ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 2003. Серия 1. Том 10, № 3, 82–105

УДК 519.716

О КРИТЕРИИ НЕЯВНОЙ ШЕФФЕРОВОСТИ В ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ*)

Е. А. Орехова

Установлен критерий неявной шефферовости функций трехзначной логики. Описаны 22 замкнутых класса, невхождение в которые является необходимым и достаточным условием неявной шефферовости в P_3.

Введение

Функция называется шефферовой, если она образует функционально полную систему. Для неявной выразимости [5] естественно возникает аналогичное понятие неявно шефферовой функции — функции, которая одна образует неявно полную систему.

Простейший критерий шефферовости был получен Н. М. Мартином [11] на основе критерия Слупецкого. В дальнейшем на основании результатов Э. Л. Поста, С. В. Яблонского и И. Розенберга были получены другие критерии шефферовости в P_2, P_3 и P_k при $k > 3$.

В случае неявной выразимости известен только критерий неявной шефферовости в P_2, непосредственно вытекающий из результатов О. М. Касим-Заде [2, 4]: в P_2 функция является неявно шефферовой тогда и только тогда, когда она функционально шефферова, т. е. не сохраняет констант и несамодвойственная.

В настоящей статье сформулирован и доказан критерий неявной шефферовости в P_3. Она состоит из трех разделов. В разделе 1 даются необходимые определения и формулируются известные результаты, используемые при доказательстве критерия, в разделе 2 формулируются и доказываются необходимые условия неявной шефферовости, в разделе 3 формулируется и доказывается основная теорема — критерий неявной шефферовости в P_3.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00985), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1807.2003.1) и программы «Университеты России» (проект УР.04.03.007/03).

1. Основные определения и известные результаты

В статье используются понятия и термины из области многозначной логики, такие как функция k-значной логики, суперпозиция функций, замыкание системы функций по суперпозиции и другие. Все недостающие понятия и определения можно найти в [1, 3–9].

Дадим определение понятия неявной выразимости. Оно было введено в рассмотрение А. В. Кузнецовым в работе [5].

Рассмотрим систему Σ функций k-значной логики P_k. Функция f называется *явно выразимой* над системой Σ, если она выразима над системой $\Sigma \bigcup \{x\}$ посредством суперпозиций. Множество всех функций, явно выразимых над системой Σ, называется *явным замыканием* системы Σ. Явное замыкание системы Σ обозначим через $E(\Sigma)$, а замыкание по суперпозиции — через $[\Sigma]$.

Рассмотрим систему уравнений над Σ:

$$\begin{cases} A_1(x_1, \ldots, x_n, y) = B_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ A_2(x_1, \ldots, x_n, y) = B_2(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ A_m(x_1, \ldots, x_n, y) = B_m(x_1, \ldots, x_n, y), \end{cases}$$

где $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ — функции, явно выразимые над системой Σ.

Указанную систему уравнений назовем *неявным представлением* функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, над системой функций Σ, если при любых значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$ система имеет единственное решение относительно y, и $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Функция f называется *неявно выразимой* над системой Σ, если для нее существует неявное представление над Σ.

Множество всех функций, неявно выразимых над системой Σ, называется *неявным расширением* системы Σ. Неявное расширение системы Σ обозначим через $I(\Sigma)$.

Легко проверить, что для всякой системы функций Σ выполняются включения $[\Sigma] \subseteq E(\Sigma) \subseteq I(\Sigma)$.

Система $\Sigma \subseteq P_k$ называется *явно* (*функционально, неявно*) *полной* в P_k, если ее явное замыкание (замыкание по суперпозиции, неявное расширение) совпадает с P_k.

Определение 1. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, где $k \geq 2$, такая, что $[\{f\}] = P_k$, называется *шефферовой* (*функционально шефферовой*).

Определение 2. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$, где $k \geq 2$, такая, что

$I(\{f\}) = P_k$, называется *неявно шефферовой.*

Приведем критерии функциональной шефферовости в P_2 и P_3, необходимые для дальнейшего изложения. Эти критерии можно либо вывести из критериев полноты в P_2 и P_3 соответственно [8], либо получить как следствия из общего критерия Руссо [12].

Теорема I. *Функция f шефферова в P_2 тогда и только тогда, когда она несамодвойственная и не сохраняет констант.*

Под самодвойственной в P_3 функцией всюду понимается функция, самодвойственная относительно циклической подстановки (012) на множестве $E_3 = \{0, 1, 2\}$ (см. [8]).

Теорема II. *Функция f шефферова в P_3 тогда и только тогда, когда она несамодвойственная и не сохраняет констант, двухэлементных подмножеств и нетривиальных разбиений.*

Как было замечено ранее, в P_2 всякая неявно шефферова функция является функционально шефферовой и наоборот. Приведем также два критерия неявной полноты в P_2. Эти результаты были получены О. М. Касим-Заде. Первый из них сформулирован и доказан в работе [4], второй является непосредственным следствием первого.

Под *конъюнкцией* и *дизъюнкцией* всюду в статье понимаются булевы функции двух переменных $x\&y$ и $x \vee y$ соответственно. Понятие перестановочности описано ниже в данном разделе.

Теорема III. *Система функций Σ неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда в ней содержатся функции: нелинейная, несамодвойственная, не сохраняющая константу* 0, *не сохраняющая константу* 1, *не перестановочная с конъюнкцией и не перестановочная с дизъюнкцией.*

Теорема IV. *Система функций Σ неявно полна в P_2 тогда и только тогда, когда над Σ по суперпозиции выразимы константы* 0 *и* 1, *конъюнкция и дизъюнкция.*

Формулировка критерия неявной шефферовости, устанавливаемого в настоящей работе, как и в случае критериев функциональной полноты и шефферовости в P_3, основана на условиях невхождения в некоторые классы функций. В работе описано 22 класса функций трехзначной логики таких, что функция является неявно шефферовой в P_3 тогда и только тогда, когда она не принадлежит ни одному из этих классов. Все эти классы описываются как классы функций, сохраняющих некоторые предикаты.

Понятие сохранения предиката было введено А. В. Кузнецовым [10]. Приведем определение этого понятия и сформулируем несколько известных утверждений (подробнее см. [6, 7]).

Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ *сохраняет предикат* $N(y_1, \dots, y_s)$, если для любых значений переменных $x_{ij} \in E_k$ $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, s)$ из истинности предикатов

$$N(x_{11}, \dots, x_{1s}), N(x_{21}, \dots, x_{2s}), \dots, N(x_{n1}, \dots, x_{ns}),$$

следует истинность предиката

$$N(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), f(x_{12}, \dots, x_{n2}), \dots, f(x_{1s}, \dots, x_{ns})).$$

Имеется эквивалентное понятие. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *сохраняет матрицу*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mt} \end{pmatrix},$$

если для любых, быть может, повторяющихся, столбцов этой матрицы

$$\begin{matrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1}, & a_{2j_2}, & \dots, & a_{2j_n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \dots & a_{mj_n} \end{matrix}$$

столбец

$$\begin{matrix} f(a_{1j_1}, \dots, a_{1j_n}) \\ f(a_{2j_1}, \dots, a_{2j_n}) \\ \dots \\ f(a_{mj_1}, \dots, a_{mj_n}) \end{matrix}$$

также является столбцом той же матрицы.

Всякий предикат от m переменных можно задать матрицей, имеющей m строк. Наоборот, всякой матрице соответствует некоторый предикат. Поэтому понятия сохранения матрицы и сохранения предиката по существу эквивалентны.

Множество всех функций, сохраняющих предикат N, составляет замкнутый по суперпозиции класс и называется *классом сохранения предиката* N. Матрица, соответствующая этому предикату, называется матрицей, *определяющей* рассматриваемый класс.

Например, класс функций трехзначной логики, сохраняющих подмножество $\{0, 2\}$, определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а класс функций трехзначной логики, сохраняющих разбиение $\{0, 1\}, \{2\}$, — матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замкнутый класс может определяться различными матрицами. В частности, матрицы, получающиеся друг из друга перестановкой строк или столбцов, определяют один и тот же класс функций.

Пересечение классов сохранения двух предикатов N_1 и N_2 также является классом сохранения предиката. В качестве такого предиката можно взять прямое произведение предикатов N_1 и N_2.

Прямым произведением предикатов $N_1(x_1, \ldots, x_s)$ и $N_2(x_1, \ldots, x_t)$ называется предикат $N_1(x_1, \ldots, x_s) \& N_2(x_{s+1}, \ldots, x_{s+t})$, обозначаемый через $N_1 \times N_2$.

Матрица, соответствующая предикату $N_1 \times N_2$, получается из матриц предикатов N_1 и N_2 как прямое произведение множеств их столбцов. Например, класс функций трехзначной логики, сохраняющих разбиение $\{0, 1\}, \{2\}$ и подмножество $\{0, 2\}$, определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Важное значение имеет понятие функционального предиката. Предикат называется *функциональным*, если его можно представить в виде $F(x_1, \ldots, x_{s-1}) = x_s$, где $F(x_1, \ldots, x_{s-1}) \in P_k$.

Свойство сохранения функционального предиката эквивалентно свойству перестановочности с соответствующей функцией.

Функции k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_s)$ называются *перестановочными*, если для любых значений переменных $x_{ij} \in E_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, s)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &g(f(x_{11}, \ldots, x_{n1}), f(x_{12}, \ldots, x_{n2}), \ldots, f(x_{1s}, \ldots, x_{ns})) \\ &= f(g(x_{11}, \ldots, x_{1s}), g(x_{21}, \ldots, x_{2s}), \ldots, g(x_{n1}, \ldots, x_{ns})). \end{aligned}$$

Очевидно, что функция f сохраняет функциональный предикат $F(x_1, \ldots, x_{s-1}) = x_s$ тогда и только тогда, когда f перестановочна с функцией F.

Опираясь непосредственно на определение неявной выразимости, нетрудно показать, что если Σ содержится в классе сохранения некоторого функционального предиката и функция f неявно выразима над системой Σ, то f также сохраняет этот функциональный предикат. Следовательно, классы сохранения нетривиальных функциональных предикатов (т. е. таких, что $F \neq x_i$) не являются неявно полными [5].

Для задания функций одной и двух переменных и для оперирования с ними в статье часто будут использоваться таблицы значений. Приведем примеры. Таблица 1а) задает функцию $\max(x_1, x_2)$, а таблица 1б) — функцию $x + 1$.

Таблица 1

$x_2 \backslash x_1$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

а)

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	0

б)

Для удобства будем пользоваться упрощенной записью, иногда заменяя таблицами наименования функций в формулах:

$$\max(x_1, x_2) = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} (x_1, x_2), \quad f(x) = x + 1 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} (x).$$

Если наименования переменных неважны, то в этой записи они будут опускаться. Условимся в таблицах использовать знак «$*$» в тех случаях, когда значение функции на некотором наборе может быть произвольным. В таких случаях рассуждения будут строиться для всего класса функций рассматриваемого вида.

Важное значение имеет двойственность. Функция $g(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется *двойственной* функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ относительно подстановки σ, если для любых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ выполняется соотношение

$$\sigma(f(x_1, \ldots, x_n)) = g(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)).$$

Множество всех функций, двойственных функциям некоторого замкнутого по суперпозиции класса Σ относительно фиксированной подстановки σ, также является замкнутым классом и называется *двойственным* классу Σ относительно этой подстановки. Нетрудно видеть, что двойственные классы и двойственные функции обладают сходными свойствами. В частности, классы одновременно либо неявно полны, либо не полны. То же относится и к функциям с точки зрения их неявной шефферовости.

2. Необходимые условия неявной шефферовости

Сформулируем необходимые условия неявной шефферовости. Впоследствии будет показано, что в совокупности они составляют достаточное условие.

Если функция является шефферовой, то она является и неявно шефферовой. Поэтому функциональная шефферовость может рассматриваться как частный случай неявной шефферовости. Отсюда вытекает, что для установления критерия неявной шефферовости в P_3 достаточно исследовать функции, не являющиеся функционально шефферовыми. В соответствии с критерием функциональной шефферовости в P_3 такими функциями являются самодвойственные, сохраняющие какую-либо константу, двухэлементное подмножество или нетривиальное разбиение. Классы самодвойственных и сохраняющих константы функций являются классами сохранения нетривиальных функциональных предикатов [1]. Как уже говорилось выше, эти классы не полны неявно. Следовательно, если функция самодвойственна или сохраняет константу, то она не является неявно шефферовой. Таким образом, для установления критерия неявной шефферовости в P_3 остается исследовать на неявную шефферовость те функции, которые сохраняют двухэлементное подмножество или нетривиальное разбиение.

