА ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ*)

А. А. Добрынин, Л. С. Мельников, А. В. Пяткин

В 1960 году Г. Дирак выдвинул гипотезу о существовании r–связных 4–критических графов при любом $r \geqslant 3$. В 1989 году П. Эрдёш предположил, что для всякого $r \geqslant 3$ существуют r–однородные 4–критические графы. В настоящей статье показывается истинность этих гипотез для $r = 6, 8, 10, 12, 14$ и 16. Приводится список 4-критических r–однородных r–связных вершинно–транзитивных графов с числом вершин не более 47000.

Введение

В статье рассматриваются обыкновенные графы без петель и кратных ребер. Граф называется *r–однородным*, если все его вершины имеют степень r. Граф *r–связен*, если любые две его вершины соединены r простыми цепями, попарно не пересекающимися по внутренним вершинам. Граф называется *вершинно–транзитивным*, если для любой пары его вершин u и v существует автоморфизм, переводящий u в v. *Вершинной раскраской* графа называется отображение множества его вершин в множество натуральных чисел. Раскраска называется *правильной*, если любые две смежные вершины графа окрашены в различные цвета. Минимальное число цветов, необходимое для правильной раскраски графа, называется *хроматическим числом* графа. Говорим, что граф *k–хроматический*, если его хроматическое число равно k. Связный k–хроматический граф называется *k–критическим*, если после удаления его любого ребра получается $(k-1)$–хроматический граф.

При $k = 2$ единственным k–критическим графом является полный граф с двумя вершинами, а 3–критическими графами являются только

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-01-00794, 02-01-00039 и 03-01-06473). Третий автор благодарит Фонд содействия отечественной науке.

нечетные циклы. При $k \geqslant 4$ структура k–критических графов весьма разнообразна, и для таких графов не известна хорошая характеризация.

В 1989 г. П. Эрдёш в работе [11] предположил существование r–однородных 4-критических графов при всех $r \geqslant 3$, отметив, что ему не известны такие графы для $r \geqslant 6$. Графы, удовлетворяющие этой гипотезе, будем называть *графами Эрдеша*. В 1960 г. Г. Дирак [6, 7] сформулировал гипотезу о существовании вершинно r–связных 4–критических графов при всех $r \geqslant 4$. Такие графы будем называть *графами Дирака*.

Полный граф с четырьмя вершинами является единственным 4–критическим графом в классе всех 3–однородных графов, что легко следует из теоремы Брукса [4].

Известны примеры 4–однородных 4–критических графов, предложенных Т. Галлаи [12], Г. Кестером [17, 18], В. А. Евстигнеевым и Л. С. Мельниковым [3] и Д. Янгсом [24]. Т. Йенсен в [14] построил примеры 5–связных 5–однородных 4–критических графов. Среди всех перечисленных выше примеров нет вершинно–транзитивных графов. Первый пример 6–однородного 6–связного 4–критического вершинно–транзитивного графа построен А. В. Пяткиным [21]. Позже в работах [2, 8, 9, 10] А. А. Добрынин, Л. С. Мельников и А. В. Пяткин построили вершинно–транзитивные графы Эрдеша и Дирака при $r = 6, 8, 10, 12, 14$ и 16. В настоящей статье приводится список всех известных таких графов не более чем с 47000 вершинами.

1. Метод нахождения 4–критических графов

Пусть $a_0, a_1, ..., a_k$ — целые положительные числа такие, что $1 \leqslant a_0 < a_1 < \ldots < a_k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. Граф $G = C(n;\ a_0, a_1, \ldots, a_k)$ с множеством вершин $V(G) = \{1, 2, \ldots, n\}$ назовем *циркулянтом*, если множество его ребер $E = \{ij\ :\ |\,i - j\,| \equiv a_m \pmod n),\ m = 0, 1, ..., k\}$. Циркулянт G является $(2k+2)$–однородным графом, если $a_k < n/2$, и $(2k+1)$–регулярным при $a_k = n/2$. Все циркулянты являются вершинно–транзитивными графами.

Ребра циркулянта, порожденные параметром a_i, будем называть *a_i–ребрами*. Говорим, что циркулянт *правильный*, если $a_0 = 1$ и $(n, a_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$, где (a, b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b. Множество ребер правильного циркулянта разбивается на $k + 1$ гамильтонов цикл, причем i-й цикл порождается a_i–ребрами, $i = 0, 1, ..., k$. Такие циклы называются *a_i–циклами*. При этом 1–цикл $(1, 2, \ldots, n, 1)$ называется *главным циклом* циркулянта. Если в правильном циркулянте $C(n;\ 1, a_1, \ldots, a_k)$ a_i–цикл взять в качестве главного, то получится представление исходного циркулянта, как правило, с другими параметрами. Такие представления называются *инверсиями* циркулянта $C(n;\,1,a_1,\ldots,a_k)$ для различных i, $1\leqslant i\leqslant k$. Например, правильный циркулянт $(157;\,1,8,14)$ имеет две инверсии $(157;\,59,1,41)$ и $(157;\,56,23,1)$. Существуют циркулянты, все инверсии которых совпадают, что влечет их реберную транзитивность. Например, таковым является циркулянт $C(289;\,1,38,110,134)$.

