ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь—декабрь 2003. Серия 1. Том 10, № 4, 31–69

УДК 519.71

ЧИСЛО k-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ n-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА (k-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ). ЧАСТЬ 1. СЛУЧАЙ ЧЕТНЫХ n И $k = 2^{*)}$

А. Д. Коршунов

Пусть S — конечное множество, состоящее из n различных элементов, и $k \geqslant 2$ — натуральное число. Семейство $\mathcal{F}$ подмножеств $S_1, \dots, S_r$, $r \geqslant k$, множества S называется *k-неразделенным,* если пересечение любых k членов (подмножеств) семейства $\mathcal{F}$ непусто. Такие семейства эквивалентны k-неразделенным булевым функциям от n переменных, т. е. таким функциям $f(x_1, \dots, x_n)$, что любые k наборов, на которых $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 1, имеют по меньшей мере одну общую единичную компоненту. В этой статье найдена асимптотика для размера специального подмножества 2-неразделенных булевых функций от n переменных, n четно. Доказательство того, что эта асимптотика совпадает с асимптотикой для числа всех 2-неразделенных булевых функций от n переменных, будет приведено в следующей статье.

Введение

Потребность в изучении различных семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, возникает при решении ряда задач дискретной математики. Решения некоторых таких задач непосредственно сводятся к исследованию соответствующих семейств подмножеств конечного множества, а при решении других задач такие семейства используются в качестве фрагментов (см., например, обзор [4]).

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02–01–00939), Совета по грантам Президента РФ и государственной программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ–313.2003.1).

Среди простейших ограничений, которым должны удовлетворять семейства подмножеств конечного множества, является отсутствие в каждом семействе k членов (подмножеств) с пустым пересечением, $k \geqslant 2$. Такие семейства называются *k-неразделенными.*

В этой и последующих двух статьях мы исследуем задачу о числе k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества. Она может быть переформулирована на языке так называемых k-неразделенных булевых функций, определяемых следующим образом.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, равная 1 не менее чем на k наборах, называется *k-неразделенной,* если у любых k наборов, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Каждому k-неразделенному семейству $\mathcal{F}$ подмножеств n-элементного множества S поставим в соответствие следующую булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_r\}$ — произвольное k-неразделенное семейство подмножеств множества S. Подмножеству S_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, поставим в соответствие двоичный (характеристический) набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$ такой, что

$$\alpha_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й элемент из } S \text{ принадлежит подмножеству } S_i; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В качестве булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ берется функция, которая равна 1 на всех характеристических наборах $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_r$ и равна 0 на $2^n - r$ остальных наборах.

Ясно, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является k-неразделенной, а указанное соответствие между k-неразделенными семействами подмножеств n-элементного множества и k-неразделенными булевыми функциями от n переменных взаимно однозначно. Следовательно, число таких семейств совпадает с числом k-неразделенных булевых функций от n переменных. Множество таких функций обозначим через $F_k(n)$.

Можно, конечно, предложить точные формулы для $|F_k(n)|$, являющиеся формульной записью различных алгоритмов перебора всех булевых функций от n переменных и проверкой их на k-неразделенность. Однако не ясно, как из таких формул извлечь информацию о величине $|F_k(n)|$. Поэтому мы ограничиваемся нахождением асимптотик (асимптотических формул) для размера множества $F_k(n)$ при $n \to \infty$.

Справедлива следующая

Теорема 1*). *При любом четном* $n \to \infty$

$$|F_2(n)| \sim 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \exp\left\{ \binom{n}{n/2-1} \left[\frac{1}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{1}{2^3 3^2}(n+6)(2/3)^n \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left[\frac{1}{2^7 3^4}(63n^4 - 57n^3 - 76n^2 + 212n - 864)\right](2/3)^{3n/2}\right]\right\}.$$

Доказательство теоремы проводится в два этапа. Сначала во множестве $F_2(n)$ выделяется специальное подмножество функций $F_2^0(n)$ и находится асимптотика для $|F_2^0(n)|$. Затем доказывается, что $|F_2(n) \setminus F_2^0(n)| = o(|F_2^0(n)|)$. Так как текст доказательства довольно большой, то в настоящей статье мы ограничиваемся нахождением асимптотики для $|F_2^0(n)|$. Второе соотношение, а также асимптотика для $|F_2(n)|$ при нечетных n будут доказаны в следующей статье.

Замечание 1. Асимптотики для числа 2-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества (для числа 2-неразделенных булевых функций от n переменных) различны при четных и нечетных n. Они довольно сложны. При любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$ асимптотики для $|F_k(n)|$ имеют простой вид. Они не зависят от k и от четности или нечетности n.

Структура типичных 2-неразделенных булевых функций от n переменных существенно отличается от структуры типичных k-неразделенных булевых функций от n переменных при любом $k \geqslant 3$.

Замечание 2. По-видимому, классы булевых функций $F_k(n)$ впервые появились в монографии Э. Поста [5] (см., например, [3]) в связи с исследованием замкнутых (относительно операции суперпозиции) классов булевых функций. В этой монографии описаны все замкнутые классы. В частности, доказано, что при любом $k = 2, 3, \ldots$ класс функций $F_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_k(n)$ является замкнутым.

Теорема 1 непосредственно следует из теоремы 2, для формулировки которой необходимы вспомогательные понятия и обозначения.

§ 1. Вспомогательные понятия. Формулировка теоремы 2

Для задания булевых функций от n переменных будем использовать n-мерный булев куб E^n, т. е. граф с 2^n вершинами, которые помечены двоичными наборами длины n, а вершины $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

*) Грубые оценки для величины $|F_2(n)|$ приведены в [2, теорема 4].

и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ смежны в E^n тогда и только тогда, когда расстояние Хемминга $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$ равно 1. Вершины в E^n обычно будем называть наборами.

Совокупность вершин в E^n, каждая из которых помечена набором, содержащим k единиц и $n-k$ нулей, называется k-слоем в E^n и обозначается через $E^{n,k}$.

Множество наборов (вершин) назовем 2-*неразделенным,* если любые два набора из этого множества имеют по меньшей мере одну общую единичную компоненту.

Наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\overline{\widetilde{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ из $E^{n,k}$, где $\overline{\alpha}_i = \alpha_i \oplus 1$, называются *противоположными.* Если A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, то через $\overline{A}$ обозначается множество наборов, каждый из которых противоположен одному набору из A. Все наборы множества $\overline{A}$ принадлежат слою $E^{n,n-k}$.

Пусть $A = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_t\}$ — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, $0 < k < n$. Множество A разобьем на связки: наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ включаются в одну связку тогда и только тогда, когда в A имеются такие наборы $\widetilde{\alpha}_{s_1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{s_v}$, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{s_1}) = \rho(\widetilde{\alpha}_{s_v}, \widetilde{\alpha}_j) = 2$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_{s_w}, \widetilde{\alpha}_{s_{w+1}}) = 2$ при каждом w, $1 \leqslant w \leqslant v-1$.

Трехэлементную связку назовем *линейной,* если в ней есть два набора, между которыми расстояние Хемминга равно 4.

Трехэлементную связку из $E^{n,n/2-1}$ назовем *треугольной связкой первого вида,* если расстояние Хемминга между любыми двумя наборами связки равно 2, и в наборах связки имеется $\frac{1}{2}n$ общих нулевых компонент, $\frac{1}{2}n-3$ общих единичных компонент, а в остальных трех позициях содержатся наборы (110), (101), (011).

Трехэлементную связку из $E^{n,n/2-1}$ назовем *треугольной связкой второго вида,* если расстояние Хемминга между любыми двумя наборами связки равно 2, в наборах связки содержится $\frac{1}{2}n-1$ общих нулевых компонент, $\frac{1}{2}n-2$ общих единичных компонент, а в остальных трех позициях содержатся наборы (100), (010), (001).

