ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2003. Серия 1. Том 10, № 4, 8–30

УДК 519.17

О БЕЗУСЛОВНЫХ РЕБЕРНЫХ ТЕСТАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ГРАФОВ*)

Е. В. Дебрев

Исследуется задача о построении минимальных безусловных реберных тестов для регулярных, т. е. замкнутых относительно изоморфизма, семейств графов. Предложена классификация регулярных семейств графов по порядку роста величины объема минимального безусловного реберного теста.

Введение

В статье рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер с n помеченными вершинами. Вершинами каждого такого графа являются элементы множества $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество всех таких графов обозначается через $\mathcal{G}^*(n)$.

Пусть $\mathcal{G}(n)$ — произвольное семейство графов из $\mathcal{G}^*(n)$. Ниже рассматривается следующая задача распознавания графов из $\mathcal{G}(n)$. Пусть G — заранее неизвестный фиксированный граф из $\mathcal{G}(n)$. Требуется распознать этот граф с помощью ответов на вопросы: смежны или несмежны в G две предъявленные вершины (есть ли в G ребро, соединяющее эти вершины). После получения ответа на все заданные вопросы остальные ребра в графе G распознаются однозначно.

Ясно, что если $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}^*(n)$, то для распознавания графа G требуется получить ответ на $\binom{n}{2}$ вопросов (величина $\binom{n}{2}$ равна числу пар вершин в G). Однако для многих семейств можно использовать меньшее число проверок и закономерно возникает вопрос о том, каким минимальным числом вопросов можно обойтись для каждого конкретного семейства $\mathcal{G}(n)$ графов с вершинами из V_n.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00985), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1807.2003.1) и программы «Университеты России» (проект УР. 04.03.007/03).

Рассматриваемая задача относится к числу задач комбинаторного поиска (см. [5, 12]). В таких задачах, как правило, фиксируется множество искомых объектов $\mathcal{G}$ и множество допустимых проверок $\mathcal{F}$, которые понимаются как функции на $\mathcal{G}$ со значениями в некотором фиксированном множестве. Требуется построить алгоритм распознавания неизвестного объекта $X \in \mathcal{G}$. На каждом шаге такой алгоритм может выполнить любую проверку из $\mathcal{F}$, а результатом его работы является искомый объект $X \in \mathcal{G}$. Каков бы ни был искомый объект $X \in \mathcal{G}$, алгоритм, выполнив некоторое количество проверок, должен однозначно идентифицировать объект X.

В описанной постановке задачи искомыми объектами являются графы с множеством вершин V_n, а проверками — функции, заданные на семействе $\mathcal{G}(n)$ и отвечающие всевозможным неупорядоченным парам вершин. Каждая такая функция равна 1 на графах, в которых проверяемая пара вершин смежна, и 0 на остальных графах из $\mathcal{G}(n)$. Такие проверки называются *реберными.*

Если в алгоритме распознавания графа из $\mathcal{G}(n)$ выбор каждой последующей проверки не зависит от информации, полученной на предыдущих проверках, то такой алгоритм называется *безусловным* тестом (см. [8, 9, 11]). Для безусловных тестов под объемом (или сложностью) теста понимается число проверок в нем.

Рассматривают также условные тесты, т. е. алгоритмы распознавания, в которых на каждом шаге выполняется проверка, вообще говоря, зависящая от информации, полученной на предыдущих шагах. В случае условного теста число выполненных проверок зависит от искомого графа. Из всех возможных мер сложности безусловных тестов две получили наибольшее распространение: максимальное число проверок по всем графам из семейства $\mathcal{G}(n)$ (длина теста в худшем случае) и среднее число проверок по всем графам из $\mathcal{G}(n)$ (длина теста в среднем).

Тесты (как условные, так и безусловные), в которых проверки являются реберными, называются *реберными* тестами.

Для некоторых семейств графов условные реберные тесты изучались в [12, раздел 3.5], где найдено точное значение длины условного теста (в худшем случае) для каждого из следующих семейств: всех деревьев из $\mathcal{G}^*(n)$, всех полных звезд с вершинами из V_n и всех максимальных паросочетаний с вершинами из V_n. Кроме того, в [12, раздел 3.5] установлены точные (по порядку) оценки длины условного теста (в худшем случае) для семейства всех гамильтоновых циклов из $\mathcal{G}^*(n)$.

В работе [14] (см. также [13, глава 2]) были исследованы условные тесты, в которых проверки имеют иной вид. А именно, для любой клики C можно получить ответ на вопрос: «имеется ли в C по меньшей мере одно ребро, содержащееся в распознаваемом графе?» Там же исследован случай условных тестов, в которых проверка для произвольной клики C позволяет устанавливать число ребер, общих для C и искомого графа; результатом такой проверки является целое число, не превосходящее числа ребер в клике C. В указанных работах приводятся точные (с точностью до порядка) оценки длины условного теста (в худшем случае).

В настоящей статье рассматриваются безусловные реберные тесты для графов из нескольких семейств $\mathcal{G}(n)$.

Перейдем к формальным определениям. Далее будут использоваться обозначения, в основном заимствованные из [4, 7].

Рассматриваются графы из $\mathcal{G}^*(n)$. Множество всех ребер полного графа из $\mathcal{G}^*(n)$ будем обозначать через E_n; его мощность равна $n(n-1)/2$. Ребро, соединяющее вершины u и v, будем обозначать через uv (или vu). Два графа из $\mathcal{G}^*(n)$ *равны,* если множества их ребер одинаковы. В том случае, когда речь будет идти о подграфе G графа из $\mathcal{G}^*(n)$, множество его вершин будем обозначать через $V(G)$. Множество ребер графа G будем обозначать через $E(G)$.

Дополнением графа G из $\mathcal{G}^*(n)$ будем называть граф с множеством вершин V_n с множеством ребер $E_n \setminus E(G)$. Дополнение графа G будем обозначать через $\overline{G}$.

Под *симметрической разностью* графов G_1 и G_2 понимается граф с множеством ребер, равным симметрической разности $E(G_1) \triangle E(G_2)$, который будет обозначаться через $G_1 \triangle G_2$. Иными словами, ребро из E_n принадлежит графу $G_1 \triangle G_2$ тогда и только тогда, когда оно принадлежит только одному из графов G_1, G_2.

Пусть $\mathcal{G}(n)$ — семейство графов из $\mathcal{G}^*(n)$. Будем говорить, что ребро $r \in E_n$ *различает* графы G_1 и G_2 из $\mathcal{G}(n)$, если r принадлежит только одному из графов G_1, G_2. Иными словами, ребро r различает графы G_1 и G_2, если оно содержится в их симметрической разности. Множество ребер $T \subseteq E_n$ образует *безусловный тест* для семейства $\mathcal{G}(n)$, если для любых двух различных графов G_1 и G_2 из $\mathcal{G}(n)$ найдется ребро $r \in T$, различающее графы G_1 и G_2. Далее будут рассматриваться только безусловные тесты, поэтому слово «безусловный» будет опускаться.