Параметры любой инверсии циркулянта можно выразить через функцию $r_{n,a}(b)=\min\{r>0 \mid ra\equiv \pm b \pmod n\}$ со значениями в интервале $(0,\lfloor n/2\rfloor)$, которая определена однозначно, если $(n,a)=1$. Нетрудно заметить, что если в качестве главного цикла правильного циркулянта выбрать a_1–цикл, то возникает инверсия с параметрами $C(n;\,r_{n,a_1}(1),1,$ $r_{n,a_1}(a_2),\ldots,r_{n,a_1}(a_k))$. Аналогичное утверждение верно и для всех остальных значений i, $2\leqslant i\leqslant k$.

Пусть $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$. Обозначим через A^o и A^e подмножества множества A, состоящие из его нечетных и четных элементов соответственно. Правильный циркулянт $C(n;\,1,a_1,\ldots,a_k)$ называется *нормальным*, если $n\equiv 1 \pmod 6$, $a_i\equiv 2 \pmod 3$ и $r_{n,a_i}(a_j)\equiv 2 \pmod 3$ для всех $a_i\in A$ и $a_j\in A\cup\{1\}\setminus\{a_i\}$.

Как как показано в лемме 1, любой 4–хроматический нормальный циркулянт является 4-критическим [9, 21].

Лемма 1. *Если в нормальном циркулянте удалить любое ребро, то хроматическое число полученного графа равно* 3.

Для доказательства 4–хроматичности циркулянтов нужно более подробно изучить свойства 3–раскрашиваемых циркулянтов. Пусть $G=C(n;\,1,a_1,\ldots,a_k)$ является 3–хроматическим циркулянтом. Обозначим через $f_i\in\{1,2,3\}$ цвет вершины i в некоторой правильной 3–раскраске графа G, $i=1,2,\ldots,n$. Определим бесконечную в обе стороны последовательность $f=\{\ldots f_{i-1}f_if_{i+1}\ldots\}$ по правилу $f_{i+kn}=f_i$ для всех целых $k\neq 0$ и $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Эта последовательность имеет период n и $f_i\neq f_j$ при $|\,i-j\,|\in A\cup\{1\}$. Вершину i назовем *внешней*, если $f_{i-1}\neq f_{i+1}$, и *внутренней* — в противном случае. Пусть $c_1,c_2,\ldots,c_s$ являются внешними вершинами в одном периоде раскраски f. Для удобства считаем, что $c_{s+1}=c_1+n$. Назовем 3–раскраску f (не обязательно правильную) *периодической*, если $f_i\neq f_{i+1}$ и $c_{j+1}-c_j$ нечетно при всех i,j. Другими словами, каждое максимальное подслово, образованное любыми двумя цветами, имеет четную длину, т. е. число внутренних вершин, находящихся между любыми двумя соседними внешними вершинами, четно. Обозначим через $2l_i$ число внутренних вершин между c_i и c_{i+1} для всех i (возможно, $l_i = 0$). Ясно, что подпоследовательность цветов внешних вершин в периодической раскраске всегда имеет вид ...123123123... (с точностью до переименования цветов).

Если любая правильная раскраска 3–хроматического циркулянта $C(n; 1, a_1, \dots, a_k)$ является периодической, то циркулянт называется *периодическим*.

Вопрос о 4–хроматичности циркулянта можно свести к проверке некоторых арифметических соотношений для его параметров [9]. В лемме 2 приведены все известные достаточные признаки периодичности циркулянта, а в лемме 3 — критерий существования правильной периодической 3–раскраски циркулянта.

Лемма 2. *Правильный 3–хроматический циркулянт $C(n; 1, a_1, \dots, a_k)$ является периодическим, если существуют такие целые числа p, q и r (возможно, некоторые из них совпадают), что выполняется по крайней мере одно из следующих условий*:

(a) $a_p = a_q + 3$;
(b) $a_p + a_q - 2 = a_r$;
(c) $a_p + a_q = n - 3$;
(d) $a_p + a_q + a_r = n + 2$.

Доказательство. Рассмотрим правильную 3-раскраску циркулянта G и построим последовательность f как описано выше. Очевидно, условие $f_i \neq f_{i+1}$ выполняется для всех i.

