ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2003. Серия 1. Том 10, № 4, 3–7

УДК 519.172.2

О ЛИНЕЙНЫХ ФАКТОРАХ МУЛЬТИГРАФОВ

В. Г. Визинг

Усиливается теорема автора о линейных факторах ориентированных мультиграфов.

Рассматриваются мультиграфы без петель. Максимальная степень вершины мультиграфа G обозначается через $\Delta(G)$. Граф G называется *мультиграфом* степени Δ, если $\Delta(G) = \Delta$. Мультиграф называется *однородным,* если степени всех его вершин одинаковы.

Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф, V и E — множества его вершин и ребер соответственно. Подграф $F = (V, E')$ называется 2-*фактором* в мультиграфе G, если $E' \subseteq E$ и $\Delta(F) \leqslant 2$. Если при этом F является однородным мультиграфом степени 2, то он называется *однородным* 2-*фактором.* Будем говорить, что 2-фактор *касается* вершины v, если степень этой вершины в факторе больше 0, и *насыщает* вершину v, если ее степень в факторе равна 2. Если $G = (V, A)$ — ориентированный мультиграф, где V — множество вершин, A — множество дуг, то кроме максимальной степени $\Delta(G)$, мы будем рассматривать максимальную полустепень $\sigma(G)$. Очевидно, что $\sigma(G) \leqslant \Delta(G)$.

Линейным фактором ориентированного мультиграфа называется такой 2-фактор L, что $\sigma(L) \leqslant 1$. Понятие линейного фактора было введено в статье [1]. Там же была доказана следующая ниже лемма 1, для формулировки которой понадобятся еще некоторые понятия.

Пусть H — неориентированный мультиграф. Пару его различных вершин назовем *высокой,* если сумма степеней этих вершин не меньше $\Delta(H)$. Пусть W — паросочетание в мультиграфе H. Будем говорить, что W *насыщает* некоторую вершину, если в W есть ребро, инцидентное этой вершине, и W касается некоторой пары вершин, если W насыщает хотя бы одну вершину пары.

Лемма 1. *Пусть H — неориентированный мультиграф, S — такое множество высоких пар без общих элементов, что подграф, порожденный элементами пар из S, является двудольным. Тогда существует паросочетание W, касающееся каждой пары из S.*

Доказательство этой леммы имеется в [1].

Теорема 1. *Пусть $G = (V, A)$ — ориентированный мультиграф; k — целое число, удовлетворяющее неравенствам $\sigma(G) \leqslant k \leqslant \Delta(G)$; V' — некоторое подмножество вершин, степень каждой из которых не меньше k; V'' — некоторое подмножество вершин из $V \setminus V'$, степень каждой из которых не больше k. Тогда существует линейный фактор мультиграфа G, касающийся всех вершин множества V' и не насыщающий ни одной вершины из множества V''.*

Доказательство. Рассмотрим двудольную интерпретацию $B(G)$ мультиграфа G, которая строится следующим образом. Каждой вершине $v \in V$ соответствуют две вершины v^+ и v^- мультиграфа $B(G)$, называемые образами вершины v; каждой дуге $(u, v) \in A$ соответствует звено (u^+, v^-) мультиграфа $B(G)$, называемое образом дуги (u, v). Очевидно, что $B(G)$ является неориентированным двудольным мультиграфом таким, что $\Delta(B(G)) = \sigma(G)$; при этом степень любой вершины мультиграфа G равна сумме степеней в $B(G)$ образов этой вершины.

Теперь склеим оба образа каждой вершины из V''. Так как степень каждой вершины из V'' не больше k, то после склеивания из мультиграфа $B(G)$ получится мультиграф H с $\Delta(H) \leqslant k$. Так как склеиваются несмежные вершины, то петли не возникают. Будем считать, что мультиграф H имеет то же множество звеньев (хотя и, быть может, с другими концевыми вершинами), что и мультиграф $B(G)$.

Обозначим через S множество пар (v^+, v^-) мультиграфа H, где $v \in V'$. Так как степень каждой вершины из V' не меньше k, то в H сумма степеней двух элементов каждой пары не меньше $k \geqslant \Delta(H)$; следовательно, каждая пара из S является высокой. Кроме того, подграф мультиграфа H, порожденный элементами пар из S, является двудольным. По лемме 1 в H существует паросочетание W, касающееся каждой пары из S. Обозначим через A' подмножество дуг мультиграфа G, образами которых являются звенья из W. Легко видеть, что фактор $L = (V, A')$ мультиграфа G является линейным, касается каждой вершины из V' и не насыщает ни одной вершины из V''. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть $G = (V, A)$ — ориентированный мультиграф*

степени Δ и V' — некоторое подмножество вершин степени Δ. Тогда в G имеется линейный фактор, касающийся каждой вершины из множества V' и не насыщающий ни одной вершины из множества $V \setminus V'$.