Число ребер в тесте называется *объемом* теста. Для фиксированного семейства графов $\mathcal{G}(n)$ рассмотрим все тесты. Минимум величины объема теста, взятый по всем тестам для $\mathcal{G}(n)$, обозначается через $L(\mathcal{G}(n))$. Тесты для графов из семейства $\mathcal{G}(n)$, объем которых равен $L(\mathcal{G}(n))$, называются *минимальными*.

Для любого семейства $\mathcal{G}(n)$ графов ребра каждого теста образуют некоторый граф из $\mathcal{G}^*(n)$. Каждый граф из $\mathcal{G}^*(n)$, ребра которого являются тестом для семейства $\mathcal{G}(n)$, называется *различающим* для этого семейства. Дополнение различающего графа для семейства $\mathcal{G}(n)$ называется *коразличающим* графом для того же семейства. Число ребер в различающем графе, очевидно, есть объем теста. Различающий граф, соответствующий минимальному тесту для графов из $\mathcal{G}(n)$, называется *минимальным*.

Задача о построении тестов минимального объема для некоторых семейств графов $\mathcal{G}(n)$ рассматривалась в [2, 3].

Сформулируем основные результаты работы [3].

Среди графов из $\mathcal{G}^*(n)$ рассмотрим такие графы, каждый из которых состоит из двух компонент связности, а каждая компонента является полным графом (кликой). Семейство графов, в которых компоненты связности являются p-вершинными и $(n-p)$-вершинными кликами, $1 \leqslant p \leqslant n/2$, обозначим через $\mathcal{K}_{p,n-p}$. Отметим, что при фиксированных значениях n и p все графы семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$ попарно изоморфны.

Пусть $\mathcal{K}(n) = \bigcup\limits_{p=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{K}_{p,n-p}$. Обозначим через $\mathcal{K}_0(n)$ семейство, полученное из $\mathcal{K}(n)$ добавлением полного графа K_n.

Ниже приводятся формулировки основных результатов работы [3]. Они будут использованы в настоящей статье.

Утверждение 1 [3, лемма 2]. *Пусть G — различающий граф для семейства $\mathcal{K}(n) \subseteq \mathcal{K}_0(n)$. Тогда остовный лес*[*1)] *графа G также является различающим графом для $\mathcal{K}(n)$.*

Утверждение 2 [3, теорема 1]. *Минимальные различающие графы для $\mathcal{K}_0(n)$ — это в точности n-вершинные деревья.*

Утверждение 3 [3, теорема 2]. *При любом $n \geqslant 3$ справедливо равенство*

$$L(\mathcal{K}(n)) = L(\mathcal{K}_0(n)) = n - 1.$$

Утверждение 4 [3, теорема 3]. *Пусть $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant p \leqslant n/2$. Если граф G является различающим для семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$, то в зависимости от числа связных компонент в G выполнено одно из следующих трех*

[*1)] *Остовным* лесом графа G называется любой подграф графа G, являющийся объединением остовных деревьев связных компонент графа G. Отметим, что остовное дерево изолированной вершины есть сама вершина.

утверждений:

1) *граф* G *связен;*

2) *граф* G *состоит из двух связных компонент, среди которых нет четной*[*2)] *компоненты размера не более* $2p$*;*

3) *граф* G *состоит не менее чем из трех связных компонент, среди которых нет двух различных нечетных компонент, сумма размеров которых не превышает* $2p$*, и нет четной компоненты размера не более* $2p$*.*

Обратно, если выполнено одно из утверждений 1–3, то граф G *является различающим для семейства* $\mathcal{K}_{p,n-p}$*.*

Утверждение 5 [3, теорема 4]. *При любых* p *и* $n \geqslant 2p$ *выполнено равенство*

$$L(\mathcal{K}_{p,n-p}) = n - k(n,p),$$

где $k(n,p)$ *определяется следующим образом*:

1) *если* $2p \leqslant n \leqslant 3p+2$, *то*

$$k(n,p) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2p+1, \\ 2 & \text{при } n \neq 2p+1; \end{cases}$$

2) *если* $3p+3 \leqslant n \leqslant 4p+2$, *то*

$$k(n,p) = \begin{cases} 2 & \text{при четном } n, \\ 3 & \text{при нечетном } n; \end{cases}$$

3) *если* $n \geqslant 4p+3$ *и* p *четно, то*

$$k(n,p) = \begin{cases} q & \text{при четном } r, \\ q-1 & \text{при нечетном } r, \end{cases}$$

где q *и* r *удовлетворяют равенству*

$$n = (p+1)q + r, \quad 0 \leqslant r < p+1;$$

4) *если* $n \geqslant 4p+3$ *и* p *нечетно, то*

$$k(n,p) = \begin{cases} q & \text{если } r \text{ четно или } r \geqslant p, \\ q-1 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

где q *и* r *удовлетворяют равенству*

$$n+2 = (p+2)q + r, \quad 0 \leqslant r < p+2.$$

[*2)] Четной называется связная компонента с четным числом вершин. Аналогично, нечетной — с нечетным числом вершин.

Нетрудно видеть, что утверждения 1, 2 и 3 полностью описывают минимальные различающие графы для семейств $\mathcal{K}(n)$ и $\mathcal{K}_0(n)$ при всех $n \geqslant 3$ (случай $n = 2$ тривиален). Это произвольные n-вершинные деревья.

В случае семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$ всякий минимальный различающий граф является лесом; число ребер в таком лесе равно $n - k(n,p)$, где $k(n,p)$ — число связных компонент леса, зависящее от n и p. Утверждение 4 является необходимым и достаточным условием того, чтобы лес был различающим графом для семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$. Утверждение 5 дает точное значение величины $L(\mathcal{K}_{p,n-p})$ при всех n и p.

Таким образом, в работе [3] найдено точное значение величины $L(\cdot)$ для всех семейств $\mathcal{K}_{p,n-p}$, для семейств $\mathcal{K}(n)$ и $\mathcal{K}_0(n)$, а также охарактеризованы все минимальные различающие графы.

В работе [2] рассмотрена задача о минимальных различающих графах для семейств $\mathcal{H}_n$ — всех гамильтоновых циклов из $\mathcal{G}^*(n)$; доказано, что при любом $n \geqslant 3$

$$L(\mathcal{H}_n) = n(n-3)/2 - \lfloor n/3 \rfloor + 1,$$

и найдена явная характеризация различающих графов для $\mathcal{H}_n$.