Множество функций из $F_2(n)$, каждая из которых равна 0 на любом наборе, содержащем менее $n/2-1$ единиц, обозначим через $F_2^*(n)$.

Введем следующие обозначения:

$$a = \binom{n}{n/2-1}, \tag{1}$$

$$k^* = \frac{a}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{an(3n+2)}{2^3 3^2}(2/3)^n$$

$$- \frac{a}{2^5 3^3}(3n^4+3n^3-4n^2-24n-72)(2/3)^{3n/2}, \qquad k_1 = \lfloor k^* \rfloor, \tag{2}$$

$$r^* = \frac{a(n^2-4)}{2^4\cdot 3}(2/3)^n, \qquad r_0 = \lfloor r^* \rfloor, \tag{3}$$

$$s^* = \frac{1}{2^7\cdot 3^2}a(n^2-4)(n-4)(3n+2)(2/3)^{3n/2}, \qquad s_0 = \lfloor s^* \rfloor, \tag{4}$$

$$v^* = \frac{1}{2^7\cdot 3}a(n^2-4)n(2/3)^{3n/2}, \qquad v_0 = \lfloor v^* \rfloor. \tag{5}$$

При четном n обозначим через $F_2^0(n)$ множество функций $f \in F_2^*(n)$ таких, что

1) на наборах из $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ функция f принимает произвольные значения;

2) множество наборов из $E^{n,n/2-1}$, на которых функция f равна 1, состоит из k одноэлементных, r двухэлементных, s линейных трехэлементных и треугольных трехэлементных связок первого вида и v треугольных трехэлементных связок второго вида, где

$$|k-k_1| \leqslant n\sqrt{k_1}, \tag{6}$$

$$|r-r_0| \leqslant n\sqrt{r_0}, \tag{7}$$

$$|s-s_0| \leqslant n\sqrt{s_0}, \tag{8}$$

$$|v-v_0| \leqslant n\sqrt{v_0}. \tag{9}$$

Теорема 2. *При любом четном $n \to \infty$*

$$|F_2^0(n)| \sim 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \exp\left\{ \binom{n}{n/2-1}\left[\frac{1}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{1}{2^3 3^2}(n+6)(2/3)^n \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left[\frac{1}{2^7 3^4}(63n^4-57n^3-76n^2+212n-864)\right](2/3)^{3n/2}\right]\right\} \tag{10}$$

и

$$|F_2(n)| \sim |F_2^0(n)|. \tag{11}$$

В настоящей статье доказывается соотношение (10).

§ 2. Задание 2-неразделенных множеств в $E^{n,n/2-1} \cup E^{n,n/2}$

На протяжении всей статьи используются следующие понятия и обозначения.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — различные двоичные наборы. Говорят, что набор $\widetilde{\alpha}$ *предшествует* набору $\widetilde{\beta}$, или набор $\widetilde{\alpha}$ *меньше* набора $\widetilde{\beta}$ (обозначение: $\widetilde{\alpha} \prec \widetilde{\beta}$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ при каждом i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из $E^{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k-s}$ таких, что $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\alpha}$, назовем *$s$-проекцией* набора $\widetilde{\alpha}$, $s \leqslant k$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k+s}$ таких, что $\widetilde{\beta} \succ \widetilde{\alpha}$, назовем *$s$-тенью* набора $\widetilde{\alpha}$, $s \leqslant n-k$.

Пусть A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k-s}$ таких, что $\widetilde{\beta}$ принадлежит s-проекции по меньшей мере одного набора из A, назовем *s-проекцией* множества A и обозначим через $P^s(A)$.

Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k+s}$ таких, что $\widetilde{\beta}$ принадлежит s-тени по меньшей мере одного набора из A, назовем *s-тенью* множества A и обозначим через $T^s(A)$.

Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из $E^{n,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k}$ таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant r$, назовем *слойным шаром* радиуса r и обозначим через $S(n, \widetilde{\alpha}, r)$.

Пусть f — произвольная функция из $F_2^*(n)$. Ясно, что любой набор из $E^{n,n/2-1} \cup E^{n,n/2} \cup E^{n,n/2+1}$ и любой набор из $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$, а также любые два набора из $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ имеют по меньшей мере одну общую единичную компоненту. Далее, если $\widetilde{\alpha} \in E^{n,n/2-1}$, то $\overline{\widetilde{\alpha}} \in E^{n,n/2+1}$, а если $\widetilde{\alpha} \in E^{n,n/2}$, то $\overline{\widetilde{\alpha}} \in E^{n,n/2}$.

Из этих двух фактов следует, что на множестве $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ функция f может быть определена произвольно независимо от того, какие значения принимает эта функция на множестве

$$E^{n,n/2-1} \cup E^{n,n/2} \cup E^{n,n/2+1}.$$

Поэтому на множестве $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ имеется $2^{\sum_{i=n/2+2}^{n} \binom{n}{i}}$ способов задания функций из $F_2^0(n)$.

Основная трудность доказательства соотношения (10) состоит в нахождении асимптотики для числа способов задания функций из $F_2^0(n)$ на множестве $E^{n,n/2-1} \cup E^{n,n/2} \cup E^{n,n/2+1}$. Мы используем следующий способ задания.

Пусть $A = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w\}$ — произвольное 2-неразделенное множество наборов из $E^{n,n/2-1}$. Обозначим через $F_2^*(n, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w)$ множество функций из $F_2^*(n)$, каждая из которых равна 1 на наборах $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w$ и равна 0 на остальных наборах из $E^{n,n/2-1}$.

Пусть f — произвольная функция из $F_2^*(n, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w)$. Из 2-неразделенности функции f следует, что $f(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) = 0$ при любом i, $1 \leqslant i \leqslant w$, где $\overline{\widetilde{\alpha}}_i \in E^{n,n/2+1}$. На остальных наборах из $E^{n,n/2+1}$ функция f может быть задана произвольно (имеется $2^{\binom{n}{n/2+1}-w}$ возможностей). Кроме того, $f(\widetilde{\beta}) = 0$ при любом $\widetilde{\beta} \in \{P^1(\overline{\widetilde{\alpha}}_1) \cup \ldots \cup P^1(\overline{\widetilde{\alpha}}_w)\}$.

Так как множество A является 2-неразделенным, то при любом четном $n \geqslant 4$ множество $P^1(\overline{A})$ также является 2-неразделенным. Это означает, что в $P^1(\overline{A})$ нет противоположных наборов. Следовательно, все наборы, являющиеся противоположными к наборам из $P^1(\overline{A})$, принадлежат множеству $T^1(A)$ и $T^1(A) \cap P^1(\overline{A}) = \phi$. Поэтому на всех наборах из $T^1(A)$ функция f может быть задана произвольно (имеется $2^{|T^1(A)|} = 2^{|P^1(\overline{A})|}$ возможностей).

Пусть $B = E^{n,n/2} \setminus \{T^1(A) \cup P^1(\overline{A})\}$. Нетрудно видеть, что множество B состоит из $\dfrac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |T^1(A)| - |P^1(\overline{A})|\right\} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |P^1(\overline{A})|$ пар противоположных наборов. Ясно, что если два набора из $E^{n,n/2}$ не являются противоположными, от они имеют по меньшей мере одну общую единичную компоненту. Поэтому на различных парах противоположных наборов функцию f можно задавать независимо, а на любых двух противоположных наборах функция f одновременно не может принимать значение 1. Следовательно, на множестве B имеется $3^{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |P^1(\overline{A})|}$ способов задания функций из $F_2^*(n, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w)$.