2.1. Функции, сохраняющие двухэлементное подмножество

Без ограничения общности будем рассматривать функции, сохраняющие подмножество $\{0,1\}$.

Функции, сохраняющие подмножество $\{0,1\}$, на этом подмножестве ведут себя как булевы функции. Каждой функции $f \in P_3$, сохраняющей подмножество $\{0,1\}$, можно поставить в соответствие булеву функцию f_{01} такую, что для любого набора $\tilde{\alpha}$, состоящего из нулей и единиц, $f(\tilde{\alpha}) = f_{01}(\tilde{\alpha})$. Функцию f_{01} будем называть $\{0,1\}$-*образом* функции f. Отметим, что класс функций, сохраняющих подмножество $\{0,1\}$, является классом сохранения предиката и определяется матрицей

$$Q^{\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если система функций Σ неявно полна, то над ней, в частности, можно неявно выразить все функции, сохраняющие подмножество $\{0,1\}$.

Для систем, сохраняющих подмножество $\{0,1\}$, это означает, что система всех $\{0,1\}$-образов функций системы Σ неявно полна в P_2. Следовательно, если функция неявно шефферова в P_3 и сохраняет подмножество $\{0,1\}$, то ее $\{0,1\}$-образ является неявно шефферовой функцией в P_2. Исходя из этого свойства и из условия теоремы I, определим класс $\{0,1\}$-самодвойственных функций. Укажем также определяющую этот класс матрицу.

1. **Класс $\{0,1\}$-самодвойственных функций.** Функция $f \in P_3$ называется $\{0,1\}$-*самодвойственной*, если $\{0,1\}$-образ функции f является самодвойственной функцией в P_2. Класс $\{0,1\}$-самодвойственных функций обозначим через $\Sigma_S^{\{0,1\}}$. Легко видеть, что этот класс определяется матрицей

$$Q_S^{\{0,1\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольное двухэлементное подмножество $\{a,b\}$. Функции, двойственные функциям из класса $\Sigma_S^{\{0,1\}}$ относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

где $c \neq a$ и $c \neq b$, будем называть $\{a,b\}$-*самодвойственными*. Класс всех $\{a,b\}$-самодвойственных функций обозначим через $\Sigma_S^{\{a,b\}}$.

Из определения класса $\Sigma_S^{\{0,1\}}$ вытекает

Лемма 1. *Класс всех $\{0,1\}$-самодвойственных функций не является неявно полным в P_3.*

2.2. Функции, сохраняющие разбиение

Без потери общности ограничимся рассмотрением случая сохранения разбиения $\{0,1\},\{2\}$. Остановимся более подробно на определении понятия сохранения разбиения.

В дальнейшем изложении используются также некоторые идеи и понятия из работы М. Ф. Раца [6], связанные с описанием строения функций, сохраняющих разбиение, замкнутых классов таких функций и их предикатным описанием.

Определение 3. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ называются *эквивалентными относительно разбиения* $\{0,1\},\{2\}$, если компоненты наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ с одинаковыми номерами либо обе равны 2, либо обе принадлежат множеству $\{0,1\}$.

Определение 4. Функция $f(\tilde{x})$ *сохраняет разбиение* $\{0,1\},\{2\}$, если на любых эквивалентных относительно этого разбиениях наборах функция $f(\tilde{x})$ принимает эквивалентные значения.

Таким образом, определив на множестве наборов произвольной длины n отношение эквивалентности, это множество разбиваем на классы эквивалентности. Класс эквивалентности относительно разбиения $\{0,1\}$, $\{2\}$ называется *блоком эквивалентных наборов* или просто *блоком*. Все наборы одного блока содержат в некоторых $n-s$ фиксированных разрядах значение 2, а в остальных s разрядах — значения 0,1, образующие все возможные поднаборы ($0 \le s \le n$). При этом блок наборов, состоящих только из нулей и единиц (случай $s=n$), будем называть *главным* блоком относительно этого разбиения. На каждом блоке функция f, сохраняющая разбиение $\{0,1\},\{2\}$, либо равна 2, либо принимает только значения 0 и 1. Таким образом, каждому блоку можно сопоставить либо константу 2, либо некоторую булеву функцию, которую будем называть *булевым ограничением* функции f на этом блоке. Исходя из описанного свойства функций, сохраняющих разбиение, и отправляясь от критерия неявной полноты в P_2, сформулированного в теореме III, определим несколько классов функций трехзначной логики. Приведем также матрицы, определяющие эти классы, отметив, что класс функций, сохраняющих разбиение $\{0,1\},\{2\}$, определяется матрицей

$$Q^{\{0,1\},\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **Класс функций, блочно-сохраняющих 0.** Функция $f \in P_3$ называется *блочно-сохраняющей* 0, если все ее булевы ограничения на блоках сохраняют 0. Класс блочно-сохраняющих 0 функций обозначим через $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$. Нетрудно видеть, что все функции из этого класса сохраняют подмножество $\{0,2\}$. Более того, все функции, сохраняющие разбиение $\{0,1\},\{2\}$ и подмножество $\{0,2\}$, являются блочно–сохраняющими 0. Поэтому рассматривая этот класс как пересечение двух классов, получаем определяющую его матрицу

$$Q_0^{\{0,1\},\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. **Класс функций, блочно-сохраняющих 1.** Функция $f \in P_3$ называется *блочно-сохраняющей* 1, если все ее булевы ограничения на блоках сохраняют 1. Класс блочно-сохраняющих 1 функций обозначим

через $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$. Он является двойственным классу $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки (01)(2).

Лемма 2. *Классы функций $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$ и $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$ не являются неявно полными.*

Доказательство. I. Класс $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$. Пусть этот класс неявно полон. Тогда над ним неявно выразима любая функция, в частности, константа 1. В неявном представлении константы 1 должно найтись уравнение $A_i(y) = B_i(y)$ такое, что $A_i(0) \neq B_i(0)$. При этом $A_i(1) = B_i(1)$, поскольку 1 является решением данной системы уравнений. Рассмотрим таблицу значений функций A_i и B_i для двух значений y:

$$\begin{array}{c|c|c} y & A_i & B_i \\ \hline 0 & a & b \\ 1 & c & c \end{array},$$

где $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$, $a \neq b$.