1. Простейшие свойства различающих графов

В следующих леммах приведены эквивалентные переформулировки понятий различающего и коразличающего графов, которые будут использоваться в настоящей работе.

Лемма 1. *Граф R является различающим для семейства $\mathcal{G}(n)$ тогда и только тогда, когда симметрическая разность любых двух различных графов из $\mathcal{G}(n)$ имеет с R по меньшей мере одно общее ребро.*

Доказательство. По определению граф R является различающим для семейства $\mathcal{G}(n)$ тогда и только тогда, когда множество его ребер образует тест, т. е. для любых двух различных графов G_1 и G_2 из $\mathcal{G}(n)$ найдется ребро $r \in E(R)$, различающее графы G_1 и G_2, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что ребро r принадлежит симметрической разности $G_1 \triangle G_2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Граф Q является коразличающим для семейства $\mathcal{G}(n)$ тогда и только тогда, когда симметрическая разность любых двух различных графов из $\mathcal{G}(n)$ не содержится в Q.*

Доказательство. По определению граф Q является коразличающим тогда и только тогда, когда граф $\overline{Q}$ является различающим. По лемме 1 граф $\overline{Q}$ является различающим для семейства $\mathcal{G}(n)$ тогда и только тогда, когда симметрическая разность любых двух различных графов из $\mathcal{G}(n)$ имеет с $\overline{Q}$ хотя бы одно общее ребро, т. е. симметрическая разность любых двух различных графов из $\mathcal{G}(n)$ не содержится целиком в дополнении графа $\overline{Q}$ — графе Q. Лемма 2 доказана.

Пусть $\mathcal{G}(n)$ — семейство графов из $\mathcal{G}^*(n)$. Рассмотрим семейство

$$co\text{-}\mathcal{G}(n) = \{G | \, \overline{G} \in \mathcal{G}(n)\},$$

т. е. семейство, состоящее из графов, являющихся дополнениями к графам из семейства $\mathcal{G}(n)$. Нетрудно видеть, что любой различающий граф для семейства $\mathcal{G}(n)$ является различающим для семейства co-$\mathcal{G}(n)$, и обратно, любой различающий граф для семейства co-$\mathcal{G}(n)$ является различающим для семейства $\mathcal{G}(n)$. Это следует из леммы 1 с учетом того, что для любых графов G_1 и G_2

$$G_1 \triangle G_2 = \overline{G_1} \triangle \overline{G_2}.$$

Из сказанного следует, что результаты, полученные для семейств $\mathcal{K}_{p,n-p}$, $\mathcal{K}(n)$, $\mathcal{K}_0(n)$ и $\mathcal{H}_n$ автоматически переносятся на семейства co-$\mathcal{K}_{p,n-p}$, co-$\mathcal{K}(n)$, co-$\mathcal{K}_0(n)$ и co-$\mathcal{H}_n$.

2. Понятие регулярности

Пусть $\mathcal{G}(n)$ — семейство графов из $\mathcal{G}^*(n)$, а $\mathfrak{S}_n$ — группа всех подстановок множества V_n. Зададим действие подстановки σ из $\mathfrak{S}_n$ на семействе $\mathcal{G}(n)$ следующим образом. Пусть $G \in \mathcal{G}(n)$, тогда граф $\sigma(G) \in \mathcal{G}^*(n)$ и $E(\sigma(G)) = \{\sigma(u)\sigma(v) | uv \in E(G)\}$.

Семейство $\mathcal{G}(n)$ будем называть *регулярным*, если для любых $G \in \mathcal{G}(n)$ и $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ граф $\sigma(G) \in \mathcal{G}(n)$.

Примерами регулярных семейств могут служить: a) семейство D_n всех n-вершинных деревьев; b) семейство всех графов из $\mathcal{G}^*(n)$, в каждом из которых содержится не более M ребер, где M — произвольное целое число, $0 \leqslant M \leqslant n(n-1)/2$; c) семейство всех двудольных n-вершинных графов из $\mathcal{G}^*(n)$.

Введенные выше семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$, $\mathcal{K}(n)$, $\mathcal{K}_0(n)$ и $\mathcal{H}_n$ являются регулярными.

Пусть v — некоторая вершина графа G. *Окрестностью* вершины v в G называется множество вершин, смежных с вершиной v. Окрестность вершины v будет обозначаться через $S_G(v)$; если из контекста ясно, о каком графе G идет речь, будет использоваться обозначение $S(v)$.

Пусть u и v — различные вершины графа G. Множество вершин $D(u,v) = (S(u) \triangle S(v)) \setminus \{u,v\}$ будем называть *множеством дисбаланса* вершин u и v, а его мощность $d(u,v) = |D(u,v)|$ — *дисбалансом* вершин u и v. Нетрудно видеть, что множество дисбаланса состоит из всех отличных от u и v вершин, каждая из которых соединена либо с u, либо с v, но не с обеими вершинами одновременно. Аналогичные по существу понятия использовались в [10, глава 14] при изучении асимметричных графов, но не были специально выделены.

Будем полагать, что множество $D(u,u)$ пусто, а $d(u,u) = 0$ для любой вершины u.

Лемма 3. *Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ — транспозиция различных вершин u, v в графе G и $\sigma(G) \neq G$. Тогда симметрическая разность $G \triangle \sigma(G)$ есть граф, который является объединением полного двудольного графа с долями $\{u,v\}$, $D(u,v)$ и $n - d(u,v) - 2$ изолированных вершин.*

Доказательство. Рассмотрим действие подстановки σ на множестве всех ребер E_n. Для любой вершины w, отличной от u и v, имеем $\sigma(uw) = vw$ и $\sigma(vw) = uw$. Все остальные ребра из E_n неподвижны относительно действия подстановки σ.

Таким образом, граф $G \triangle \sigma(G)$ заведомо не содержит ребер, не имеющих вид uw или vw для некоторой вершины w.

Пусть w — произвольная вершина в G, отличная от u и v. Симметрическая разность $G \triangle \sigma(G)$ содержит ребро uw тогда и только тогда, когда uw содержится только в одном из графов G и $\sigma(G)$, т. е. тогда и только тогда, когда вершина w содержится в множестве дисбаланса $D(u,v)$ графа G; то же верно и в отношении ребра vw.

Таким образом, для каждой вершины $w \in D(u,v)$ граф $G \triangle \sigma(G)$ содержит ребра uw и vw, а других ребер в графе симметрической разности нет. По условию леммы графы G и $\sigma(G)$ различны, следовательно, множество $D(u,v)$ непусто. Лемма 3 доказана.

В любом регулярном семействе вместе с каждым графом содержатся все изоморфные графы.