Из сказанного следует, что

$$|F_2^*(n, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w)| = 2^{\sum\limits_{i=n/2+2}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}} \cdot 2^{\begin{pmatrix} n \\ n/2+1 \end{pmatrix} - w} 2^{|P^1(\overline{A})|}$$

$$\times 3^{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |P^1(\overline{A})|} = 2^{2^{n-1} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - w} 2^{|P^1(\overline{A})|} 3^{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |P^1(\overline{A})|}$$

$$= 2^{2^{n-1}} 2^{-w} \,(3/2)^{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} - |P^1(\overline{A})|}. \qquad (12)$$

§ 3. Доказательство соотношения (10). Первый этап

Пусть $w = k + 2r + 3s + 3v$, а множество $A = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_w\}$ состоит из связок мощности не более 3, причем наборы $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k$ принадлежат одноэлементным связкам, наборы $\widetilde{\alpha}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{k+2r}$ — двухэлементным связкам, наборы $\widetilde{\alpha}_{k+2r+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{k+2r+3s}$ — линейным трехэлементным и треугольным трехэлементным связкам первого вида и наборы $\widetilde{\alpha}_{k+2r+3s+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{k+2r+3s+3v}$ — треугольным трехэлементным связкам второго вида. Тогда имеем

$$|P^1(\overline{A})| = |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_1, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_k\})| + |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r}\}|$$
$$+ |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s}\})|$$
$$+ |P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s+1}, \ldots, \overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s+3v}\})|. \qquad (13)$$

Нетрудно видеть, что

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_1,\dots,\overline{\widetilde{\alpha}}_k\})| = k\left(\frac{n}{2}+1\right) = nk/2+k, \tag{14}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+1},\dots,\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r}\}| = 2r\left(\frac{n}{2}+1\right) - r = nr+r, \tag{15}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+1},\dots,\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s})| = 3s\left(\frac{n}{2}+1\right) - 2s = 3ns/2+s, \tag{16}$$

$$|P^1(\{\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s+1},\dots,\overline{\widetilde{\alpha}}_{k+2r+3s+3v}\})| = 3nv/2. \tag{17}$$

Пользуясь (13)–(17), получаем

$$|P^1(\overline{A})| = n(k+2r+3s+3v)/2+k+r+s.$$

Отсюда и из (12) следует, что при рассматриваемом $A=\{\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_w\}$

$$\begin{aligned}|F_2^*(n,\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_w)| &= 2^{2^{n-1}}2^{-k-2r-3s-3v} \\ &\qquad\times(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}-n(k+2r+3s+3v)/2-k-r-s} \\ &= 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}(2/3)^{n(k+2r+3s+3v)/2}\big/(3^{k+r+s}2^{r+2s+3v}).\end{aligned} \tag{18}$$

Обозначим через $R^0(n,k,r,s,v)$ совокупность таких 2-неразделенных множеств из $E^{n,n/2-1}$, что каждое множество состоит из k одноэлементных, r двухэлементных, s линейных трехэлементных и треугольных трехэлементных связок первого вида и v треугольных трехэлементных связок второго вида. Тогда из определения множества $F_2^0(n)$ и соотношений (1)–(9), (18) следует, что

$$\begin{aligned}|F_2^0(n)| = 2^{2^{n-1}}(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} &\sum_{|k-k_0|\leqslant n\sqrt{k_0}}\ \sum_{|r-r_0|\leqslant n\sqrt{r_0}}\ \sum_{|s-s_0|\leqslant n\sqrt{s_0}} \\ &\times\sum_{|v-v_0|\leqslant n\sqrt{v_0}}\frac{|R^0(n,k,r,s,v)|}{3^{k+r+s}2^{r+2s+3v}}(2/3)^{n(k+2r+3s+3v)/2}.\end{aligned} \tag{19}$$

Следовательно, для доказательства соотношения (10) остается найти асиптотики для $|R^0(n,k,r,s,v)|$ при всех рассматриваемых k,r,s,v и убедиться в том, что сумма найденных величин асимптотически равна правой части (10).

Обозначим через $R^0(n,w)$ совокупность 2-неразделенных w-элементных множеств из $E^{n,n/2-1}$. Каждому множеству C из $R^0(n,w)$ поставим

в соответствие $w!$ последовательностей, полученных из C путем всех упорядочений его элементов. Совокупность последовательностей, которые возникают таким образом из всех множеств семейства $R^0(n,w)$, обозначим через $\vec{R}^0(n,w)$.

Последовательности из $\vec{R}^0(n,w)$ будем называть 2-*неразделенными*. Через $\vec{R}^0(n,k,r,s,v)$, где $k+2r+3s+3v=w$, обозначим множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{R}^0(n,w)$, что $\vec{C}$ состоит из k одноэлементных, r двухэлементных, s линейных трехэлементных и треугольных трехэлементных связок первого вида и v треугольных трехэлементных связок второго вида. Так как

$$|\vec{R}^0(n,k,r,s,v)| = |R^0(n,k,r,s,v)|(k+2r+3s+3v)!,$$

то из (19) следует, что

$$|F_2^0(n)| = 2^{2^{n-1}}\,(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \sum_{|k-k_0|\leqslant n\sqrt{k_0}}\ \sum_{|r-r_0|\leqslant n\sqrt{r_0}}\ \sum_{|s-s_0|\leqslant n\sqrt{s_0}}$$
$$\times \sum_{|v-v_0|\leqslant n\sqrt{v_0}} \frac{|\vec{R}^0(n,k,r,s,v)|}{(k+2r+3s+3v)!3^{k+r+s}2^{r+2s+3v}}\,(2/3)^{n(k+2r+3s+3v)/2}\,. \tag{20}$$

Пусть множество $S=\{1,2,\dots,w\}$ разбито на одноэлементные, двухэлементные и трехэлементные подмножества. Среди трехэлементных подмножеств будем различать подмножества первого и второго типов. Различие трехэлементных подмножеств связано с тем, что трехэлементные подмножества первого типа используются при рассмотрении линейных трехэлементных связок и треугольных трехэлементных связок первого вида, а трехэлементные подмножества второго типа используются при рассмотрении треугольных трехэлементных связок второго вида.

Обозначим через $\mathcal{D}(k,r,s,v)$ совокупность разбиений множества S размера $w=k+2r+3s+3v$ на $k+r+s+v$ таких подмножеств, что каждое разбиение состоит из k одноэлементных, r двухэлементных подмножеств, s трехэлементных подмножеств первого типа и v трехэлементных подмножеств второго типа.

Лемма 1. *При любых k,r,s,v справедливо равенство*

$$|\mathcal{D}(k,r,s,v)| = \frac{(k+2r+3s+3v)!}{k!r!s!v!2^r6^{s+v}}.$$

Доказательство. Все рассматриваемые разбиения множества S размера $w=k+2r+3s+3v$ можно получить следующим способом.

1) Среди элементов множества S отбирается k элементов (имеется $\binom{w}{k}$ возможностей). Эти элементы образуют одноэлементные подмножества разбиения.

2) Среди остальных элементов множества S отбирается $2r$ элементов (имеется $\binom{w-k}{2r}$ возможностей). Множество этих элементов разбивается на двухэлементные подмножества (число разбиений равно $(2r)!/(r!2^r)$).

3) Среди оставшихся элементов, содержащихся в S, отбирается $3s$ элементов (имеется $\binom{3s+3v}{3s}$ возможностей). Множество этих элементов разбивается на трехэлементые подмножества первого типа (число разбиений равно $(3s)!/(s!6^s)$).

4) Множество остальных элементов из S разбивается на трехэлементные подмножества второго типа (число разбиений равно $(3v)!/(v!6^v)$).

Из пп. 1–4 следует, что

$$|\mathcal{D}(k,r,s,v)| = \begin{pmatrix} w \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w-k \\ 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w-k-2r \\ 3s \end{pmatrix}$$

$$\times \frac{(2r)!(3s)!(3v)!}{r!s!v!2^r 6^{s+v}} = \frac{(k+2r+3s+3v)!}{k!r!s!v!2^r 6^{s+v}}.$$

Лемма 1 доказана.