Так как $A_i(0)$ и $B_i(0)$ могут быть равны только 0 или 2, то без ограничения общности будем считать, что $A_i(0) = 0$, $B_i(0) = 2$. Так как 0 и 1 эквивалентны относительно разбиения $\{0, 1\}, \{2\}$, то $B_i(1) = 2$, а $A_i(1) \neq 2$. Тем не менее, $A_i(1) = B_i(1)$. Получили противоречие. Значит, рассматриваемый класс не является неявно полным.

II. Класс $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$. Доказательство следует из двойственности классов $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$ и $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки (01)(2). Лемма доказана.

Так как предикаты $Q_0^{\{0,1\},\{2\}}$ и $Q_1^{\{0,1\},\{2\}}$ описывают классы функций, сохраняющих подмножества $\{0, 2\}$ и $\{1, 2\}$ соответственно, верно следующее утверждение.

Лемма 3. *Класс функций, сохраняющих разбиение $\{0, 1\}, \{2\}$ и подмножество $\{0, 2\}$ или $\{1, 2\}$, не является неявно полным.*

Определение 5. Двухэлементное подмножество множества $E_3 = \{0, 1,\ 2\}$ будем называть *чужим* для разбиения, если элементы рассматриваемого подмножества не эквивалентны относительно этого разбиения. Соответственно, разбиения, относительно которых элементы этого подмножества не эквивалентны, будем называть *чужими* для него.

Следствие 1. *Всякий класс функций, сохраняющих некоторое нетривиальное разбиение и чужое ему подмножество, не является неявно полным.*

Рассмотрим произвольное разбиение $\{a, b\}, \{c\}$. Класс функций, двойственных функциям из класса $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$ (соответственно $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$) относительно подстановки
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$
обозначим через $\Sigma_a^{\{a,b\},\{c\}}$ ($\Sigma_b^{\{a,b\},\{c\}}$).

4. **Класс блочно-линейных функций.** Функция $f \in P_3$ называется *блочно-линейной*, если все ее булевы ограничения на блоках линейны (как булевы функции). Класс блочно-линейных функций обозначим через $\Sigma_L^{\{0,1\},\{2\}}$. Нетрудно проверить, что этот класс определяется матрицей
$$Q_L^{\{0,1\},\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В частности, блочно-линейными являются функции, у которых все булевы ограничения — константы. Такие функции будем называть *блочно-постоянными*.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{a, b\}, \{c\}$. Функции, двойственные функциям из класса $\Sigma_L^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$
будем называть *блочно-линейными* относительно разбиения $\{a, b\}, \{c\}$. Класс всех блочно-линейных относительно разбиения $\{a, b\}, \{c\}$ функций обозначим через $\Sigma_L^{\{a,b\},\{c\}}$.

5. **Класс функций, блочно-перестановочных с конъюнкцией.** Функция $f \in P_3$ называется *блочно-перестановочной с конъюнкцией*, если все ее булевы ограничения на блоках перестановочны с конъюнкцией. Класс блочно-перестановочных с конъюнкцией функций обозначим через $\Sigma_\&^{\{0,1\},\{2\}}$. Этот класс определяется матрицей
$$Q_\&^{\{0,1\},\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение $\{a, b\}, \{c\}$. Функции, двойственные функциям из класса $\Sigma_\&^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

будем называть *блочно-перестановочными с конъюнкцией* относительно разбиения $\{a,b\},\{c\}$. Класс всех блочно-перестановочных с конъюнкцией относительно разбиения $\{a,b\},\{c\}$ функций обозначим через $\Sigma_{\&}^{\{a,b\},\{c\}}$.

6. **Класс функций, блочно-перестановочных с дизъюнкцией.** Функция $f \in P_3$ называется *блочно-перестановочной с дизъюнкцией*, если все ее булевы ограничения на блоках перестановочны с дизъюнкцией. Класс блочно-перестановочных с дизъюнкцией функций обозначим через $\Sigma_{\vee}^{\{0,1\},\{2\}}$. Этот класс является двойственным классу $\Sigma_{\&}^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки (01)(2) и определяется матрицей

$$Q_{\vee}^{\{0,1\},\{2\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольное разбиение $\{a,b\},\{c\}$. Функции, двойственные функциям из класса $\Sigma_{\vee}^{\{0,1\},\{2\}}$ относительно подстановки

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

будем называть *блочно-перестановочными с дизъюнкцией* относительно разбиения $\{a,b\},\{c\}$. Класс всех блочно-перестановочных с дизъюнкцией относительно разбиения $\{a,b\},\{c\}$ функций обозначим через $\Sigma_{\vee}^{\{a,b\},\{c\}}$.

Лемма 4. *Классы* $\Sigma_{L}^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_{\&}^{\{0,1\},\{2\}}$ *и* $\Sigma_{\vee}^{\{0,1\},\{2\}}$ *не являются неявно полными.*

Доказательство. 1. Класс $\Sigma_{L}^{\{0,1\},\{2\}}$. Доказательство от противного. Пусть этот класс неявно полон. Тогда над ним неявно выразима любая функция, в частности, $\min(x_1,x_2)$. В неявном представлении функции $\min(x_1,x_2)$ должно найтись уравнение $A_i(x_1,x_2,y) = B_i(x_1,x_2,y)$ такое, что $A_i(0,0,1) \neq B_i(0,0,1)$. Рассмотрим фрагмент таблицы значений функций A_i и B_i для некоторых наборов

$\tilde{\alpha}$			A_i	B_i
0	0	1	a	b
0	1	0	c	c
1	1	1	d	d
1	0	0	e	e

где $a,b,c,d,e \in \{0,1,2\}$, $a \neq b$.

Так как все столбцы в колонке $\tilde{\alpha}$ принадлежат предикату $Q_{L}^{\{0,1\},\{2\}}$, то и столбцы A_i и B_i тоже должны принадлежать этому предикату. Но в

$Q_L^{\{0,1\},\{2\}}$ нет двух столбцов, отличающихся только в одной строке. Получили противоречие. Значит, рассматриваемый класс не является неявно полным.