Таким образом, если в семействе $\mathcal{G}(n)$ содержится граф G такой, что $\sigma_{u,v}(G) \neq G$, где $\sigma_{u,v}$ — транспозиция некоторых двух вершин u и v, то среди симметрических разностей пар графов из семейства $\mathcal{G}(n)$ имеется полный двудольный граф с долями размеров 2 и $d(u,v)$ и с $n - d(u,v) - 2$ изолированными вершинами.

Лемма 4. *Если регулярное семейство $\mathcal{G}(n)$ содержит графы G_1 и G_2, то при любой подстановке $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ во множестве симметрических разнос-*

тей пар графов из $\mathcal{G}(n)$ содержится граф $\sigma(G_1 \triangle G_2)$.

Доказательство. Очевидно, что $\sigma(G_1 \triangle G_2) = \sigma(G_1) \triangle \sigma(G_2)$. Из регулярности семейства $\mathcal{G}(n)$ следует искомое утверждение. Лемма 4 доказана.

Если в совокупности симметрических разностей графов регулярного семейства содержится некоторый полный двудольный граф K с долями размеров 2 и $d(u,v)$ и с $n - d(u,v) - 2$ изолированными вершинами, то в силу леммы 4 совокупность содержит все графы, изоморфные графу K.

3. Одно комбинаторное неравенство

Для дальнейшего нам понадобится одно известное комбинаторное неравенство [1] (см. также [6] и [10, теорема 12.1]). Для полноты изложения формулировка соответствующего утверждения (лемма 6) и его доказательство приводятся ниже.

Обычный биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ доопределим до функции $\binom{x}{k}$ действительного переменного x следующим образом:

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < k-1, \\ \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{k!} & \text{при } x \geqslant k-1. \end{cases} \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что при любом целом $k > 0$ выражение (1) задает функцию, определенную для всех действительных x, неотрицательную во всей области и совпадающую с биноминальным коэффициентом при любом целом $x \geqslant k$.

Покажем, что при любом целом $k > 0$ функция (1) является монотонно неубывающей и выпуклой (вниз). Действительно, при $x \leqslant k-1$ функция (1) равна нулю. При $x > k-1$ монотонность и выпуклость проверяются дифференцированием:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\binom{x}{k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{x-i}\binom{x}{k} \\ \frac{d^2}{d^2x}\binom{x}{k} &= \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant k-1} \frac{2}{(x-i)(x-j)}\binom{x}{k}. \end{aligned}$$

Обе эти величины положительны при $x > k-1$.

Далее воспользуемся одним из вариантов известного неравенства Йенсена. Для любой выпуклой (вниз) функции $f(x)$ действительного переменного и любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x_i) \geqslant f\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\right). \tag{2}$$

Будем рассматривать булевы матрицы, т. е. матрицы, элементами которых являются числа 0 и 1. Пусть в булевой матрице M имеется a различных строк с номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_a и b различных столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_b$ таких, что на пересечении i_k-й строки, $1 \leqslant k \leqslant a$, с j_s-м столбцом, $1 \leqslant s \leqslant b$, находится единица. Тогда будем говорить, что в матрице M содержится *единичная подматрица* размера $a \times b$.

Лемма 5. *Пусть m, n, a, b — натуральные числа, $a \leqslant m$, $b \leqslant n$. Если в булевой матрице размера $m \times n$ с N единицами нет единичных подматриц размера $a \times b$, то*

$$n\binom{N/n}{a} \leqslant (b-1)\binom{m}{a}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть M — булева матрица размера $m \times n$ с N единицами, в которой нет единичных подматриц размера $a \times b$. Подсчитаем число P единичных подматриц в M размера $a \times 1$.

Обозначим через N_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ число единиц в i-м столбце матрицы M. Тогда имеем $P = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{N_i}{a}$. Воспользовавшись неравенством Йенсена для функции $f(x) = \binom{x}{a}$, получаем

$$\frac{1}{n}P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\binom{N_i}{a} \geqslant \binom{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i}{a} = \binom{N/n}{a}. \tag{4}$$

С другой стороны, каковы бы ни были a различных строк матрицы M, имеется не более $b-1$ столбец, в котором содержатся единицы на пересечении со всеми этими строками, так как в противном случае в M оказалась бы единичная подматрица размера $a \times b$. Отсюда следует, что

$$P \leqslant (b-1)\binom{m}{a}. \tag{5}$$

Домноженное на n неравенство (4) вместе с неравенством (5) дают неравенство (3). Лемма 5 доказана.

Теперь будем рассматривать матрицы инцидентности графов из $\mathcal{G}^*(n)$. Для каждого такого графа G матрица инцидентности — это квадратная симметрическая матрица (b_{ij}) порядка n, в которой элемент b_{ij} равен 1, если вершины i и j смежны в G, и 0 в противном случае. Поскольку в рассматриваемых графах нет петель, в матрице инцидентности графа G на главной диагонали находятся только нули и в матрице содержится ровно $2E$ единиц, где $E = |E(G)|$ — число ребер в графе G.

Лемма 6. *Пусть в n-вершинном графе G имеется E ребер и нет подграфов, изоморфных полному двудольному графу с долями размеров a и b. Тогда*

$$n\binom{2E/n}{a} \leqslant (b-1)\binom{n}{a}. \tag{6}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что в n-вершинном графе G имеется полный двудольный граф с долями размера a и b тогда и только тогда, когда матрица инцидентности M графа G содержит единичную подматрицу размера $a \times b$ (или единичную подматрицу размера $b \times a$).

Остается применить лемму 5 к матрице инцидентности n-вершинного графа G, содержащей $2E$ единиц. Лемма 6 доказана.

4. Различающие графы регулярных семейств

Лемма 7. *Пусть в графе G с множеством вершин V_n имеются вершины u, v такие, что*

$$0 < d(u,v) \leqslant \frac{2}{3}n. \tag{7}$$

Тогда для любого регулярного семейства $\mathcal{G}(n)$, содержащего G, справедливо неравенство

$$L(\mathcal{G}(n)) \geqslant \left(1-\sqrt{2/3}\right)\binom{n}{2} - \frac{3}{2}n. \tag{8}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что граф, полученный из G транспозицией вершин u и v, совпадает с G, если $d(u,v) = 0$, и отличен от G, если $d(u,v) > 0$.

По лемме 3 среди симметрических разностей пар графов из любого регулярного семейства $\mathcal{G}(n)$, содержащего G, имеется полный двудольный граф с долями размеров 2 и $d(u,v)$ и с $n-d(u,v)-2$ изолированными вершинами.