(a). Докажем, что $l_i \in \{0, 1\}$ и $f_{c_i} \neq f_{c_{i+1}}$ при любом i. Пусть $c_i = 1$, $f_0 = 3$, $f_1 = 1$ и $f_2 = 2$. Если $f_3 = 3$, то $c_{i+1} = 2$ и $l_i = 0$. В противном случае $f_{a_p} = 2$, поскольку $f_0 = 3$ и $f_3 = 1$. Так как $f_1 = 1$, то $f_{a_p+1} = 3$ и, следовательно, $f_4 = 2$. Поскольку $f_2 = 2$, имеем $f_{a_p+2} = 1$ и, значит, $f_5 = 3$. Таким образом, $c_{i+1} = 4$ и $l_i = 1$.

(b). Предположим, что раскраска не является периодической. Тогда для некоторого $m \geqslant 2$ выполняется $f_0 = f_{2m} = 3$, а также $f_{2i-1} = 1$ при $i = 1, 2, \dots, m$ и $f_{2i} = 2$ при $i = 1, 2, \dots, m - 1$.

Сначала докажем вспомогательное утверждение: для каждого $j = 1, 2, \dots, m - 1$

$$f_{2j+a_r+1} = 2,\ f_{2j+a_q} = 1 \text{и}\ f_{2j+a_q-1} = f_{2j+a_r+2} = 3.$$

Применим индукцию по j. Пусть $j = 1$. Так как $f_1 = 1$, то $f_{a_q+1} \neq 1$. Предположим, что $f_{a_q+1} = 2$. Тогда $f_{a_q} = 1$ (поскольку $f_0 = 3$) и $f_{a_p+a_q} = 3$, так как $a_p + a_q - a_r = 2$ и $f_2 = 2$. Но теперь вершина $(a_p + a_q + 1)$ не может быть раскрашена, ибо $f_{a_p+a_q} = 3$, $f_{a_q+1} = 2$ и $f_3 = f_{a_p+a_q-a_r+1} = 1$. Поэтому $f_{a_q+1} = 3$. Так как $f_2 = 2$ и $f_3 = 1$, то

$f_{a_q+2} = 1$ и $f_{a_r+3} = 2$ (заметим, что $a_r + 3 = a_p + a_q + 1$). Тогда $f_{a_r+4} = 3$, поскольку $a_r + 4 = a_p + a_q + 2$.

Допустим, что утверждение доказано для $j - 1$, т. е. $f_{2j+a_r-1} = 2$, $f_{2j+a_q-2} = 1$ и $f_{2j+a_q-3} = f_{2j+a_r} = 3$. Тогда из $f_{2j+1} = 1$ следует, что $f_{2j+a_r+1} = 2$. Так как $f_{2j-1} = 1$ и $a_r + 1 = a_p + a_q - 1$, то $f_{2j+a_q-1} = 3$. Тогда $f_{2j+a_q} = 1$, ибо $f_{2j} = 2$, и, наконец, $f_{2j+a_r+2} = 3$. Утверждение доказано.

В частности, при $j = m - 1$ имеем $f_{2m+a_r} = 3 = f_{2m}$, противоречие.

(c)–(d). Эти признаки следуют из признаков (a)–(b) и того факта, что в циркулянте есть a_i–ребра тогда и только тогда, когда в нем есть $(n - a_i)$–ребра. Лемма 2 доказана.

Заметим, что периодический циркулянт может иметь непериодические инверсии. Например, любая раскраска 3-хроматического циркулянта $(157; 59, 1, 56)$ является периодической по лемме 2. Но его инверсия $(157; 1, 8, 23)$ имеет непериодическую раскраску (см. приложение 2). Это следует из того, что максимальная двухцветная цепь с концами во внешних вершинах 111 и 115, выделенная жирным шрифтом, имеет длину 5.

Лемма 3. *Правильный циркулянт $C(n; 1, a_1, \ldots, a_k)$ имеет правильную периодическую 3–раскраску тогда и только тогда, когда существует такое целое число $t \geqslant 0$, что*

1) *для каждого $a \in A^o$ найдется целое число m_a такое, что*

$$0 \leqslant m_a \leqslant \lceil \frac{a-5}{6} \rceil \text{ и } n \geqslant 6at + 3a - 6m_a n \geqslant -n;$$

2) *для каждого $a' \in A^e$ найдется целое число $m_{a'}$ такое, что*

$$0 \leqslant m_{a'} \leqslant \lceil \frac{a'-8}{6} \rceil \text{ и } 4n \geqslant 6a't + 3a' - 6m_{a'} n \geqslant 2n.$$

Идея доказательства леммы 3 состоит в следующем (подробное доказательство дано в [9]). В нормальном периодическом циркулянте последовательность $l_1, l_2, ..., l_s$ полностью определяет его раскраску. Так как расстояние между одинаково раскрашенными вершинами не может быть равно a для всех $a \in A$, то возникают ограничения на суммы вида $l_{i,j} = l_i + l_{i+1} + ... + l_j$ для некоторых значений i и j. Из нормальности n-вершинного циркулянта следует, что $s = 6t + 3$ и

$$n = 6t + 3 + 2 \sum_{i=1}^{6t+3} l_i \,.$$

Из этого соотношения и ограничений на $l_{i,j}$ следуют неравенства для t, указанные в лемме 3.