2. Класс $\Sigma_\&^{\{0,1\},\{2\}}$. Пусть класс $\Sigma_\&^{\{0,1\},\{2\}}$ неявно полон. Тогда над ним неявно выразима любая функция, в частности, $\max(x_1, x_2)$. В неявном представлении функции $\max(x_1, x_2)$ должно найтись уравнение $A_i(x_1, x_2, y) = B_i(x_1, x_2, y)$ такое, что $A_i(0,0,1) \neq B_i(0,0,1)$. Рассмотрим следующий фрагмент таблицы значений функций A_i и B_i:

$$\begin{array}{ccc|c|c} & \tilde{\alpha} & & A_i & B_i \\ \hline 0 & 1 & 1 & a & a \\ 1 & 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 1 & c & d \end{array},$$

где $a, b, c, d \in \{0,1,2\},\ c \neq d$.

Так как все столбцы в колонке $\tilde{\alpha}$ принадлежат предикату $Q_\&^{\{0,1\},\{2\}}$, то и столбцы A_i и B_i тоже должны принадлежать этому предикату. Но в $Q_\&^{\{0,1\},\{2\}}$ нет двух столбцов, отличающихся только в одной строке. Как и в предыдущем случае, получили противоречие. Значит, рассматриваемый класс не является неявно полным.

3. Класс $\Sigma_\vee^{\{0,1\},\{2\}}$. Этот класс двойствен предыдущему относительно подстановки (01)(2). Поэтому класс $\Sigma_\vee^{\{0,1\},\{2\}}$ не является неявно полным. Лемма доказана.

3. Критерий неявной шефферовости

Сформулируем критерий неявной шефферовости в трехзначной логике.

Обозначим через T_0^3, T_1^3 и T_2^3 классы функций в P_3, сохраняющих константы 0, 1 и 2 соответственно, и через S^3 класс функций, самодвойственных относительно циклической подстановки (012) (эти обозначения соответствуют принятым в [8]).

Теорема 1. *Функция f является неявно шefферовой в P_3 тогда и только тогда, когда она не принадлежит ни одному из следующих* 22 *классов*: T_0^3, T_1^3, T_2^3, S^3, $\Sigma_S^{\{0,1\}}$, $\Sigma_S^{\{0,2\}}$, $\Sigma_S^{\{1,2\}}$, $\Sigma_0^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_0^{\{0,2\},\{1\}}$, $\Sigma_1^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_1^{\{1,2\},\{0\}}$, $\Sigma_2^{\{0,2\},\{1\}}$, $\Sigma_2^{\{1,2\},\{0\}}$, $\Sigma_L^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_L^{\{0,2\},\{1\}}$, $\Sigma_L^{\{1,2\},\{0\}}$, $\Sigma_\&^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_\&^{\{0,2\},\{1\}}$, $\Sigma_\&^{\{1,2\},\{0\}}$, $\Sigma_\vee^{\{0,1\},\{2\}}$, $\Sigma_\vee^{\{0,2\},\{1\}}$, $\Sigma_\vee^{\{1,2\},\{0\}}$.

Как показано выше, непринадлежность функции этим классам является необходимым условием неявной шефферовости. Следовательно, необходимость условий теоремы доказана. Сопоставив условия теоремы 1 с критерием функциональной шефферовости в P_3, можно переформулировать критерий неявной шефферовости следующим образом.

Теорема 2. *Функция f является неявно шефферовой в P_3 тогда и только тогда, когда она не сохраняет констант и удовлетворяет одному из условий*:

1) *f не сохраняет двухэлементных подмножеств, нетривиальных разбиений и не является самодвойственной*;

2) *f сохраняет некоторое двухэлементное подмножество $\{a, b\}$, не сохраняет чужих ему разбиений и не является $\{a, b\}$-самодвойственной*;

3) *f сохраняет некоторое разбиение $\{a, b\}, \{c\}$, не сохраняет двухэлементных подмножеств и относительно этого разбиения не является блочно-линейной, блочно-перестановочной с конъюнкцией и блочно-перестановочной с дизъюнкцией.*

Для доказательства достаточных условий рассмотрим отдельно функции, сохраняющие подмножество и функции, сохраняющие разбиение.

3.1. Функции, сохраняющие подмножество

Без ограничения общности будем считать, что исследуемая на шеферовость функция сохраняет подмножество $\{0, 1\}$.

Теорема 3. *Если функция $f \in P_3$ сохраняет подмножество $\{0, 1\}$, не сохраняет чужих ему разбиений, констант и не является $\{0, 1\}$-самодвойственной, то f является неявно шефферовой в P_3.*

Для доказательства этой теоремы используется несколько лемм.

Лемма 5. *Если функция $f \in P_3$ сохраняет подмножество $\{0, 1\}$, не сохраняет констант и не является $\{0, 1\}$-самодвойственной, то над $\{f\}$ по суперпозиции выразима функция F вида*

$$\begin{matrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{matrix}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из критерия функциональной шефферовости в P_2.

Лемма 6. *Система $\mathfrak{B}$, состоящая из функций*

$$F(x_1, x_2) = \begin{matrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{matrix}, \quad h_1(x) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad h_2(x) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \quad h_3(x) = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix},$$

неявно полна в P_3.

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \text{если } x_1=\alpha_1,\ldots,x_n=\alpha_n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Такая функция принимает только значения 0 и 1, причем значение 1 — только на наборе $\tilde{\alpha}$.

Уравнение $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)=A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_1,\ldots,x_n,y)$ является тождеством при $(x_1,\ldots,x_n)\neq(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, а при $(x_1,\ldots,x_n)= =(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ обращается в верное равенство тогда и только тогда, когда $y=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Написав такие уравнения для всех наборов $\tilde{\alpha}$, получим неявное представление функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

Теперь произвольную функцию вида $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)$ выразим через функции системы $\mathfrak{B}$.

Введем вспомогательную функцию

$$M(x_1,x_2)=\begin{matrix}1&0&*\\0&0&*\\ *&*&*\end{matrix}\left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}(x_1),\ \begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}(x_2)\right)=\begin{matrix}0&0&*\\0&1&*\\ *&*&*\end{matrix}(x_1,x_2).$$

Легко убедиться, что произвольную функцию $A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)$ можно представить в виде суперпозиции функций $M(x_1,x_2)$ и одноместных функций $h_c(x)$, где $c\in\{0,1,2\}$:

$$A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(x_1,\ldots,x_n)=M(\ldots M(M(h_{\alpha_1}(x_1),h_{\alpha_2}(x_2)),h_{\alpha_3}(x_3))\ldots,h_{\alpha_n}(x_n)).$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Система* Σ, *состоящая из функции* F *вида*

$$F(x_1,x_2)=\begin{matrix}1&0&*\\0&0&*,\\ *&*&*\end{matrix}$$

а также двух различных одноместных функций, принимающих только значения 0 *и* 1, *причем значение* 1 *— только на одном наборе, неявно полна в* P_3.