Пусть D — произвольное разбиение из $\mathcal{D}(k,r,s,v)$ и $\vec{C}$ — последовательность из $\vec{R}^0(n,k,r,s,v)$. Последовательность $\vec{C}$ назовем *согласованной* с разбиением D, если

(a) все элементы одноэлементных подмножеств из D являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых расположены наборы, принадлежащие одноэлементным связкам;

(b) элементы каждого двухэлементного подмножества из D являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие двухэлементной связке;

(c) элементы каждого трехэлементного подмножества первого типа из D являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие либо линейной трехэлементной связке, либо треугольной трехэлементной связке первого вида;

(d) элементы каждого трехэлементного подмножества второго типа из D являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых располагаются наборы, принадлежащие треугольной трехэлементной связке второго вида.

Обозначим через $\vec{R}^0_D(n,k,r,s,v)$ множество последовательностей из $\vec{R}^0(n,k,r,s,v)$, согласованных с разбиением D из $\mathcal{D}(k,r,s,v)$. Так как

$$|\vec{R}^0_{D_1}(n,k,r,s,v)| = |\vec{R}^0_{D_2}(n,k,r,s,v)|$$

при любых D_1, D_2 из $\mathcal{D}(k,r,s,v)$, то из (20) и леммы 1 следует, что

$$|F_2^0(n)| = 2^{2^{n-1}}\,(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \sum_{|k-k_0|\leqslant n\sqrt{k_0}}\ \sum_{|r-r_0|\leqslant n\sqrt{r_0}}\ \sum_{|s-s_0|\leqslant n\sqrt{s_0}} \times \sum_{|v-v_0|\leqslant n\sqrt{v_0}} \frac{|\vec{R}^0(n,k,r,s,v)|}{k!r!s!v!2^{2r+3s+4v}3^{k+r+2s+v}} \times (2/3)^{n(k+2r+3s+3v)/2}, \quad (21)$$

где в качестве D взято разбиение множества S, в котором первые k элементов принадлежат одноэлементным подмножествам, следующие $2r$ элементов — двухэлементным подмножествам, следующие $3s$ элементов — трехэлементным подмножествам первого типа, остальные $3v$ элементов — трехэлементным подмножествам второго типа.

Все последовательности из $\vec{R}_D^0(n,k,r,s,v)$ будем порождать следующим способом.

1) Заполняются позиции, начиная с $(k+2r+3s+1)$-й и кончая $(k+2r+3s+3v)$-й, такими наборами из $E^{n,n/2-1}$, чтобы в этих позициях появились согласованные с D треугольные трехэлементные связки второго вида.

2) Заполняются позиции, начиная с $(k+2r+1)$-й и кончая $(k+2r+3s)$-й, такими наборами из $E^{n,n/2-1}$, чтобы в этих позициях появились согласованные с D либо линейные трехэлементные связки, либо треугольные трехэлементные связки первого вида.

3) Заполняются позиции, начиная с $(k+1)$-й и кончая $(k+2r)$-й, такими наборами из $E^{n,n/2-1}$, чтобы в этих позициях появились согласованные с D двухэлементные связки.

4) Позиции, начиная с первой и кончая k-й, заполняются такими наборами из $E^{n,n/2-1}$, чтобы в этих позициях оказались согласованные с D одноэлементные связки.

В дальнейшем, ради краткости, вершину $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ будем называть *допустимой* (относительно множества A), если $\widetilde{\alpha}$ не принадлежит множеству $A \cup P^2(\overline{A})$.

Обозначим через $\vec{W}_D^1(n,v)$ множество согласованных с D заполнений $3v$ позиций, начиная с $(k+2r+3s+1)$-й и кончая $(k+2r+3s+3v)$-й, допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$.

Лемма 2. *При любом $v \leqslant an^3\,(2/3)^{3n/2}$ и $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$|\vec{W}_D^1(n,v)| \sim \left\{\frac{1}{8}a(n^2-4)n\right\}^v .$$

Доказательство. Пусть i-е трехэлементное подмножество второго типа в разбиении D состоит из элементов $k+2r+3s+3(i-1)+1$, $k+2r+3s+3(i-1)+2$ и $k+2r+3s+3(i-1)+3$, где $1 \leqslant i \leqslant v$. Тогда все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения можно получить следующим способом.

1) В $(k+2r+3s+3(i-1)+1)$-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant v$, помещается произвольный допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$. Имеется не более a способов выбора $\widetilde{\alpha}$.

2) В $(k+2r+3s+3(i-1)+2)$-ю позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})=2$. Число способов выбора набора $\widetilde{\beta}$ не превосходит $(\frac{n}{2}+1)(\frac{n}{2}-1)=\frac{1}{4}(n^2-4)$.

3) В $(k+2r+3s+3(i-1)+3)$-ю позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,n/2-1}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma})=\rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma})=2$ и возникшая связка должна быть треугольной связкой второго вида. Для выбора набора $\widetilde{\gamma}$ имеется не более $n/2$ возможностей.

Из пп. 1–3 следует, что

$$|\vec{W}_D^1(n,v)| \leqslant \left\{\frac{1}{8}a(n^2-4)n\right\}^v . \tag{22}$$

Оценим размер множества $\vec{W}_D^1(n,v)$ снизу.

4) Пусть в позициях, о которых сказано в п. 1, размещаются наборы $\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_v$ такие, что расстояние Хемминга между любыми двумя наборами не менее 8. Пусть наборы $\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_{i-1}$ уже отобраны. Тогда для выбора $\widetilde{\alpha}_i$ имеется не менее $a-|S(n,\widetilde{\alpha}_1,6)\cup\ldots\cup S(n,\widetilde{\alpha}_{i-1},6)\cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_1)\cup\ldots\cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_{i-1})| > a-vn^6$ способов. Следовательно, число возможностей для выбора v таких наборов не меньше $(a-vn^6)^v$.

5) Число способов выбора наборов, о которых говорилось в пп. 2 и 3, в точности равно $\left\{\frac{1}{8}(n^2-4)n\right\}^v$.

Из пп. 4 и 5 следует, что при $v \leqslant an^3\,(2/3)^{3n/2}$ и $n \to \infty$

$$|\vec{W}_D^1(n,v)| > \left\{\frac{1}{8}\alpha(a-vn^6)(n^2-4)n\right\}^v \sim \left\{\frac{1}{8}(n^2-4)n\right\}^v . \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), убеждаемся в справеливости леммы 2.

Обозначим через $\vec{W}_D^2(n,s)$ множество согласованных с D заполнений позиций, начиная с $(k+2r+1)$-й и кончая $(k+2r+3s)$-й, допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$ при условии, что в позиции, начиная с $(k+2r+3s+1)$-й и кончая $(k+2r+3s+3v)$-й, наборы уже размещены.

Лемма 3. *При любых* $s \leqslant an^4\,(2/3)^{3n/2}$, $v \leqslant an^3\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2}$ *и* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$|\vec{W}_D^2(n,s)| \sim \left\{\frac{1}{16}a(n^2-4)(n-4)(3n+2)\right\}^s.$$

Доказательство. Пусть i-е трехэлементное подмножество первого типа в разбиении D состоит из элементов $k+2r+3(i-1)+1$, $k+2r+3(i-1)+2$ и $k+2r+3(i-1)+3$, где $1 \leqslant i \leqslant s$. Тогда все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения можно получить следующим способом.

1) В $(k+2r+3(i-1)+1)$-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant s$, помещается допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$. Имеется менее a способов выбора $\widetilde{\alpha}$.