Из лемм 1–3 следует, что всякий нормальный циркулянт, удовлетворяющий условиям леммы 2, но не удовлетворяющий условиям леммы 3, является графом Эрдеша. Такой циркулянт также является графом Дирака, что следует из теорем Мадера и Уоткинса о том, что связность любого вершинно–транзитивного графа, не содержащего K_4 в качестве подграфа, равна его степени [19, 20, 22, 23]. Нетрудно проверить, что нормальный циркулянт не имеет треугольников, если $a_1 \geqslant 5$.

Условия нормальности циркулянта, а также условия лемм 2 и 3 нетрудно проверить с помощью компьютера. Однако поиск нормальных циркулянтов с помощью непосредственной проверки всех сравнимостей из условия нормальности требует много вычислений и является неэффективным. Оказывается, что поиск всех нормальных циркулянтов заданного порядка n можно свести к перечислению клик в некотором вспомогательном графе H_n.

Пусть дано число $n \equiv 1 \pmod 6$. Вершинами графа H_n являются те и только те числа i из множества $\{2, 3, \ldots, (n-1)/2\}$, которые удовлетворяют соотношениям $(n, i) = 1$, $i \equiv 2 \pmod 3$ и $r_{n,i}(1) \equiv 2 \pmod 3$. Вершины i и j графа H_n смежны тогда и только тогда, когда $r_{n,i}(j) \equiv 2 \pmod 3$ и $r_{n,j}(i) \equiv 2 \pmod 3$. В работе [10] доказано следующее утверждение.

Лемма 4. *Циркулянт $C(n; 1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является нормальным тогда и только тогда, когда $a_1, a_2, \ldots, a_k$ являются вершинами графа H_n и образуют клику.*

Известно, что задача поиска наибольшей клики в графе является NP-трудной [1]. Однако порядок и степень графа H_n оказываются сравнительно небольшими даже для больших значений n, что позволяет за разумное время перебрать все клики графа H_n, т. е. найти все нормальные n–вершинные циркулянты. С помощью разработанной авторами компьютерной программы были проверены все циркулянты с числом вершин $n \leqslant 47000$. Размер максимальной клики в графах H_n не превосходил 11.

2. Список 4–критических циркулянтов

Все r–однородные 4–критические циркулянты для $r = 6, 8, 10, 12, 14$ и 16, найденные описанным выше методом, приведены в приложении. Для каждого такого циркулянта указано одно соотношение периодичности из леммы 2, а параметры в соответствующей инверсии выделены жирным шрифтом.

Отметим, что параметры $1, a_1, \ldots, a_k$ любой инверсии циркулянта можно записать в возрастающем порядке. Среди всех таких представлений циркулянта за основное было выбрано лексикографически минимальное, и остальные инверсии циркулянта строились относительно основного представления.

Некоторые циркулянты были опубликованы ранее в работах [2, 8–10, 21]. В список включен также единственный 4–критический циркулянт $C(13; 1, 5)$, встречавшийся ранее в работах [5, 13, 15].

В этом списке встречаются пары графов с большими одинаковыми порядками и степенью (например, графы порядков 17971 и 32737 степени 14). Неизоморфность таких графов была установлена вычислением их локальных характеристик. А именно, подсчитывалось количество простых циклов небольшой длины (не более 9), проходящих через произвольную вершину графа.

Графы Эрдеша и Дирака с n вершинами имеются и при $n > 47000$. Например, таким будет циркулянт (48055; 6542, 13772, 13697, 1, 6887, 6701, 3704, 3113), параметры которого удовлетворяют условию $6887 + 6887 = 13772 + 2$.

В заключение отметим, что было найдено более 300 нормальных циркулянтов, которые не удовлетворяют ни лемме 2, ни лемме 3. Это значит, что такие циркулянты не имеют правильной периодической 3-раскраски, но, возможно, имеют непериодическую 3-раскраску. Наименьшим примером такого графа является нормальный циркулянт $C(289;\ 1, 38, 110, 134)$, 4–хроматичность которого была установлена только с помощью компьютера. Вопрос о 4–хроматичности остальных таких циркулянтов остается открытым.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Циркулянты Эрдеша и Дирака четной степени $4 \leqslant r \leqslant 16$.