Доказательство. Рассмотрим все возможные пары одноместных функций, удовлетворяющих условиям леммы, и для каждой из них докажем полноту системы Σ. Возможны три случая.

1. Имеется пара функций $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$ и $\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$. Тогда

$$F\left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}(x),\ \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}(x)\right)=\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}(x).$$

2. Имеется пара функций $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$ и $\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$. Тогда

$$F\left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}(x),\ \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}(x)\right)=\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}(x).$$

3. Имеется пара функций $\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$ и $\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$. Тогда

$$F\left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}(x),\ \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}(x)\right)=\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}(x).$$

Во всех трех случаях полученные системы неявно полны по лемме 6. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если функция $f \in P_3$ сохраняет подмножество $\{0,1\}$, не сохраняет чужих ему разбиений, констант и не является $\{0,1\}$-самодвойственной, то над $\{f\}$ по суперпозиции выразимы две различные одноместные функции, принимающие только значения* 0 *и* 1, *причем значение* 1 — *только на одном наборе.*

Доказательство. По лемме 5 над $\{f\}$ по суперпозиции выразима функция F вида: $\begin{matrix}1 & 0 & *\\ 0 & 0 & *\\ * & * & *\end{matrix}$. Далее рассмотрим диагональ функции f, равную $f(x,\ldots,x)$. Обозначим ее через $d(x)$. Эта функция имеет вид $\begin{matrix}1\\0\\a\end{matrix}$, где a равно 0 или 1, поскольку f не сохраняет констант и сохраняет подмножество $\{0,1\}$. Рассмотрим отдельно случаи: $a=0$ и $a=1$.

1) $a = 0$. В качестве одной из двух искомых одноместных функций возьмем $d(x)$. Построим вторую функцию. Выразим по суперпозиции константы 0 и 1:

$$d(d(x)) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\ (x), \quad F\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\ (x),\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\ (x)\right) = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\ , \quad F\left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\ ,\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\ .$$

Функция f не сохраняет разбиения $\{1, 2\}, \{0\}$. Тогда найдутся два набора, эквивалентные относительно этого разбиения, на которых f принимает неэквивалентные значения. Для наибольшей ясности изложения рассмотрим отдельно случай, когда эта пара наборов принадлежит главному блоку, т. е. состоит из 1 и 2, а потом разберем случай пары наборов из произвольного блока.

а) $\tilde{\alpha}$ — набор, состоящий из 1 и 2 такой, что $f(\tilde{\alpha}) \neq 0$. Заметим, что в этом случае достаточно рассмотреть один набор, поскольку $f(1, \ldots, 1)$=0. Подставим в f константу 1 вместо переменных, соответствующих единицам в наборе $\tilde{\alpha}$, и отождествим все остальные переменные. Получим одноместную функцию $h(x) = \begin{matrix} b \\ 0 \\ c \end{matrix}$, где $b \neq 2$, $c \neq 0$. Функцию $d(d(h(x)))$ обозначим через $t(x)$. Она равна $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$. В первом случае получаем искомую одноместную функцию. Во втором случае искомой функцией будет $t(t(x)) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$.

б) $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — наборы, эквивалентные относительно разбиения $\{1, 2\}, \{0\}$, на которых функция f принимает неэквивалентные значения. Поскольку $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ эквивалентны, все нули, присутствующие в этих наборах, находятся в одних и тех же позициях. Подставим в f константу 0 вместо переменных, соответствующих нулям в этой паре наборов. Получим некоторую функцию f' от меньшего числа переменных, принимающую неэквивалентные значения на двух эквивалентных наборах $\tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta}'$, состоящих из 1 и 2. Значит, на одном из двух наборов $\tilde{\alpha}'$ или $\tilde{\beta}'$ значение функции f' неэквивалентно $f'(1, \ldots, 1)$, причем, $f'(1, \ldots, 1) \neq 2$. Подставив в f' константу 1 вместо всех единиц этого набора, получаем функцию $h'(x)$, равную $\begin{matrix} b \\ 0 \\ c \end{matrix}$ или $\begin{matrix} b \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$, где $b \neq 2$, $c \neq 0$. Первый случай уже фактически разобран в предыдущем пункте. Во втором случае функция $h'(x)$ равна $\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}$ или $\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}$. Первая из этих функций удовлетворяет требованиям к искомой функции. Во втором случае $d(h(x)) = \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}.$

2) $a = 1$. В качестве одной из двух искомых одноместных функций возьмем $d(d(x)) = \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}.$ Построим вторую. Выразим по суперпозиции константы 0 и 1:

$$F\left(\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}(x),\ \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}(x)\right) = \begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix},\quad F\left(\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix},\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) = \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}.$$

Поскольку f не сохраняет разбиение $\{0,2\},\{1\}$, используем рассуждение, аналогичное приведенному в пункте 1. Лемма доказана.

Из лемм 5–8 следует утверждение теоремы 3.

3.2. Функции, сохраняющие разбиение

Без ограничения общности будем считать, что исследуемая на шефферовость функция сохраняет разбиение $\{0,1\}$, $\{2\}$. Будем также считать, что эта функция не сохраняет подмножество $\{0,1\}$, поскольку в противном случае применима теорема 3.

Теорема 4. *Если функция $f \in P_3$, сохраняющая разбиение $\{0,1\}$, $\{2\}$, не сохраняет двухэлементных подмножеств и констант, не является блочно-линейной, блочно-перестановочной с конъюнкцией и блочно-перестановочной с дизъюнкцией, то f неявно шефферова в P_3.*

Для доказательства этой теоремы потребуется несколько лемм.

Пусть везде ниже функция $f(x_1,\dots,x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.