По лемме 2 коразличающий граф не содержит симметрической разности никаких двух различных графов семейства $\mathcal{G}(n)$; в частности, в силу леммы 4 для любого графа $G \in \mathcal{G}(n)$ и любых вершин $u, v \in V(G)$ таких, что $d(u,v) > 0$, в коразличающем графе нет полных двудольных графов с долями размеров 2 и $d(u,v)$.

Из неравенства (6) следует, что

$$n\,(2E/n - a)^a \leqslant bn^a.$$

После несложных преобразований отсюда получаем

$$E \leqslant \frac{1}{2}b^{1/a}n^{2-1/a} + \frac{1}{2}an. \tag{9}$$

Подставив $a = 2$, $b = d(u,v)$ в (9), с учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} E &\leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}n}\, n^{3/2} + n = \tfrac{1}{2}\sqrt{2/3}n^2 + n \\ &= \sqrt{2/3}\left(\tbinom{n}{2} + \tfrac{n}{2}\right) + n \leqslant \sqrt{2/3}\tbinom{n}{2} + \tfrac{3}{2}n. \end{aligned} \tag{10}$$

При получении неравенства (10) были использованы неравенства

$$\frac{(x-a)^n}{a!} \leqslant \binom{x}{a} \leqslant \frac{x^a}{a!}, \tag{11}$$

верные при любом целом $a \geqslant 1$ и любом действительном $x \geqslant a$. Мы воспользовались неравенствами (11), положив $a = 2$, $b = d(u,v)$ и $x = 2E/n$. Таким образом, неравенство (10) получено в предположении, что $2E/n \geqslant 2$, т. е. при $E \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$. Однако при $E < n$ неравенство (10) очевидно справедливо. Условие $n \geqslant 2$ выполнено автоматически, поскольку по условию леммы в графе G имеется пара вершин с ненулевым дисбалансом.

Таким образом неравенство (11) справедливо. Лемма 7 доказана.

Итак, показано, что если в регулярном семействе $\mathcal{G}(n)$ имеется граф, в котором есть пара вершин с ненулевым дисбалансом, не превосходящим $\frac{2}{3}n$, то в каждом различающем графе для $\mathcal{G}(n)$ содержится не менее $(1-\sqrt{2/3})\binom{n}{2} - (3/2)n$ ребер, причем константа $1-\sqrt{2/3}$ является абсолютной, т. е. не зависит от семейства.

Далее будут изучаться регулярные семейства $\mathcal{G}(n)$, состоящие из графов, в которых любые две вершины имеют дисбаланс, либо равный нулю, либо больший чем $\frac{2}{3}n$. Такие семейства не удовлетворяют лемме 7.

Заметим, что отношение $\{(u,v) \in V(G) \times V(G) \mid d(u,v) = 0\}$ на множестве вершин является отношением эквивалентности. Вершины, имеющие нулевой дисбаланс, будем называть *подобными*, а соответствующие классы эквивалентности вершин — *классами подобия*.

Лемма 8. *Если для любых вершин u, v графа G либо $d(u,v) = 0$, либо $d(u,v) > \frac{2}{3}n$, то в графе G имеется не более двух классов подобия.*

Доказательство. Предположим противное: пусть в графе G имеются по крайней мере три класса подобия. Тогда найдутся три вершины u, v, w такие, что выполнены следующие неравенства:

$$|D(u,v)| > \frac{2}{3}n, \tag{12}$$

$$|D(u,w)| > \frac{2}{3}n, \tag{13}$$

$$|D(v,w)| > \frac{2}{3}n. \tag{14}$$

Рассмотрим множество вершин $D(u,v) \cap D(u,w)$. Поскольку число вершин равно n, из (12) и (13) следует, что

$$|D(u,v) \cap D(u,w)| > n/3. \tag{15}$$

Заметим, что по определению множеств дисбаланса для всякой вершины $x \in D(u,v) \cap D(u,w)$ в графе G либо есть оба ребра xv, xw, либо нет ни одного из них. Следовательно, множества $D(u,v) \cap D(u,w)$ и $D(v,w)$ не пересекаются. В этом случае во множестве V_n имеются два непересекающихся подмножества, в объединении которых содержится более n вершин, что невозможно. Противоречие. Лемма 8 доказана.

Из лемм 7 и 8 следует

Теорема 1. *Пусть граф G с множеством вершин V_n имеет не менее трех классов подобия вершин. Тогда для всякого регулярного семейства $\mathcal{G}(n)$, содержащего граф G, выполнено неравенство*

$$L(\mathcal{G}(n)) \geqslant \left(1 - \sqrt{2/3}\right)\binom{n}{2} - \frac{3}{2}n.$$

Следующие две леммы позволяют получить полное явное описание графов, имеющих не более двух классов подобия.

Лемма 9. *Класс подобия яляется либо кликой, либо пустым графом.*

Доказательство. Пусть G' — подграф графа G, порожденный классом подобия вершин. Если множество $V(G')$ состоит из одной или двух вершин, то G' является кликой или пустым графом.

Пусть множество $V(G')$ состоит не менее чем из трех вершин. Покажем, что если G' не является ни кликой, ни пустым графом, то найдутся такие три различные вершины $u, v, w \in V(G')$, что $uv \in E(G')$, а $uw \notin E(G')$. Под окрестностями вершин будем понимать их окрестности в G'.

По предположению граф G' не является пустым. Поэтому в G' имеется хотя бы одно ребро xy. Если $S(x) \neq V(G') \setminus \{x\}$, то положим $u = x$ и $v = y$, а в качестве w возьмем любую вершину из $V(G') \setminus (\{x\} \cup S(x))$. Если вершина x смежна со всеми остальными вершинами графа G', то, поскольку G' не является кликой, среди них найдется вершина z такая, что $S(z) \neq V(G') \setminus \{z\}$. Тогда положим $u = z$, $v = x$ и в качестве w возьмем любую вершину из $V(G') \setminus (\{z\} \cup S(z))$.

Отсюда следует, что граф G' не является классом подобия вершин, так как вершины v и w не являются подобными. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если S_1 и S_2 — различные классы подобия в графе G, то в G содержатся либо все ребра между S_1 и S_2, либо ни одного ребра.*

Доказательство. Если между S_1 и S_2 нет ни одного ребра, то утверждение леммы верно. В противном случае в G имеется ребро xy такое, что $x \in S_1$, а $y \in S_2$. Если в S_2 имеется вершина z такая, что $xz \notin E(G)$, то вершины y, z из S_2 не подобны, что противоречит условию леммы. Следовательно, x смежна со всеми вершинами из S_2. Если каждая вершина $a \in S_2$ смежна со всеми вершинами из S_1, то утверждение леммы верно. Если бы нашлись такие вершины $a \in S_2$, $b \in S_1$, что $ab \notin E(G)$, то вершины x, b из S_1 оказались бы неподобными, что противоречит тому, что S_1 является классом подобия. Лемма 10 доказана.