$r = 4$

1. (**13**; 1, **5**) $5 + 5 = 13 - 3$

$r = 6$

1. (97; **44**, 1, **23**) $23 + 23 = 44 + 2$
2. (157; 1, **8**, **14**) $8 + 8 = 14 + 2$

$r = 8$

1. (**337**; 1, 35, 89, **167**) $167 + 167 = 337 - 3$
2. (391; **176**, 1, **173**, 50) $176 = 173 + 3$
3. (403; 164, **140**, 1, **137**) $140 = 137 + 3$
4. (433; **179**, **116**, **65**, 1) $116 + 65 = 179 + 2$
5. (469; 101, **173**, 1, **170**) $173 = 170 + 3$
6. (469; **104**, **206**, 170, 1) $104 + 104 = 206 + 2$
7. (541; 230, **26**, **29**, 1) $29 = 26 + 3$

$r = 8$ *(Продолжение)*

8. (541; 191, 1, **164**, **83**) $83 + 83 = 164 + 2$
9. (589; 215, **47**, **92**, 1) $47 + 47 = 92 + 2$
10. (589; **92**, 1, **47**, 101) $47 + 47 = 92 + 2$
11. (**691**; **110**, **245**, **338**, 1) $110 + 245 + 338 = 691 + 2$
12. (**1279**; **350**, **635**, 1, **296**) $350 + 635 + 296 = 1279 + 2$
13. (1387; **113**, **206**, **317**, 1) $113 + 206 = 317 + 2$

$r = 10$

1. (1063; **236**, **470**, 89, 368, 1) $236 + 236 = 470 + 2$
2. (1369; 425, **98**, 1, 230, **194**) $98 + 98 = 194 + 2$
3. (1453; **572**, 59, 329, 1, **569**) $572 = 569 + 3$
4. (1663; 647, **758**, 1, **755**, 437) $758 = 755 + 3$
5. (1843; 623, **233**, 1, **464**, 377) $233 + 233 = 464 + 2$
6. (1891; 1, **65**, **68**, 863, 902) $68 = 65 + 3$
7. (3007; 335, **191**, 1, **380**, 689) $191 + 191 = 380 + 2$
8. (3379; 842, **1073**, **1547**, 1, **476**) $1073 + 476 = 1547 + 2$
9. (3631; **1088**, 26, **545**, 1, 593) $545 + 545 = 1088 + 2$
10. (4093; **1160**, **113**, 1, 593, **1271**) $1160 + 113 = 1271 + 2$
11. (4201; 995, 1, 1559, **287**, **284**) $287 = 284 + 3$
12. (9817; 1, **74**, **2438**, **2510**, 2720) $74 + 2438 = 2510 + 2$

$r = 12$

1. (**4153**; 1, 53, 386, 431, 737, **2075**) $2075 + 2075 = 4153 - 3$
2. (4153; 1808, **1646**, **1649**, 1439, 1046, 1) $1649 = 1646 + 3$
3. (4453; 791, 938, 1, **1910**, **80**, **1832**) $80 + 1832 = 1910 + 2$
4. (**4567**; 1286, **2282**, 1196, 755, 1, 665) $2282 + 2282 = 4567 - 3$
5. (4837; **104**, **206**, 1370, 2207, 2189, 1) $104 + 104 = 206 + 2$
6. (5557; **2486**, 1, **2489**, 1175, 1289, 836) $2489 = 2486 + 3$
7. (5629; **2174**, 2642, 1, 626, 404, **2177**) $2177 = 2174 + 3$
8. (5629; 2504, **401**, 1, 1124, 944, **404**) $404 = 401 + 3$
9. (**5725**; 1, 107, 131, 476, **593**, **2567**) $593 + 2567 + 2567 = 5725 + 2$
10. (5725; 2036, **302**, 1, **602**, 107, 1439) $302 + 302 = 602 + 2$
11. (5893; 791, 1, 587, **1892**, **1889**, 2237) $1892 = 1889 + 3$
12. (5953; 1, 20, **719**, **857**, 1016, **1574**) $719 + 857 = 1574 + 2$
13. (6019; 2312, 2663, 1, **233**, **230**, 464) $233 = 230 + 3$
14. (6451; 2228, 524, 1, **2609**, 695, **2612**) $2612 = 2609 + 3$
15. (6913; **2591**, **1544**, **1049**, 2309, 2013, 1) $1544 + 1049 = 2591 + 2$
16. (8011; **914**, 1, **917**, 3017, 149, 1754) $917 = 914 + 3$
17. (8731; 2834, 1, **341**, 3686, **680**, 2300) $341 + 341 = 680 + 2$
18. (**8917**; **1043**, 2897, 1, **3572**, 980, **4304**) $1043 + 3572 + 4304 = 8917 + 2$
19. (9217; 1, **266**, **530**, 3521, 3956, 4217) $266 + 266 = 530 + 2$
20. (9805; **4724**, 2789, 1, 671, 2837, **2363**) $2363 + 2363 = 4724 + 2$
21. (**10105**; 3551, 4319, 1, **3743**, 2753, **2621**) $3743 + 3743 + 2621 = 10105 + 2$
22. (11131; **221**, 2711, 3314, 1, **2186**, **2405**) $221 + 2186 = 2405 + 2$
23. (**11377**; 3437, 1214, **4040**, **2048**, 1, **5291**) $4040 + 2048 + 5291 = 11377 + 2$
24. (11581; 1, **833**, 1037, **1664**, 3608, 4754) $833 + 833 = 1664 + 2$
25. (12025; 1727, 1, **566**, **563**, 3632, 4586) $566 = 563 + 3$
26. (12961; 1397, 1, 3008, **2774**, 2759, **5546**) $2774 + 2774 = 5546 + 2$
27. (13093; **4742**, **542**, 5699, 1109, 1, **4202**) $542 + 4202 = 4742 + 2$
28. (13687; **419**, 1, 1670, **4511**, **4094**, 3710) $419 + 4094 = 4511 + 2$
29. (14185; 1, 11, **3233**, 3281, **6464**, 6632) $3233 + 3233 = 6464 + 2$
30. (14761; 1799, 1, **962**, **959**, 4280, 5522) $962 = 959 + 3$
31. (**15325**; **6842**, **7433**, **1052**, 3902, 1, 6476) $6842 + 7433 + 1052 = 15325 + 2$
32. (16051; 2939, 5627, **2096**, 1, 3293, **4190**) $2096 + 2096 = 4190 + 2$
33. (16189; 2420, 1, **3503**, 2483, **3968**, **7469**) $3503 + 3968 = 7469 + 2$
34. (16519; 1, **215**, **428**, 1385, 1904, 7094) $215 + 215 = 428 + 2$