Лемма 9. *Над $\{f\}$ по суперпозиции выразимы функции*

$$g_0(x) = \begin{matrix}0\\0\\*\end{matrix},\quad g_1(x) = \begin{matrix}1\\1\\*\end{matrix},\quad g_2(x) = \begin{matrix}2\\2\\\alpha\end{matrix},\quad \text{где } \alpha \neq 2.$$

Доказательство. Функция f сохраняет разбиение $\{0,1\},\{2\}$ и не сохраняет подмножество $\{0,1\}$. Поэтому $f(0,\dots,0) = f(1,\dots,1) = 2$. Так как f не сохраняет константу 2, то $f(2,\ldots,2)\neq 2$. Тогда $f(x,\ldots,x) = g_2(x)$.

Функция f не сохраняет константу 2. Поэтому $f(2,\ldots,2)\neq 2$. Без ограничения общности будем считать, что $f(2,\ldots,2)=0$. Тогда $f(g_2(x), \ldots, g_2(x)) = g_0(x)$.

Функция f не сохраняет подмножество $\{0,2\}$. Поэтому найдется набор, состоящий из 0 и 2, на котором f принимает значение 1. Этот набор обозначим через $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Тогда $f(g_{\alpha_1}(x),\ \ldots, g_{\alpha_n}(x)) = g_1(x)$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Над $\{f\}$ по суперпозиции выразима функция F_1 вида*

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{matrix} \quad \textit{или} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a \end{matrix}\ , \text{ где } a\in\{0,1,2\}.$$

Доказательство. Заметим еще раз, что поскольку f сохраняет разбиение $\{0,1\},\{2\}$ и не сохраняет подмножество $\{0,1\}$, на всех наборах из нулей и единиц f принимает значение 2. Так как функция f не является блочно-постоянной (в этом случае она будет блочно-линейной), то найдется блок эквивалентных относительно разбиения $\{0,1\},\{2\}$ наборов, на которых f принимает разные значения: 0 и 1. Тогда в этом блоке найдутся два соседних набора с таким свойством, различающиеся только в i-й компоненте. Обозначим эти наборы через $\tilde{\beta} = (\beta_1,\ldots,0,\ldots,\beta_n)$ и $\tilde{\beta}' = (\beta_1,\ldots,1,\ldots,\beta_n)$. Подставим в функцию F переменную x вместо переменной x_i, а вместо каждой переменной x_j — функцию $g_{\beta_j}(x)$, если $\beta_j\in\{0,1\}$, и переменную y, если $\beta_j = 2$. Получим одну из функций: $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ a & b & c \end{matrix}$. Без ограничения общности будем считать, что получена первая из этих функций, в случае второй функции рассуждения аналогичны. Заметим, что из условия сохранения разбиения следует, что a и b одновременно равны или не равны 2. Если $a=b=2$, то искомая функция получена. Пусть a и b не равны 2. Рассмотрим два случая возможных значений c.

1) $c = 2$. Имеем функцию $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & 2 \end{matrix}$. По лемме 9 над $\{f\}$ по супер-

позиции выразима функция $g_2(x)$. Используя ее, получаем

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & 2 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & 2 \end{matrix} (x,y), \begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{matrix} (x,y) \right) = \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \beta \end{matrix} (x,y), \beta \neq 2.$$

2) $c \neq 2$. Имеем функцию $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{matrix}$. По лемме 9 над $\{f\}$ посредством суперпозиции выразима функция $g_2(x)$. Используя ее, получаем

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{matrix} \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} (x,y), \begin{matrix} 2 & 2 & \alpha \\ 2 & 2 & \alpha \\ 2 & 2 & \alpha \end{matrix} (x,y) \right) = \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ c & c & c' \end{matrix} (x,y),$$

где $c' \neq 2$. Заметив, что

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{matrix} \left(x, \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ \alpha \end{matrix} (x) \right) = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ d \end{matrix} (x),$$

где $d \neq 2$, получаем искомую функцию

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ a & b & c \end{matrix} \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ d & d & d \end{matrix} (x,y), \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ c & c & c' \end{matrix} (x,y) \right) = \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix} (x,y).$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Над $\{f\}$ по суперпозиции выразимы функции*

$$F_2(x_1,x_2) = \begin{matrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & * \end{matrix}, \quad F_3(x_1,x_2) = \begin{matrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & * \\ * & * & * \end{matrix}.$$

Доказательство. По условию найдутся блоки, на которых булевыми ограничениями функции f являются: нелинейная функция, а также не перестановочная с конъюнкцией и не перестановочная с дизъюнкцией. Подставляя в f функцию $g_2(x)$ (лемма 9), получаем функции, имеющие на главном блоке в качестве булевых ограничений соответственно: нелинейную, не перестановочную с конъюнкцией и не перестановочную с дизъюнкцией функции. По лемме 9 над f по суперпозиции выразимы функции g_0 и g_1, имеющие на главном блоке в качестве булевых ограничений константы 0 и 1, т. е. булевы функции, не сохраняющие соответственно константу 1 и константу 0 и несамодвойственные. Воспользовавшись теперь теоремой III, а затем теоремой IV, получаем искомые функции. Лемма доказана.

Лемма 12. *Система Σ, состоящая из функций F_1, F_2, F_3, g_0, g_1 и g_2,*

$$F_1(x_1,x_2) = \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1, \\ 2 & 2 & a \end{matrix} \quad F_2(x_1,x_2) = \begin{matrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & *, \\ * & * & * \end{matrix} \quad F_3(x_1,x_2) = \begin{matrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 1 & *, \\ * & * & * \end{matrix}$$

где $a \in \{0,1,2\}$,

$$g_0(x) = \begin{matrix} 0 \\ 0, \\ * \end{matrix} \quad g_1(x) = \begin{matrix} 1 \\ 1, \\ * \end{matrix} \quad g_2(x) = \begin{matrix} 2 \\ 2, \\ \alpha \end{matrix} \quad \text{где } \alpha \neq 2,$$

неявно полна в P_3.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in P_3$ и построим ее неявное представление над Σ следующим образом. Для каждого набора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta)$, где $\beta \neq \varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, составим уравнение, которое будет обращаться в верное равенство на всех наборах, кроме набора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta)$, на котором равенством не будет.

Достаточно доказать, что для любого набора $\tilde{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_{n+1})$ найдутся функции $A(x_1,\dots,x_{n+1})$ и $B(x_1,\dots,x_{n+1})$, совпадающие на всех наборах, кроме $(\gamma_1,\dots,\gamma_{n+1})$.