2) В $(k+2r+3(i-1)+2)$-ю позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\beta}$, а в $(k+2r+3(i-1)+3)$-ю позицию — допустимый набор $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,n/2-1}$ такие, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 2$, а получаемая связка является треугольной трехэлементной связкой первого вида. Для выбора набора $\widetilde{\beta}$ имеется не более $\frac{1}{4}(n^2-4)$ возможностей, а для выбора набора $\widetilde{\gamma}$ имеется не более $\frac{1}{2}(n-4)$ возможностей. Следовательно, имеется не более $\frac{1}{8}(n^2-4)(n-4)$ способов выбора $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$.

3) В $(k+2r+3(i-1)+2)$-ю позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\beta}$, а в $(k+2r+3(i-1)+3)$-ю позицию — допустимый набор $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,n/2-1}$ такие, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = 2$ и $\rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 4$, а получаемая связка является линейной трехэлементной связкой. Для выбора набора $\widetilde{\beta}$ имеется не более $\frac{1}{4}(n^2-4)$ возможностей, а для выбора набора $\widetilde{\gamma}$ — не более $\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-2) = \frac{1}{4}n(n-4)$ возможностей. Следовательно, для выбора $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ имеется не более $\frac{1}{16}(n^2-4)n(n-4)$ способов. Такое же число имеется для выбора допустимых наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ в случае, когда $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 2$ и $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = 4$, а также в случае, когда $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 4$ и $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\gamma}) = \rho(\widetilde{\beta},\widetilde{\gamma}) = 2$.

Из пп. 1–3 следует, что

$$|\vec{W}_D^2(n,s)| < \left\{\frac{a}{8}(n^2-4)(n-4) + \frac{\alpha}{16}(n^2-4)n(n-4)\right\}^s$$

$$= \left\{\frac{1}{16}a(n^2-4)(n-4)(3n+2)\right\}^s. \tag{24}$$

Как при доказательстве леммы 2 убеждаемся в том, что если $s \leqslant an^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2}$ и $v \leqslant an^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2}$, то

$$|\vec{W}_D^2(n,s)| > \left\{\frac{1}{16}a(n^2-4)(n-4)(3n+2)\right\}^s (1-\varepsilon_n), \tag{25}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из неравенств (24) и (25) следует утверждение леммы 3.

Обозначим через $\vec{W}_D^3(n,r)$ множество согласованных с D заполнений позиций, начиная с $(k+1)$-й и кончая $(k+2r)$-й, допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$.

Лемма 4. *При любых* $r \leqslant an^2\,(2/3)^n$, $s \leqslant an^4\,(2/3)^{3n/2}$, $v \leqslant an^3\,(2/3)^{3n/2}$ *и* $n \to \infty$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$|\vec{W}_D^3(n,r)| \sim \left\{\frac{1}{4}a(n^2-4)\right\}^r.$$

Доказательство. Пусть i-е двухэлементное подмножество из D состоит из элементов $k+2(i-1)+1$ и $k+2(i-1)+2$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с $(k+1)$-й и кончая $(k+2r)$-й, можно получить следующим способом. Сначала в $(k+2(i-1)+1)$-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant r$, помещается допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ (имеется менее a возможностей), а затем в $(k+2(i-1)+2)$-ю позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 2$ (имеется не более $\frac{1}{4}(n^2-4)$ возможностей). Следовательно,

$$|\vec{W}_D^3(n,r)| < \left\{\frac{1}{4}a(n^2-4)\right\}^r. \tag{26}$$

Оценим снизу размер множества $\vec{W}_D^3(n,r)$.

1) В $(k+2(i-1)+1)$-ю позицию, $1 \leqslant i \leqslant r$, помещается допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ такой, что расстояние Хемминга между $\widetilde{\alpha}$ и любым уже отобранным набором из $E^{n,n/2-1}$ не меньше 8. Число возможностей для выбора такого набора $\widetilde{\alpha}$ не меньше $a-(2r+3s+3v)n^6$. Следовательно, число способов выбора r таких наборов не меньше $(a-(2r+3s+3v)n^6)^r$.

2) Число способов выбора набора, помещаемого в $(k+2(i-1)+2)$-ю позицию, в точности равно $\frac{1}{4}(n^2-4)$.

Из пп. 1 и 2 следует, что если $r \leqslant an^2\,(2/3)^n$, $s \leqslant an^4\,(2/3)^{3n/2}$ и $v \leqslant an^3\,(2/3)^{3n/2}$, то при $n \to \infty$

$$|\vec{W}_D^3(n,r)| > \left\{\frac{1}{4}a(n^2-4)\right\}^r \left(1 - O(n^{10}\,(2/3)^{2n}\right). \tag{27}$$

Из (26) и (27) следует утверждение леммы 4.

Обозначим через $\vec{W}_D^4(n,k)$ множество согласованных с D заполнений первых k позиций допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$.

Из определения множеств $\vec{R}_D^0(n,k,r,s,v)$, $\vec{W}_D^1(n,v)$, $\vec{W}_D^2(n,s)$, $\vec{W}_D^3(n,r)$ и $\vec{W}_D^4(n,k)$ следует, что

$$|\vec{R}_D^0(n,k,r,s,v)| = |\vec{W}_D^1(n,v)| \cdot |\vec{W}_D^2(n,s)| \cdot |\vec{W}_D^3(n,r) \cdot |\vec{W}_D^4(n,k)|.$$

Пользуясь этим фактом, соотношением (21) и леммами 2–4, получаем

$$\begin{aligned}
|F_2^0(n)| \sim 2^{2^{n-1}}\,(3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} &\sum_{|k-k_0|\leqslant n\sqrt{k_0}} \frac{1}{k!3^k}\,(2/3)^{nk/2}\,|\vec{W}_D^5(n,k)| \\
\times &\sum_{|r-r_0|\leqslant n\sqrt{r_0}} \frac{1}{r!}\left(\frac{a(n^2-4)}{2^4\cdot 3}\right)^r (2/3)^{nr} \\
\times &\sum_{|s-s_0|\leqslant n\sqrt{s_0}} \frac{1}{s!}\left(\frac{a(n^2-4)(n-4)(3n+2)}{2^7\cdot 3^2}\right)^s (2/3)^{3ns/2} \\
\times &\sum_{|v-v_0|\leqslant n\sqrt{v_0}} \frac{1}{v!}\left(\frac{a(n^2-4)n}{2^7\cdot 3}\right)^v (2/3)^{3nv/2}\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
g_1(v) &= \frac{1}{v!}\left(\frac{a(n^2-4)n}{2^7\cdot 3}\right)^v \left(\frac{2}{3}\right)^{3nv/2}, \\
g_2(s) &= \frac{1}{s!}\left(\frac{a(n^2-4)(n-4)(3n+2)}{2^7\cdot 3^2}\right)^s \left(\frac{2}{3}\right)^{3ns/2}, \\
g_3(r) &= \frac{1}{r!}\left(\frac{a(n^2-4)}{2^4\cdot 3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{nr}.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $v \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ и $r \geqslant 0$

1) функция $g_1(v)$ принимает максимальное значение либо при

$$v = v_0 = \left\lfloor \frac{a(n^2-4)n}{2^7\cdot 3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \right\rfloor, \tag{29}$$

либо при $v = v_0 + 1$;

2) функция $g_2(s)$ принимает максимальное значение либо при

$$s = s_0 = \left\lfloor \frac{a(n^2-4)(n-4)(3n+2)}{2^7 \cdot 3^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \right\rfloor, \tag{30}$$

либо при $s = s_0 + 1$;

3) функция $g_3(r)$ принимает максимальное значение либо при

$$r = r_0 = \left\lfloor \frac{a(n^2-4)}{2^4 \cdot 3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \right\rfloor, \tag{31}$$

либо при $r = r_0 + 1$;