Пусть t — натуральное число, $2 \leqslant t \leqslant n-2$, и Q — произвольный граф с множеством вершин V_n, который состоит из t-вершинной клики и $n-t$ изолированных вершин. Обозначим через $\mathcal{Q}_t^n$ семейство графов из $\mathcal{G}^*(n)$, изоморфных графу Q.

Теорема 2. *Граф с множеством вершин V_n имеет не более двух классов подобия тогда и только тогда, когда он является*

1) *полным графом* (*один класс подобия*);

2) *пустым графом* (*один класс подобия*);

3) *двумя непустыми непересекающимися кликами* (*два класса подобия*);

4) *полным двудольным графом с непустыми долями* (*два класса подобия*);

5) *графом из семейства $\mathcal{Q}_t^n$, где $2 \leqslant t \leqslant n-2$* (*два класса подобия*);

6) *графом из семейства co-$\mathcal{Q}_t^n$, где $2 \leqslant t \leqslant n-2$* (*два класса подобия*).

Справедливость теоремы следует из лемм 9 и 10.

Если в регулярном семействе $\mathcal{G}(n)$ содержится некоторый граф G, имеющий более двух классов подобия (следовательно, не совпадающий ни с одним графом из теоремы 2), то различающий граф для семейства $\mathcal{G}(n)$ содержит $\binom{n}{2}$ ребер по порядку. Если в семействе $\mathcal{G}(n)$ содержатся только графы не более чем с двумя классами подобия вершин, то каждый граф из $\mathcal{G}(n)$ принадлежит одному из видов, перечисленных в теореме 2.

Отметим, что пункты в теореме 2 идут парами: графы, описанные в одном пункте, являются дополнениями графов, описанных в другом. Так пустой граф (пункт 2) является дополнением полного (пункт 1), полный двудольный граф с множеством вершин V_n (пункт 4) есть дополнение графа, состоящего из двух клик (пункт 3), а графы из пунктов 5 и 6 взаимно дополнительны по определению.

Далее рассмотрим семейства графов из $\mathcal{G}^*(n)$ не более чем с двумя классами подобия вершин, каждое из которых состоит из графов только одного из указанных в теореме 2 видов.

Минимальный различающий граф для пустого семейства очевидно пуст; далее будем рассматривать только непустые семейства.

В $\mathcal{G}^*(n)$ существует единственное семейство $\mathcal{G}(n)$, состоящее из графов, указанных в пункте 2 теоремы 2: это семейство состоит из одного полного графа K_n. Минимальный различающий граф для графа K_n не содержит ребер и $L(K_n) = 0$. То же справедливо и для пустого графа из пункта 1 теоремы 2.

Семейства, состоящие либо только из графов пункта 3 теоремы 2, либо только из графов пункта 4 теоремы 2, рассмотрены в работе [3], основные результаты которой сформулированы в начале настоящей статьи. Для каждого семейства $\mathcal{K}_{p,n-p}$ имеется точное значение величины $L(\mathcal{K}_{p,n-p})$.

Рассмотрим непустое регулярное семейство $\mathcal{G}(n)$, состоящее из некоторых графов, указанных в пункте 3 теоремы 2. Каждый граф $G \in \mathcal{G}(n)$ принадлежит какому-то семейству $\mathcal{K}_{p,n-p}$. В силу регулярности семейство $\mathcal{G}(n)$ вместе с графом G содержит все графы, изоморфные графу G. Таким образом, семейство $\mathcal{G}(n)$ может быть представлено в виде объединения

$$\mathcal{G}(n) = \bigcup_{p \in P} \mathcal{K}_{p,n-p},$$

где P — подходящее множество чисел, $P \subseteq \{1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$.

В силу утверждения 1 для любого такого семейства $\mathcal{G}(n)$ минимальный различающий граф является лесом. Утверждение 5 дает точные значения величин $L(\mathcal{K}_{p,n-p})$, $p \in P$, каждое из которых является нижней оценкой для $L(\mathcal{G}(n))$. Верхняя оценка для величины $L(\mathcal{G}(n))$ содержится в утверждении 3, поскольку $\mathcal{G}(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$.

Лемма 11. *Пусть $\mathcal{G}(n)$ — непустое регулярное семейство графов из $\mathcal{K}(n)$ и $n \geqslant 3$. Тогда*

$$(n-1)/2 \leqslant L(\mathcal{G}(n)) \leqslant n-1.$$

Если $n = 2$, то $L(\mathcal{G}(n)) = 0$.

Доказательство. Случай $n = 2$ очевиден: единственное непустое подсемейство в $\mathcal{K}(n)$ есть семейство, состоящее из единственного графа; в этом случае $L(\mathcal{G}(n)) = 0$.

Пусть $n \geqslant 3$. По условию леммы $\mathcal{G}(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$, следовательно, $L(\mathcal{G}(n)) \leqslant L(\mathcal{K}(n))$. Отсюда в силу утверждения 3 следует неравенство $L(\mathcal{G}(n)) \leqslant n-1$. Докажем неравенство $L(\mathcal{G}(n)) \geqslant (n-1)/2$.

Как уже было отмечено выше, всякое регулярное семейство, являющееся подмножеством множества $\mathcal{K}^2(n)$, может быть представлено в виде объединения семейств $\mathcal{K}_{p,n-p}$, где параметр p пробегает подходящее множество натуральных чисел. Так как семейство $\mathcal{G}(n)$ непусто, то при некотором p, $1 \leqslant p \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ справедливо включение $\mathcal{K}_{p,n-p} \subseteq \mathcal{G}(n)$. Поэтому при этом значении p имеем $L(\mathcal{K}_{p,n-p}) \leqslant L(\mathcal{G}(n))$.

Покажем, что при любом значении p выполнено неравенство $2L(\mathcal{K}_{p,n-p}) \geqslant n-1$. Согласно утверждению 5 имеем

$$L(\mathcal{K}_{p,n-p}) = n - k(n,p),$$

где величина $k(n,p)$ определена в том же утверждении. Проверим, что $2(n-k(n,p)) \geqslant n-1$ во всех четырех случаях, выделенных в формулировке утверждения 5.

1) Если $2p \leqslant n \leqslant 3p+2$, то $2(n-k(n,p)) \geqslant 2(n-2)$, что при $n \geqslant 3$ не меньше $n-1$.

2) Если $3p+3 \leqslant n \leqslant 4p+2$, то $n \geqslant 6$ (поскольку $p \geqslant 1$) и тогда $2(n-k(n,p)) \geqslant 2(n-3) \geqslant n-1$.