$r = 12$ *(Продолжение)*

35. (19999; 830, 1, **1655**, 7346, **6032**, **7685**)	$1655 + 6032 = 7685 + 2$
36. (21997; 1856, 1, 8393, **2669**, 7403, **5336**)	$2669 + 2669 = 5336 + 2$
37. (26719; **5018**, 3617, 3224, 1, 12350, **2510**)	$2510 + 2510 = 5018 + 2$
38. (27349; 1, **278**, **554**, 5912, 6632, 10082)	$278 + 278 = 554 + 2$
39. (29779; **13721**, **7241**, **6482**, 12590, 1, 13808)	$7241 + 6482 = 13721 + 2$
40. (32161; **635**, **7433**, **6800**, 12692, 3464, 1)	$635 + 6800 = 7433 + 2$
41. (34213; 11810, **6974**, **4358**, **2618**, 1, 15434)	$4358 + 2618 = 6974 + 2$
42. (35347; **9818**, **7619**, 12401, 1, 386, **2201**)	$7619 + 2201 = 9818 + 2$
43. (36661; 1, **221**, **224**, 2198, 11192, 14057)	$224 = 221 + 3$
44. (41071; 9800, **182**, 17618, 1, **179**, 7640)	$182 = 179 + 3$
45. (43177; **16622**, 6320, **1328**, 4463, **15296**, 1)	$1328 + 15296 = 16622 + 2$