Пользуясь (29)–(31), при $n \to \infty$ получаем

$$\sum_{|v-v_0| \leqslant n\sqrt{v_0}} g_1(n,v) \sim \sum_{v=0}^{\infty} g_1(v) = \exp\left\{ \frac{a(n^2-4)n}{2^7 \cdot 3} \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \right\} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \sum_{|s-s_0| \leqslant n\sqrt{s_0}} g_2(s) &\sim \sum_{s=0}^{\infty} g_2(s) \\ &= \exp\left\{ \frac{a(n^2-4)(n-4)(3n+2)}{2^7 \cdot 3^2} \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \right\}, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\sum_{|r-r_0| \leqslant n\sqrt{r_0}} g_3(r) \sim \sum_{r=0}^{\infty} g_3(r) = \exp\left\{ \frac{a(n^2-4)}{2^4 \cdot 3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \right\}. \tag{34}$$

Подставляя (32)–(34) в (28), получаем

$$\begin{aligned} |F_2^0(n)| \sim\ & 2^{2^{n-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \exp\left\{ \frac{a(n^2-4)}{2^4 \cdot 3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \right. \\ & \left. +\ \left[\frac{a(n^2-4)(n-4)(3n+2)}{2^7 \cdot 3^2} + \frac{a(n^2-4)n}{2^7 \cdot 3} \right] \left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \right\} \\ & \times \sum_{|k-k_0| \leqslant n\sqrt{k_0}} \frac{1}{k! 3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{nk/2} |\vec{W}_D^4(n,k)|. \end{aligned} \tag{35}$$

§ 4. Доказательство соотношения (10). Второй этап

При установлении асимптотики для $|\vec{W}_D^4(n,k)|$ аналогичным способом возникают трудности, связанные с двумя причинами. Первая причина состоит в следующем. Пусть в последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{W}_D^4(n,k)$ наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ таковы, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) = 4$. Тогда

$$|S(n,\widetilde{\alpha}_i,2) \cup S(n,\widetilde{\alpha}_j,2)| = 2\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) - 4 + 2 = \frac{1}{2}n^2 - 4,$$

$$|P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_j)| = 2\binom{n/2+1}{2} - 1 = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - 1,$$

и, следовательно,

$$|S(n,\widetilde{\alpha}_i,2) \cup S(n,\widetilde{\alpha}_j,2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_j)| = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - 5. \tag{36}$$

Если $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) > 4$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) \neq n-4$, то

$$|S(n,\widetilde{\alpha}_i,2) \cup S(n,\widetilde{\alpha}_j,2)| = 2\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) + 2 = \frac{1}{2}n^2,$$

$$|P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_j)| = 2\binom{n/2+1}{2} = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n$$

и, следовательно,

$$|S(n,\widetilde{\alpha}_i,2) \cup S(n,\widetilde{\alpha}_j,2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_j)| = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{2}n. \tag{37}$$

Различие в (36) и (37) приходится учитывать, поскольку в типичных последовательностях из $\vec{W}_D^4(n,k)$ имеется достаточно много пар наборов $(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j)$ таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) = 4$.

Теперь поясним вторую причину. Наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ назовем *далекими,* если они имеют только одну общую единичную компоненту.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Если $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — далекие наборы из $E^{n,n/2-1}$, то*

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup S(n,\widetilde{\beta},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = \frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - 6. \tag{38}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2)| = |S(n,\widetilde{\beta},2)| = (\tfrac{n}{2}+1)(\tfrac{n}{2}-1) + 1 = \tfrac{1}{4}n^2,$$

$$|P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})| = |P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = \binom{n/2+1}{2} = \tfrac{1}{8}n(n+2),$$

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cap P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = |S(n,\widetilde{\beta},2) \cap P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})| = 3.$$

Поэтому

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2)\cup S(n,\widetilde{\beta},2)\cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})\cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})|=\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{2}n-6.$$

Лемма 5 доказана.

Таким образом, в случае любых двух далеких наборов из $E^{n,n/2-1}$ величина из (38) отличается от величины из (37). Это различие необходимо учитывать.

Множество наборов в каждой последовательности $\vec{C}=\widetilde{\alpha}_1\dots\widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{W}_D^4(n,k)$ разобьем на *псевдосвязки.* Наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ включаются в одну псевдосвязку тогда и только тогда, когда в $\vec{C}$ имеются наборы $\widetilde{\alpha}_{w_1},\dots,\widetilde{\alpha}_{w_z}$ такие, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i,\widetilde{\alpha}_{w_1})=\rho(\widetilde{\alpha}_{w_z},\widetilde{\alpha}_j)=4$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_{w_t},\widetilde{\alpha}_{w_{t+1}})=4$ при каждом t, $1\leqslant t\leqslant z-1$.

Обозначим через $\vec{R}_1^0(n,k)$ множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{W}_D^4(n,k)$, что в $\vec{C}$ имеется по меньшей мере одна псевдосвязка, состоящая не менее чем из четырех наборов.

Лемма 6. *Если $k+r+s+v\leqslant a(2/3)^{n/2}$, то при $n\to\infty$*

$$|\vec{R}_1^0(n,k)|=o(|\vec{W}_D^4(n,k)|).$$

Доказательство. Нетрудно понять, что в каждой последовательности $\vec{C}=\widetilde{\alpha}_1\dots\widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{R}_1^0(n,k)$ можно выделить 4 набора, которые (без учета остальных наборов из $\vec{C}$) образуют четырехэлементную псевдосвязку (имеется $\binom{k}{4}<2^{-4}k^4$ возможностей для выбора позиций таких наборов).

Рассмотрим такие последовательности $\vec{C}=\widetilde{\alpha}_1\dots\widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{R}_1^0(n,k)$, в которых наборы $\widetilde{\alpha}_5,\dots,\widetilde{\alpha}_k$ фиксированы, а наборы $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3,\widetilde{\alpha}_4$ произвольны, но таковы, что они образуют одну псевдосвязку. Множество таких последовательностей обозначим через из $\vec{Z}_1(n,k)$. Используя $\vec{Z}_1(n,k)$, оценим сверху размер множества из $\vec{R}_1^0(n,k)$. Все последовательности (и некоторые другие) из $\vec{Z}_1(n,k)$ можно получить следующим способом.

1) В первую позицию помещается допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ (для выбора $\widetilde{\alpha}$ имеется менее a возможностей).

2) Берется такой допустимый набор $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})=4$, и помещается в любую (например, во вторую) из трех позиций (имеется менее $2^{-4}n^4$ возможностей).

3) Берется такой допустимый набор $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,n/2-1}$, что $\widetilde{\gamma}$ находится на расстоянии 4 по меньшей мере от одного из наборов $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}$, и помещается либо в третью, либо в четвертую (например, в третью) позицию (имеется менее $2^{-4}n^4$ возможностей).

4) Берется такой допустимый набор $\widetilde{\delta}$ из $E^{n,n/2-1}$, что $\widetilde{\delta}$ находится на расстоянии 4 по меньшей мере от одного из наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$, и помещается в четвертую позицию (имеется менее $2^{-4}n^4$ возможностей).