3) Если $n \geqslant 4p+3$ и p четно, то
$$2(n-k(n,p)) \geqslant 2(n - \lfloor n/(p+1) \rfloor) \geqslant 2(n-(n+1)/2) = n-1.$$

4) Если $n \geqslant 4p+3$ и p нечетно, то
$$2(n-k(n,p)) \geqslant 2(n - \lfloor (n+2)/(p+2) \rfloor) \geqslant 2(n-(n+1)/2) = n-1.$$

Итак, при любых n и p таких, что $n \geqslant 3$, $1 \leqslant p \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$, выполнено неравенство
$$L(\mathcal{G}(n)) \geqslant L(\mathcal{K}_{p,n-p}) \geqslant (n-1)/2.$$
Лемма 11 доказана.

В силу сказанного в разделе 1 результаты для регулярных семейств, образованных парами клик (пункт 3 теоремы 2), автоматически переносятся на регулярные семейства, состоящие из полных двудольных графов (пункт 4 теоремы 2).

Теперь рассмотрим семейства $\mathcal{Q}_t^n$ (пункт 5 теоремы 2), а вместе с ними и семейства *co*-$\mathcal{Q}_t^n$ (пункт 6 теоремы 2).

Отметим, что если в рассмотрение включить значения параметра t, равные 0, 1, $n-1$ и n, то соответствующие семейства графов совпадают с уже рассмотренными: $\mathcal{Q}_0^n = \mathcal{Q}_1^n = \{\overline{K_n}\}$, $\mathcal{Q}_{n-1}^n = \mathcal{K}_{1,n-1}$, $\mathcal{Q}_n = \{K_n\}$. Поэтому семейства $\mathcal{Q}_t^n$ рассматриваются при $n \geqslant 4$, $2 \leqslant t \leqslant n-2$.

Случай $t = 2$ очевиден: для нахождения 2-клики в различающем графе необходимо и достаточно иметь ровно $\binom{n}{2} - 1$ ребер. Поэтому далее будут рассматриваться лишь семейства $\mathcal{Q}_t^n$ при $3 \leqslant t \leqslant n-2$, и, следовательно, при $n \geqslant 5$.

Лемма 12. *При любых n и t таких, что $n \geqslant 5$ и $3 \leqslant t \leqslant n-2$, справедливо неравенство*

$$L(\mathcal{K}_t) \leqslant \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor \binom{t}{2} + \left(\left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor - 1 \right). \tag{16}$$

Доказательство. Построим различающий граф с числом ребер, которое указано в правой части неравенства (16).

Для этого построим n-вершинную клику и удалим из нее $\lfloor n/t \rfloor$ непересекающихся по вершинам t-клик. В каждую такую t-клику, кроме одной, добавим произвольное ребро. Эти $t-1$ клик будем называть частично выброшенными, а оставшуюся одну — полностью выброшенной кликой.

Нетрудно видеть, что полученный граф является различающим для $\mathcal{Q}_t^n$. Действительно, для искомой t-клики существует четыре возможности:

1) по меньшей мере одна вершина искомой t-клики не попадает ни в одну из полностью или частично выброшенных клик;

2) все вершины искомой t-клики располагаются, по крайней мере, в двух выброшенных (полностью или частично) кликах;

3) вершинами искомой t-клики являются вершины одной из частично выброшенных клик;

4) вершинами искомой t-клики являются вершины полностью выброшенной клики.

По результатам реберного теста легко определить, какая из четырех возможностей реализуется, и найти все t вершин искомой клики.

В первом случае тест обнаружит, что вершина, не попавшая ни в одну из выброшенных клик, смежна со всеми остальными вершинами искомой t-клики. Это единственный случай, когда тест обнаруживает ребро, хотя бы одна вершина которого лежит вне выброшенных клик.

Различающий граф содержит все ребра вида uv, где вершины u и v принадлежат разным выброшенным кликам. Поэтому во втором случае для каждой вершины u искомой t-клики существует другая вершина v искомой t-клики, которая находится в другой выброшенной клике. Следовательно, во втором случае все вершины искомой t-клики окажутся концами ребер, обнаруженных тестом. При этом, в отличие от последующих случаев, тест обнаружит ребра с концами в различных выброшенных кликах.

В третьем случае тест обнаружит только одно ребро внутри частично выброшенной клики. В этом случае искомая клика совпадает с данной выброшенной.

Наконец, четвертый случай реализуется лишь тогда, когда искомая t-клика совпадает с единственной полностью выброшенной кликой. В этом случае тест не обнаружит ни одного ребра. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *При любых n и t таких, что $n \geqslant 5$ и $3 \leqslant t \leqslant n-2$, справедливо неравенство*

$$L(\mathcal{Q}_t^n) \geqslant \left(1 - \sqrt{t/n}\right)\binom{n}{2} - \frac{3}{2}\,n.$$

Доказательство. Среди n вершин выберем произвольное множество Q из $t-1$ вершины и две различные вершины $u, v \notin Q$.

На множествах вершин $Q \cup \{u\}$ и $Q \cup \{v\}$ построим t-клики и добавим к ним необходимые изолированные вершины, получив графы Q_1 и Q_2 из $\mathcal{G}^*(n)$. Симметрическая разность $Q_1 \triangle Q_2$ — это полный двудольный граф с долями размеров 2 и $t-1$.

По доказанному ранее коразличающий граф для $\mathcal{Q}_t^n$ не содержит этого графа (лемма 2) и изоморфных ему (лемма 4).

Воспользуемся леммой 6 при $a = 2$ и $b = t-1$. После несложных преобразований, как и в доказательстве леммы 7, получим, что число ребер E в коразличающем графе удовлетворяет неравенству

$$E \leqslant \sqrt{\frac{t-1}{n}}\binom{n}{2} + \frac{3}{2}\,n \leqslant \sqrt{\frac{t}{n}}\binom{n}{2} + \frac{3}{2}\,n.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма 13 доказана.

Докажем еще одну нижнюю оценку для числа ребер в минимальном различающем графе для семейства $\mathcal{Q}_t^n$ (лемма 15). При t, близких к n, эта оценка лучше той, которая содержится в лемме 13, и ее удобнее сравнивать с верхней оценкой из леммы 12.