В статье [1] (теорема 5) из леммы 1 выводится следующее более слабое

Утверждение 1. *Любой ориентированный мультиграф имеет линейный фактор, касающийся всех вершин максимальной степени.*

Утверждение 1 использовалось в работах [1] и [3] для задач раскраски инциденторов. Однако утверждение 1 может оказаться недостаточным для решения других задач теории графов. Приведем примеры.

Следствие 2. *Пусть $G = (V, A)$ — ориентированный мультиграф с $\sigma(G) = \Delta(G)$; V' — такое подмножество вершин, одна из полустепеней которых равна $\Delta(G)$. Тогда существует паросочетание, насыщающее все вершины из V'.*

Доказательство. По следствию 1 существует линейный фактор L, касающийся всех вершин из V' и не насыщающий ни одной вершины из $V \setminus V'$. Так как линейный фактор не может насыщать ни одну вершину из V', то L является паросочетанием. Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Пусть $H = (V, E)$ — неориентированный мультиграф степени Δ; V_j — некоторые непересекающиеся подмножества попарно несмежных вершин степени Δ ($j = 1, 2$). Тогда в H имеется паросочетание, насыщающее все вершины из $V_1 \bigcup V_2$.*

Доказательство. Соориентируем звенья мультиграфа H так, чтобы в полученном ориентированном мультиграфе полустепени исхода вершин из V_1 и полустепени захода вершин из V_2 были равны Δ. После этого воспользуемся следствием 2. Следствие 3 доказано.

Любопытно отметить, что следствие 3 является обобщением известного факта, связанного с теоремами Кенига и Холла [2]: в двудольном мультиграфе существует паросочетание, насыщающее все вершины максимальной степени.

Следствие 4. *Пусть $H = (V,E)$ — неориентированный мультиграф степени Δ. Тогда в H имеется 2-фактор, касающийся всех вершин, степени которых не меньше $\Delta/2$. Этот 2-фактор всегда может быть выбран так, чтобы он не насыщал ни одной вершины, степень которой меньше $\Delta/2$.*

Доказательство. Очевидно, что звенья мультиграфа H можно сориентировать так, чтобы получился ориентированный мультиграф G

с $\sigma(G) = \lceil\Delta/2\rceil$. По теореме 1 в мультиграфе G существует линейный фактор, который касается всех вершин, степени которых не меньше $\lceil\Delta/2\rceil$, и не насыщает ни одной вершины, степень которой меньшей $\lceil\Delta/2\rceil$. Этот фактор и будет требуемым 2-фактором в мультиграфе H. Следствие 4 доказано.

Доказательство леммы 1, содержащееся в работе [1], является довольно сложным. А. Гиарфаш (A. Gyarfas) (устное сообщение) привел доказательство утверждения 1, не опирающееся на лемму 1. Приведем доказательство утверждения 1, которое немного упрощает доказательство А. Гиарфаша благодаря использованию следующей леммы.

Лемма 2. *В любом однородном мультиграфе G степени $\Delta \geqslant 1$ имеется 2-фактор F, касающийся всех вершин, в котором каждая компонента связности является либо ребром, либо циклом.*

Доказательство. Каждое ребро мультиграфа G заменим пучком из двух ребер с теми же концевыми вершинами. Получится однородный мультиграф H четной степени 2Δ. По теореме Петерсена [4] в нем имеется однородный 2-фактор K. Каждая компонента связности фактора K является простым циклом, отличным от изолированной вершины. Циклу фактора K, длина которого не меньше 3, очевидным образом соответствует простой цикл в мультиграфе G, а циклу длины 2 — ребро мультиграфа G. Таким образом, в мультиграфе G имеется 2-фактор требуемого вида. Лемма 2 доказана.

Доказательство утверждения 1. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что G — однородный ориентированный мультиграф степени $\Delta \geqslant 1$. Рассмотрим в мультиграфе G 2-фактор F , обладающий свойством, указанным в лемме 2. Достаточно доказать, что в каждой компоненте связности фактора F имеется линейный фактор, касающийся всех ее вершин. Если компонента отлична от цикла нечетной длины, то таким линейным фактором является паросочетание, насыщающее все вершины компоненты. Если же компонента является циклом нечетной длины, то путь длины 2 и паросочетание, насыщающее все вершины, не принадлежащие этому пути, будут линейными факторами, которые касаются всех вершин компоненты. Утверждение 1 доказано.

Автор благодарен А. Гиарфашу за любезное разрешение включить в настоящую статью доказательство утверждения 1, основанное на его идее, а также Б. Тофту за внимание и полезные советы.

Литература

1. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инциденторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
2. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
3. **Пяткин А. В.** Некоторые верхние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 66–78.
4. **Petersen J.** Die Theorie der regularen Graphen// Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

Адрес автора:

ул. Варненская, 18/2, кв. 26,
65039 Одесса,
Украина,
E-mail: vizing@paco.net

Статья поступила
22 июля 2003 г.