Из сказанного следует, что

$$|\vec{R}_1^0(n,k)| < 2^{-16}an^{12}k^4|\vec{W}_D^4(n,k-4)|. \tag{39}$$

Оценим снизу величину $|\vec{W}_D^4(n,k)|$. Рассмотрим такие последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{Z}_1(n,k)$, в каждой из которых наборы $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\alpha}_4$ допустимы и принадлежат одноэлементным псевдосвязкам в $\vec{C}$, причем каждый такой набор находится на расстоянии не менее 6 от уже отобранных наборов. Ясно, что число возможностей для выбора одного такого набора больше $a - 2(k+2r+3s+3v)\binom{n}{4}$. Следовательно,

$$|\vec{W}_D^4(n,k)| > \left((a - 2(k+2r+3s+3v)\left(\begin{array}{c} n \\ 4 \end{array}\right)\right)^4 |\vec{W}_D^4(n,k-4)|.$$

Если выполняются условия леммы, то при $n \to \infty$

$$\left((a - 2(k+2r+3s+3v)\left(\begin{array}{c} n \\ 4 \end{array}\right)\right)^4 \sim a^4.$$

Поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$|\vec{W}_D^4(n,k)| > \frac{1}{2}a^4|\vec{W}_D^4(n,k-4)|. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует, что

$$|\vec{R}_1^0(n,k)|/|\vec{W}_D^4(n,k)| < 2^{-15}a^{-3}n^{12}k^4 < 2^{-15}an^{12}\,(2/3)^{2n} = \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.
Лемма 6 доказана.

Пусть

$$\vec{R}_2^0(n,k) = \vec{W}_D^4(n,k) \setminus \vec{R}_1^0(n,k). \tag{41}$$

Пользуясь леммой 6 и (41), получаем

Следствие 1. *Если* $k+r+s+v \leqslant a\,(2/3)^{n/2}$, *то при* $n \to \infty$

$$|\vec{R}_2^0(n,k)| \sim |\vec{W}_D^4(n,k)|.$$

Положим $k = m + 2t + 2u + 3z$. Обозначим через $\vec{R}_2^0(n,m,t,u,z)$ множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{R}_2^0(n,k)$, что в $\vec{C}$ имеется

t двухэлементных псевдосвязок, z трехэлементных псевдосвязок, u пар далеких наборов и m одноэлементных псевдосвязок, состоящих из наборов, отличных от тех, которые принадлежат парам далеких наборов в $\vec{C}$. Тогда согласно следствию 1 имеем

$$|\vec{W}_D^4(n,k)| \sim \sum_{m+2t+2u+3z=k} |\vec{R}_2^0(n,m,t,u,z)|. \tag{42}$$

Обозначим через $\mathcal{D}_1(m,t,u,z)$ множество всех разбиений множества $S_1 = \{1,2,\ldots,k\}$ на m одноэлементных подмножеств, t двухэлементных подмножеств первого типа, u двухэлементных подмножеств второго типа и z трехэлементных подмножеств. Как при доказательстве леммы 1 убеждаемся в том, что

$$|\mathcal{D}_1(m,t,u,z)| = \frac{(m+2t+2u+3z)!}{m!t!u!z!2^{t+u}6^z} = \frac{k!}{m!t!u!z!2^{t+u}6^z}. \tag{43}$$

Пусть D_1 — произвольное разбиение из $\mathcal{D}_1(m,t,u,z)$. Последовательность $\vec{C}$ из $\vec{R}_2^0(n,m,t,u,z)$ будем называть *согласованной* с разбиением D_1, если

(a) каждый элемент одноэлементного подмножества из D_1 является номером позиции, в которой находится набор, принадлежащий одноэлементной псевдосвязке в $\vec{C}$;

(b) элементы каждого двухэлементного подмножества первого типа из D_1 являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых расположены наборы двухэлементной псевдосвязки;

(c) элементы каждого двухэлементного подмножества второго типа из D_1 являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых расположены далекие наборы;

(d) элементы каждого трехэлементного подмножества из D_1 являются номерами тех позиций в $\vec{C}$, в которых расположены наборы трехэлементной псевдосвязки.

Множество последовательностей из $\vec{R}_2^0(n,m,t,u,z)$, согласованных с разбиением D_1, обозначим через $\vec{R}_{D_1}^0(n,m,t,u,z)$. Из (42), (43) и определения согласованности следует,что

$$|\vec{W}_D^4(n,k)| \sim \sum_{m+2t+2u+3z=k} \frac{k!}{m!t!u!z!2^{t+u}6^z} |\vec{R}_{D_1}^0(n,m,t,u,z)|,$$

где в качестве D_1 взято такое разбиение множества S_1, в котором первые m элементов принадлежат одноэлементным подмножествам; элементы, начиная с $(m+1)$-го и кончая $(m+2t)$-м, принадлежат двухэлементным

подмножествам первого типа; элементы, начиная с $(m+2t+1)$-го и кончая $(m+2t+2u)$-м, принадлежат двухэлементным подмножествам второго типа; элементы, начиная с $(m+2t+2u+1)$-го и кончая $(m+2t+2u+3z)$-м, принадлежат трехэлементным подмножествам.

Обозначим через $\vec{W}^5_{D_1}(n,z)$ множество согласованных с D_1 заполнений $3z$ последних позиций при порождении последовательностей из $\vec{R}^0_2(n,m,t,\,u,z)$ допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$.

Лемма 7. *При* $n\to\infty$

$$|\vec{W}^5_{D_1}(n,z)| < (2^{-10}an^8)^z.$$

Доказательство. Пусть i-е трехэлементное подмножество в разбиении D_1 состоит из элементов $m+2t+2u+3(i-1)+1$, $m+2t+2u+3(i-1)+2$ и $m+2t+2u+3(i-1)+3$, где $1\leqslant i\leqslant z$. Тогда все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения этих трех позиций можно получить следующим способом.

1) В $(m+2t+2u+3(i-1)+1)$-ю позицию помещается произвольный допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ (имеется менее a возможностей).

2) Отбирается такой допустимый набор $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})=4$, и помещается либо в $(m+2t+2u+3(i-1)+2)$-ю, либо в $(m+2t+2u+3(i-1)+3)$-ю позицию (имеется менее $2^{-5}n^4$ возможностей).

3) Отбирается такой допустимый набор $\widetilde{\gamma}$ из $E^{n,n/2-1}$, что расстояние между $\widetilde{\gamma}$ и по меньшей мере одним из наборов $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}$ равно 4, и помещается в оставшуюся позицию (имеется менее $2^{-5}n^4$ возможностей).

Из пп. 1–3 следует утверждение леммы 7.

Обозначим через $\vec{W}^6_{D_1}(n,u)$ множество согласованных с D_1 заполнений $2u$ позиций допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$, начиная с $(m+2t+1)$-й и кончая $(m+2t+2u)$-й, при порождении последовательностей из $\vec{R}^0_2(n,m,t,u,z)$.

Замечание 3. При включении остальных наборов в последовательности из $\vec{W}^4_D(n,k)$ (т. е. наборов, принадлежащих одноэлементным и двухэлементным псевдосвязкам и парам далеких вершин) некоторые наборы могут оказаться далекими от наборов, принадлежащих множеству $\vec{W}^3_D(n,k)$ (см. лемму 5). Выше было установлено, что 2-проекции наборов, являющихся дополнительными к далеким, пересекаются со слойными шарами радиуса 2 соответствующих вершин из $\vec{W}^3_D(n,k)$. Такое пересечение следовало бы учитывать. Однако мы этого не делаем по той причине, что число таких далеких вершин в каждой типичной последовательности из $\vec{W}^4_D(n,k)$ достаточно мало (не превосходит $an^6(2/3)^{3n/2}$)

и поэтому такие пересечения можно не учитывать.

Лемма 8. *Пусть* $k + r + s + v \leqslant a\,(2/3)^{n/2}$. *Тогда при любом* $u \leqslant an^3\,(2/3)^{3n/2}$ *и* $n \to \infty$

$$|\vec{W}^6_{D_1}(n,u)| \sim \left\{\frac{1}{2^5\cdot 3}a(n^2-4)n(n-2)\right\}^u.$$

Доказательство. Пусть i-е двухэлементное подмножество в разбиении D_1 состоит из элементов $m+2t+2(i-1)+1$ и $m+2t+2u(i-1)+2$, где $1 \leqslant i \leqslant u$. Тогда все рассматриваемые (и некоторые другие) заполнения позиций, начиная с $(m+2t+1)$-й и кончая $(m+2t+2u)$-й, можно получить следующим способом.