Введем обозначения:

$$K^s(x_1,\dots,x_s) = F_2(F_2(\dots F_2(x_1,x_2),x_3),\dots,x_s),$$
$$D^s(x_1,\dots,x_s) = F_3(F_3(\dots F_3(x_1,x_2),x_3),\dots,x_s).$$

Покажем, что для любого набора $\tilde{\gamma}$ такого, что $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$, $\gamma_{m+1} = \dots = \gamma_t = 1$ и $\gamma_{t+1} = \dots = \gamma_{n+1} = 2$, над системой Σ явно выразимы функции A_1 и B_1, которые всюду на блоке, содержащем $\tilde{\gamma}$, совпадают и принимают различные значения только на наборе $\tilde{\gamma}$. Группы компонент, равных 0, 1 или 2, в наборе $\tilde{\gamma}$ могут, вообще говоря, отсутствовать. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $m = t = 0$. Тогда рассматриваемый блок состоит из единственного набора $\tilde{\gamma}$ и $A_1(\tilde{x}) = g_0(g_2(x_n))$, $B_1(\tilde{x}) = g_1(g_2(x_n))$.

2) $m = 1$, $t = 0$. Тогда $A_1(\tilde{x}) = x_1$, $B_1(\tilde{x}) = g_1(x_1)$.

3) $m \geq 2$, $t = 0$. Тогда $A_1(\tilde{x}) = D^m(x_1,\dots,x_m)$, $B_1(\tilde{x}) = g_1(x_1)$.

4) $m=0$, $t=1$. Тогда $A_1(\tilde{x})=g_0(x_1)$, $B_1(\tilde{x})=x_1$.

5) $m=0$, $t\geq 2$. Тогда $A_1(\tilde{x})=K^t(x_1,\ldots,x_t)$, $B_1(\tilde{x})=g_0(x_1)$.

6) $m>0$, $t>0$. Тогда $A_1(\tilde{x}) = K^{m+1}(x_1,\ldots,x_m,g_0(x_{m+1}))$, $B_1(\tilde{x})=K^{m+1}(x_1,\ldots,x_m,D^{t-m+1}(x_{m+1},\ldots,x_t,g_1(x_1)))$ (по существу, использование функций $g_0(x_{m+1})$ и $g_1(x_1)$ необходимо лишь при $m=1$ и $t=1$ соответственно).

Возьмем произвольную функцию $g(x_1,\ldots,x_s)$. Рассмотрим функцию

$$F_1(g(x_1,\ldots,x_s),y)=\begin{cases} g(\tilde{x}) & \text{при } y=2, g(\tilde{x})\in\{0,1\},\\ 2 & \text{при } y\in\{0,1\},\\ a & \text{при } y=2, g(\tilde{x})=2.\end{cases}$$

Тогда

$$F_1(g(x_1,\ldots,x_s),g_2(y))=\begin{cases} g(\tilde{x}) & \text{при } y\in\{0,1\}, g(\tilde{x})\in\{0,1\},\\ 2 & \text{при } y=2,\\ a & \text{при } y\in\{0,1\}, g(\tilde{x})=2.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь функции $A(x_1,\ldots,x_{n+1})$ и $B(x_1,\ldots,x_{n+1})$, полагая:

$$A=(F_1(\ldots F_1(\ldots F_1(A_1(\tilde{x}),g_2(x_1)),g_2(x_2)),\ldots,g_2(x_t)),x_{t+1}),\ldots,x_{n+1}),$$
$$B=(F_1(\ldots F_1(\ldots F_1(B_1(\tilde{x}),g_2(x_1)),g_2(x_2)),\ldots,g_2(x_t)),x_{t+1}),\ldots,x_{n+1}).$$

Эти функции не совпадают только на одном блоке, на котором они равны A_1 и B_1 соответственно, и различны только на наборе $\tilde{\gamma}$. На остальных блоках по построению $A=B$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Система Σ, состоящая из функций F_1', F_2, F_3, g_0, g_1 и g_2,*

$$F_1'(x_1,x_2)=\begin{matrix} 2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & a\end{matrix}, F_2(x_1,x_2)=\begin{matrix} 0 & 0 & *\\ 0 & 1 & *\\ * & * & *\end{matrix}, F_3(x_1,x_2)=\begin{matrix} 0 & 1 & *\\ 1 & 1 & *\\ * & * & *\end{matrix},$$

где $a\in\{0,1,2\}$,

$$g_0(x)=\begin{matrix}0\\0\\ *\end{matrix}, g_1(x)=\begin{matrix}1\\1\\ *\end{matrix}, g_2(x)=\begin{matrix}2\\2\\ \alpha\end{matrix},$$

где $\alpha\neq 2$, неявно полна в P_3.

Доказательство. Выразим функцию F_1 вида $\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & b \end{matrix}$, где $b \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a \end{matrix} \left(x, \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ \alpha \end{matrix} (x) \right) = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} (x),$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & a \end{matrix} \right) (x_1, x_2) = \begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & b \end{matrix} (x_1, x_2).$$

Всопользовавшись теперь леммой 12, заключаем, что система Σ неявно полна. Лемма доказана.

Утверждение теоремы 4 следует из лемм 9–13. Критерий неявной шефферовости в P_3 полностью доказан.

Литература

1. **Данильченко А. Ф.** О параметрической выразимости функций трехзначной логики // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.
2. **Касим-Заде О. М.** О неявной выразимости булевых функций// Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.
3. **Касим-Заде О. М.** Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций// Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 133–188.
4. **Касим-Заде О. М.** О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр// Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.
5. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости// Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.
6. **Раца М. Ф.** О классе функций трехзначной логики, соответствующем первой матрице Яськовского// Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 185–214.
7. **Толстова Ю. Н.** О моделировании l-значной логики в k-значной $(k > l)$// Проблемы кибернетики. Вып. 18. М.: Наука, 1967. С. 67–82.
8. **Яблонский С. В.** Функциональные построения в k-значной логике// Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360. (Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова; Т. LI.).

9. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001.
10. **Яновская С. А.** Математическая логика и основания математики// Математика в СССР за сорок лет. Т. I. М.: Физматлит, 1959. С. 13–120.
11. **Martin N. M.** The Sheffer functions of 3-valued logic// J. Symbolic Logic. 1954. V. 19, N 1. P. 45–51.
12. **Rousseau G.** Completeness in finite algebras with a single operation// Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18, N 6. P. 1009–1013.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119992 Москва,
Россия

Статья поступила
17 июня 2003 г.