$r = 14$

1. (**14275**; 1862, 1, **3683**, 3221, 6953, 3239, **5297**)	$3683 + 5297 + 5297 = 14275 + 2$
2. (17785; 5813, **3461**, 1, 1802, **3464**, 7253, 1817)	$3464 = 3461 + 3$
3. (17971; **2852**, 5633, 5432, **2855**, 2435, 3374, 1)	$2855 = 2852 + 3$
4. (17971; 5960, 1, 3374, **2855**, **2852**, 5432, 2435)	$2855 = 2852 + 3$
5. (22075; **4568**, 2141, 5147, **9134**, 7052, 4853, 1)	$4568 + 4568 = 9134 + 2$
6. (22207; 3305, 8645, 1, 4967, **4343**, **8684**, 137)	$4343 + 4343 = 8684 + 2$
7. (22327; 1, 140, **1001**, **1004**, 4853, 6005, 6281)	$1004 = 1001 + 3$
8. (25411; 5504, 1, **6746**, 608, **6749**, 3509, 1052)	$6749 = 6746 + 3$
9. (26599; 1, 146, **1070**, **2138**, 4262, 4748, 7652)	$1070 + 1070 = 2138 + 2$
10. (27619; **11957**, **6062**, 1, **5897**, 12092, 878, 5480)	$6062 + 5897 = 11957 + 2$
11. (**30487**; **14519**, 9911, 1, 7298, 2861, 3374, **7985**)	$14519 + 7985 + 7985 = 30487 + 2$
12. (31183; **692**, 5192, 5486, 13241, 1, 3998, **1382**)	$692 + 692 = 1382 + 2$
13. (32059; 1, **686**, 3140, 6836, 7790, **11498**, **12182**)	$686 + 11498 = 12182 + 2$
14. (32107; 9896, 1, **4409**, 11036, **1268**, **3143**, 6524)	$1268 + 3143 = 4409 + 2$
15. (32737; 5615, **695**, 1, 599, **11504**, 1145, **12197**)	$695 + 11504 = 12197 + 2$
16. (32737; 13916, **10919**, 1, 1844, 13847, **3653**, **14570**)	$10919 + 3653 = 14570 + 2$
17. (32821; 9017, **4607**, 1, 10379, 2762, **9212**, 1046)	$4607 + 4607 = 9212 + 2$
18. (33493; 4331, 1, **10337**, **2537**, 15392, 5882, **12872**)	$10337 + 2537 = 12872 + 2$
19. (33937; 2282, **1403**, **980**, 13607, 1, 8924, **2381**)	$1403 + 980 = 2381 + 2$
20. (34213; **14777**, **14774**, 3335, 13910, 3593, 16007, 1)	$14777 = 14774 + 3$
21. (34483; 11594, **665**, 7145, 1, 1079, 6602, **1328**)	$665 + 665 = 1328 + 2$
22. (35287; **3572**, 1, **11036**, 8990, **14606**, 7376, 3845)	$3572 + 11036 = 14606 + 2$
23. (36259; 1, 137, **2054**, **4106**, 6416, 15989, 16289)	$2054 + 2054 = 4106 + 2$
24. (36697; **14987**, 7826, 1, **11645**, **3344**, 16943, 17759)	$11645 + 3344 = 14987 + 2$
25. (37687; 1, **224**, 410, 5243, 13838, **16103**, **16325**)	$224 + 16103 = 16325 + 2$
26. (38629; 7967, 2267, **14222**, 14645, **3488**, **17708**, 1)	$14222 + 3488 = 17708 + 2$
27. (38953; **16283**, 11912, 1, 15281, 2906, **12785**, **3500**)	$12785 + 3500 = 16283 + 2$
28. (**39271**; 1, **1118**, 8909, 9389, 13232, **19031**, **19124**)	$1118 + 19031 + 19124 = 39271 + 2$
29. (39493; **2579**, 19481, 10250, 8753, **2582**, 19409, 1)	$2582 = 2579 + 3$
30. (**40099**; **10526**, 1, 14642, **19382**, **10193**, 19322, 10286)	$10526 + 19382 + 10193 = 40099 + 2$
31. (40345; **572**, **4538**, 1, **3968**, 13244, 7877, 6386)	$572 + 3968 = 4538 + 2$
32. (40687; **2186**, 5138, 1, 11300, 8162, 389, **2183**)	$2186 = 2183 + 3$
33. (40711; 1, 458, **746**, **3956**, **4700**, 6998, 10073)	$746 + 3956 = 4700 + 2$
34. (40771; 12710, **3305**, **7814**, 14786, **11117**, 1, 17357)	$3305 + 7814 = 11117 + 2$
35. (42397; **12983**, 19823, **2288**, **15269**, 3551, 8756, 1)	$12983 + 2288 = 15269 + 2$
36. (43621; **10769**, **14867**, 1, 11048, 21566, **4100**, 830)	$10769 + 4100 = 14867 + 2$

$r = 16$

1. (19897; 4382, 6887, **4052**, 1, **3824**, 4151, 326, **230**)	$3824 + 230 = 4052 + 2$
2. (**28279**; 13604, 10049, 8408, 1, **10868**, **6545**, 5660, 6962)	$10868 + 10868 + 6545 = 28279 + 2$
3. (31339; 6095, 13025, **7328**, 5018, 1355, **3665**, 1, 6929)	$3665 + 3665 = 7328 + 2$
4. (34987; 11339, 1, 11639, 14141, **8015**, 1793, **8012**, 6104)	$8015 = 8012 + 3$
5. (41779; 16415, **10130**, 3539, 7694, 4022, **10133**, 1, 12485)	$10133 = 10130 + 3$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Непериодическая 3–раскраска инверсии
$(157;\ 1, 8, 23)$
(первой указана вершина циркулянта, второй — ее цвет).