Лемма 14. *Пусть в n-вершинном графе G для любых различных вершин u, v справедливо неравенство*

$$\deg u + \deg v \geqslant P. \tag{17}$$

Тогда $|E(G)| \geqslant nP/4$.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\sum_{u,v\in V(G)} (\deg u + \deg v)\,. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{u,v\in V(G)} (\deg u + \deg v) = 4n|E(G)|. \tag{19}$$

Используя (17), из (18) получаем

$$\sum_{u,v\in V(G)} (\deg u + \deg v) = \\ \sum_{u,v\in V(G),u\neq v} (\deg u + \deg v) + 2\sum_{u\in V(G)} \deg u \geqslant n(n-1)P + 4|E(G)|. \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

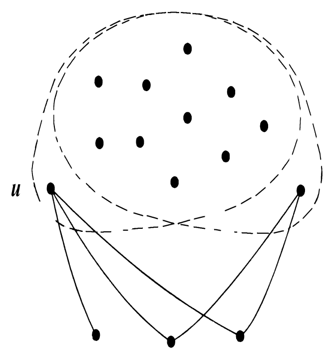
$$4n|E(G)| \geqslant n(n-1)P + 4|E(G)|,$$
$$|E(G)| \geqslant \frac{nP}{4}.$$

Лемма 14 доказана.

Лемма 15. *При любых n и t таких, что $n \geqslant 5$ и $3 \leqslant t \leqslant n-2$, справедливо неравенство*

$$L(\mathcal{Q}_t^n) \geqslant n(n-t)/4.$$

Доказательство. Покажем, что если в некотором графе R имеются две различные вершины u, v такие, что $\deg u + \deg v < n - t$, то



существуют две t-клики, которые не различимы посредством графа R. Следовательно, граф R не является различающим для $\mathcal{Q}_t^n$.

На рисунке схематично показаны вершины u и v, а два множества вершин, на которых будут построены искомые клики, обведены пунктирными линиями.

Пусть в графе R имеются две различные вершины u и v такие, что $\deg u + \deg v \leqslant n - t - 1$. За исключением u, v и вершин, смежных с ними, в графе R имеется не менее $n-2-(n-t-1) = t-1$ других вершин. Среди них выберем $t-1$ произвольную вершину и получившееся множество вершин обозначим через T. Вершины множества T не соединены ребрами ни с u, ни с v.

Рассмотрим t-клики A и B, построенные на множествах вершин $T \cup \{u\}$ и $T \cup \{v\}$ соответственно и дополненные изолированными вершинами до графов из $\mathcal{G}^*(n)$. Симметрическая разность этих графов является полным двудольным графом с долями $\{u, v\}$ и T. Отсюда следует, что ни одно из ребер графа $A \triangle B$ не принадлежит графу R, так как множество T было выбрано таким, чтобы в R не было ни одного ребра, соединяющего какую-либо вершину из T с u или v. Так как ни одно ребро из $A \triangle B$ не принадлежит R, то R не различает A и B.

Таким образом, показано, что неравенство

$$\deg u + \deg v \geqslant n - t,$$

справедливое для любых различных вершин $u, v \in V(R)$, является необходимым условием того, чтобы граф R был различающим для семейства $\mathcal{Q}_t^n$. Остается воспользоваться леммой 14. Лемма 15 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $n \geqslant 5$ *и* $3 \leqslant t \leqslant n-2$. *Тогда*

$$\frac{n(n-t)}{4} \leqslant L(\mathcal{Q}_t^n) \leqslant \frac{n^2-t^2}{2}. \qquad (21)$$

Доказательство. Преобразуем неравенство (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\mathcal{Q}_t^n) &\leqslant \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor \binom{t}{2} + \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor - 1 \\ &\leqslant \binom{n}{2} - \binom{t}{2} = \frac{n(n-1)-t(t-1)}{2} \\ &= \frac{n^2-n-t^2+t}{2} \leqslant \frac{n^2-t^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано правое неравенство в (21). Левое неравенство непосредственно следует из леммы 15. Теорема 3 доказана.

Сравним верхнюю и нижнюю оценки из теоремы 3. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{2(n^2-t^2)}{n(n-t)} = \frac{2(n+t)}{n} \leqslant 4.$$

Таким образом, при любых $n \geqslant 5$ и $3 \leqslant t \leqslant n-2$ теорема 3 дает верхнюю и нижнюю оценки для $L(\mathcal{Q}_t^n)$, различающиеся не более чем в 4 раза.

Заключение

В работе построена классификация регулярных семейств графов по величине объема минимальных безусловных реберных тестов; в основу классификации положено число классов подобия вершин в графах.

Установлено (теорема 1), что если регулярное семейство $\mathcal{G}(n)$ содержит граф не менее чем с тремя классами подобия вершин, то любой различающий граф содержит квадратичное по порядку число ребер, соответствующая мультипликативная константа является абсолютной.

Классификация графов не более чем с двумя классами подобия вершин дана в теореме 2. Для каждого типа графов, указанного в теореме 2, рассмотрены регулярные семейства, состоящие только из графов этого типа. Для каждого такого семейства получены верхняя и нижняя оценки для объема минимального теста, различающиеся не более чем в 4 раза.

Остается рассмотреть регулярные семейства, состоящие из произвольных графов не более чем с двумя классами подобия вершин. Изложение результатов о сложности тестов для таких семейств требует довольно громоздких построений и будет проведено в отдельной работе.

Литература

1. **Баранов В. И., Стечкин Б. С.** Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. М.: Наука, 1989.
2. **Дебрев Е. В.** Об одной задаче комбинаторного поиска // Дискретная математика. 2002. Т. 14, вып. 3. С. 8–17.
3. **Дебрев Е. В.** О различении графов из некоторых множеств посредством безусловных реберных тестов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука, 2002. С. 177–192.
4. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
5. **Мошков М. Ю.** Деревья решений. Теория и приложения. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1994.
6. **Нечипорук Э. И.** О топологических принципах самокорректирования // Проблемы кибернетики. Вып. 21. М.: Наука, 1969. С. 5–102.
7. **Оре О.** Теория графов. М.: Наука, 1980.
8. **Соловьев Н. А.** Тесты (теория, построение, применение). Новосибирск: Наука, 1978.
9. **Чегис И. А., Яблонский С. В.** Логические способы контроля электрических схем // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270–360. (Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова; Т. LI.)
10. **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.
11. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
12. **Aigner M.** Combinatorial search. Chichester: John Willey & Sons, Ltd.; Stuttgart: B-G. Teubner, 1988.
13. **Grebinski V.** Recherche combinatoire: problèmes de pesage, reconstruction de graphes et applications. Diplôme de doctorat de l'Université Henri Poincaré, 1998.

14. **Grebinski V., Kucherov G.** Optimal query bounds for reconstructing a Hamiltonian cycle in complete graphs // Proc. of 5th Israeli symposium on theory of computing and systems. Los Alamitos: IEEE Press, 1997. P. 166–173.

Адрес автора:

МГУ, мех.-мат. факультет,
Воробьевы горы,
119992, Москва
Россия
e-mail: eugene-debrev@mail.ru

Статья поступила
1 сентября 2003 г.