001/1	002/2	003/1	004/3	005/2	006/3	007/2	008/3	009/2	010/1
011/2	012/1	013/3	014/1	015/3	016/1	017/3	018/2	019/1	020/2
021/1	022/2	023/1	024/2	025/1	026/3	027/2	028/1	029/2	030/3
031/2	032/1	033/2	034/1	035/3	036/2	037/3	038/1	039/3	040/2
041/1	042/2	043/1	044/3	045/1	046/2	047/1	048/3	049/2	050/1
051/2	052/1	053/2	054/1	055/2	056/1	057/3	058/2	059/1	060/2
061/3	062/2	063/1	064/3	065/1	066/3	067/2	068/3	069/1	070/3
071/2	072/1	073/2	074/1	075/3	076/1	077/2	078/1	079/3	080/2
081/3	082/2	083/1	084/2	085/1	086/3	087/2	088/3	089/1	090/3
091/2	092/3	093/2	094/1	095/3	096/1	097/2	098/1	099/3	100/1
101/3	102/2	103/1	104/2	105/1	106/2	107/1	108/3	109/2	110/1
111/2	**112/3**	**113/2**	**114/3**	**115/2**	116/1	117/3	118/2	119/3	120/1
121/3	122/1	123/3	124/2	125/1	126/3	127/1	128/2	129/1	130/3
131/2	132/3	133/2	134/1	135/2	136/1	137/2	138/1	139/3	140/1
141/3	142/2	143/3	144/2	145/3	146/2	147/1	148/2	149/1	150/3
151/1	152/3	153/2	154/1	155/2	156/1	157/2			

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. **Добрынин А. А., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** 4-хроматические реберно-критические регулярные графы с высокой связностью// Российская конф. «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конференции (Новосибирск, 24–28 июня 2002 г.) Новосибирск: Изд–во Ин–та математики, 2002. С. 25–30.
3. **Евстигнеев В. А., Мельников Л. С.** Задачи и упражнения по теории графов и комбинаторике. Новосибирск: НГУ, 1981.
4. **Brooks R. L.** On colouring the nodes of a network// Proc. Cambridge Phil. Soc. 1941. V. 37. P. 194–197.
5. **Chao C.–Y.** A critically chromatic graph// Discrete Math. 1997. V. 172, N 1–3. P. 3–7.
6. **Dirac G. A.** 4–chrome Graphen Trennende und vollständige 4–Graphen// Math. Nachr. 1960. V. 22, N 1–2. P. 51–60.
7. **Dirac G. A.** In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4–Graphen und ihre Unterteilungen// Math. Nachr. 1960. V. 22, N 1–2. P. 61–85.
8. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** On 4-chromatic edge-critical regular graphs of high connectivity// Discrete Math. 2003. V. 260, N 1–3. P. 315–319.
9. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** Regular 4-critical graphs of even degree // J. Graph Theory, submitted.
10. **Dobrynin A. A., Melnikov L. S., Pyatkin A. V.** Computer search for regular 4-critical graphs// J. Combin. Math. Combin. Comput., submitted.

11. Erdős P. On some aspects of my work with Gabriel Dirac // Graph Theory in Memory of G. A. Dirac. Amsterdam: North–Holland, 1989. P. 111–116 (Annals of Discrete Mathematics, V. 41).

12. Gallai T. Kritische Graphen I.// Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1963. V. 8, N 1–2. P. 165–192.

13. Göbel F., Neutel E. A. Cyclic graphs// Discrete Appl. Math. 2000. V. 99, N 1–3. P. 3–12.

14. Jensen T. R. Dense critical and vertex-critical graphs// Discrete Math. 2002. V. 258, N 1–3. P. 63–84.

15. Jensen T. R., Royle G. F. Small graphs with chromatic number 5: a computer search// J. Graph Theory. 1995. V. 19, N 1. P. 107–116.

16. Jensen T., Toft B. Graph Coloring Problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.

17. Koester G. Note to a problem of T. Gallai and G. A. Dirac// Combinatorica. 1985. V. 5, N 3. P. 227–228.

18. Koester G. 4-critical 4-valent planar graphs constructed with crowns// Math. Scand. 1990. V. 67. P. 15–22.

19. Mader W. Über den Zusammenhäng symmetrischer Graphen// Arch. Math. (Basel). 1970. V. 21, N 3. P. 331–336.

20. Mader W. Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen// Arch. Math. (Basel). 1971. V. 22, N 3. P. 333–336.

21. Pyatkin A. V. 6–regular 4–critical graph// J. Graph Theory. 2002. V. 41, N 4. P. 286–291.

22. Watkins M. E. Some classes of hypoconnected vertex-transitive graphs// Recent Progress in Combinatorics. New York: Academic Press, 1969. P. 323–328.

23. Watkins M. E. Connectivity of transitive graphs// J. Combin. Theory. 1970. V. 8, N 1. P. 23–29.

24. Youngs D. A. Gallai's problem on Dirac's construction// Discrete Math. 1992. V. 101, N 1–3. P. 343–350.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия
E-mail: dobr@math.nsc.ru (*А. А. Добрынин*),
omeln@math.nsc.ru (*Л. С. Мельников*),
artem@math.nsc.ru (*А. В. Пяткин*)

Статья поступила
14 мая 2003 г.