1) В $(m+2t+2u(i-1)+1)$-ю позицию помещается произвольный допустимый набор $\widetilde{\alpha}$ из $E^{n,n/2-1}$ (имеется менее a возможностей).

2) В $(m+2t+2u(i-1)+2)$-ю позицию помещается такой допустимый набор $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$, что $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ имеют одну общую единичную компоненту. Для выбора $\widetilde{\beta}$ имеется $\left(\frac{n}{2}-1\right)\begin{pmatrix} n/2+1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^5\cdot 3}(n^2-4)n(n-2)$ возможностей.

Из пп. 1 и 2 следует, что

$$|\vec{W}^6_{D_1}(n,u)| < \left\{\frac{1}{2^5\cdot 3}a(n^2-4)n(n-2)\right\}^u. \tag{44}$$

Оценим размер множества $\vec{W}^6_{D_1}(n,u)$ снизу. Пусть в позиции с номерами $m+2t+2(i-1)+1$, $1 \leqslant i \leqslant u$, последовательно помещаются такие наборы $\widetilde{\alpha}_1,\dots,\widetilde{\alpha}_u$, что расстояние Хемминга между очередным набором $\widetilde{\alpha}_i$ и любым уже отобранным набором не меньше 6. Тогда для выбора набора $\widetilde{\alpha}_i$ имеется более $a-(k+2r+2s+3v)n^4$ возможностей. В этом случае число способов размещения допустимых наборов в позиции с номерами $m+2t+2(i-1)+2$, $1 \leqslant i \leqslant u$, в точности равно $\left\{\frac{1}{2^5\cdot 3}(n^2-4)n(n-2)\right\}^u$. Следовательно, при выполнении условия леммы и $n \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}|\vec{W}^6_{D_1}(n,u)| &> \left\{\tfrac{1}{2^5\cdot 3}(n^2-4)n(n-2)(a-(k+2r+3s+3v)n^4\right\}^u \\ &\sim \left\{\tfrac{1}{2^5\cdot 3}a(n^2-4)n(n-2)\right\}^u.\end{aligned} \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует утверждение леммы 8.

Обозначим через $\vec{W}^7_{D_1}(n,t)$ множество согласованных с D_1 заполнений допустимыми наборами из $E^{n,n/2-1}$ позиций, начиная с $(m+1)$-й и кончая $(m+2t)$-й, при порождении последовательностей из $\vec{R}^0_2(n,m,t,u,z)$.

Лемма 9. *Пусть* $k + r + s + v \leqslant a\,(2/3)^{n/2}$. *Тогда при любом* $t \leqslant an^5\,(2/3)^{3n/2}$ *и* $n \to \infty$

$$|\vec{W}^7_{D_1}(n,t)| \sim \left\{\frac{1}{2^6}a(n^2-4)n(n-4)\right\}^t.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 8 и поэтому не приводится.

§ 5. Завершение доказательства соотношения (10)

Для завершения доказательства соотношения (10) требуется дополнительная информация о расположении двухэлементных псевдосвязок и далеких пар наборов в типичных последовательностях из $\vec{W}^4_D(n,k)$. Поскольку в обоих случаях рассуждения аналогичны, мы ограничиваемся подробным изучением расположения только двухэлементных псевдосвязок.

Ясно, что при порождении любой последовательности $\vec{C}$ из $\vec{W}^4_D(n,k)$ вероятность появления набора (называемого *особым*), который образует двухэлементную псевдосвязку с некоторым предшествующим набором из $\vec{C}$, возрастает при удалении от начала последовательности. Нам нужна более детальная информация о таком расположении.

Каждую последовательность $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{W}^4_D(n,k)$ разобьем на последовательные блоки $B_1, \ldots, B_p$ длины $b = \lfloor k^{4/5} \rfloor$, $p \leqslant k^{1/5} + 1$; последний блок может содержать меньше наборов.

Обозначим через $\vec{W}^4_D(n,k,i,w_i)$ множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{W}^4_D(n,k)$, что в i-м блоке последовательности $\vec{C}$, состоящим из наборов $\widetilde{\alpha}_{(i-1)b+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_{(i-1)b+b}$, содержится w_i особых наборов.

Лемма 10. *Пусть* $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ *и* i *— произвольное натуральное число,* $1 \leqslant i \leqslant p$. *Тогда при любом* w_i *таком, что*

$$\left| w_i - \frac{(n^2-4)(n-4)nb^2(i-\frac{1}{2})}{2^6 a} \right| \geqslant n^3 k^{9/10} a^{-1/2},$$

справедливо неравенство

$$|\vec{W}^4_D(n,k,i,w_i)| < |\vec{W}^4_D(n,k)| 2^{-n^2/2}.$$

Доказательство. Начнем с рассмотрения первого блока. Переобозначим через $\vec{Z}(n,b)$ множество $\vec{W}^4_D(n,b)$. Через $\vec{Z}(n,b,w)$ обозначим множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{Z}(n,b)$, что в $\vec{C}$ имеется

точно w двухэлементных псевдосвязок. Нетрудно видеть, что число расположений таких псевдосвязок в последовательностях из $\vec{Z}(n,b,w)$ равно $\dfrac{b!}{(b-2w)!w!2^w}$. Предположим, что i-я псевдосвязка располагается в $(b-2w+2(i-1)+1)$-й и в $(b-2w+2(i-1)+2)$-й позициях, $1\leqslant i\leqslant w$. Пусть в первых $b-2w$ позициях и в позициях с номерами $(b-2w+2(i-1)+1)$, где $1\leqslant i\leqslant w$, наборы уже определены. Тогда при каждом i, $1\leqslant i\leqslant w$, в $(b-2w+2(i-1)+2)$-ю позицию следует поместить набор $\widetilde{\alpha}_{b-2w+2(i-1)+2}$ такой, что $\rho(\widetilde{\alpha}_{b-2w+2(i-1)+1},\widetilde{\alpha}_{b-2w+2(i-1)+2})=4$. Число возможностей для выбора такого набора равно

$$\binom{n/2-1}{2}\binom{n/2+1}{2}=2^{-6}(n^2-4)(n-4)n.$$

Поэтому

$$|\vec{Z}(n,b,w)|/|\vec{Z}(n,b)|>\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^6a}\right)^w\frac{b!}{(b-2w)!w!2^w}\tag{46}$$

и

$$|\vec{Z}(n,b,w)|/|\vec{Z}(n,b)|<\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^6(a-n^4a(2/3)^{n/2}}\right)^w\frac{b!}{(b-2w)!w!2^w}.\tag{47}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $n\to\infty$ правые части неравенств (46) и (47), как функции от w, сначала возрастают, затем убывают и принимают максимальные значения либо при

$$w=w_0=\left\lfloor\frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7a}\right\rfloor,\tag{48}$$

либо при $w=w_0+1$. Пользуясь (48), при

$$g=\lfloor n^3k^{9/10}a^{-1/2}\rfloor\tag{49}$$

получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\vec{Z}(n,b)|}\sum_{u\geqslant g}|\vec{Z}(n,b,w_0+u)|\\&<\sum_{u\geqslant g}\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^7(a-n^4k)}\right)^{w_0}\frac{b!}{(b-2w_0-2u)!(w_0+u)!}\\&<\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^7(a-n^4k)}\right)^{w_0}\frac{b!}{(b-2w_0)!w_0!}\sum_{u\geqslant g}\left\{\left(\frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7(a-n^4k)}\right)^u\right.\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^{u}(w_0+i)^{-1}\Bigg\} < \sum_{u\geqslant g}\left\{\left(\frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7(a-n^4k)w_0}\right)^u \Big/ \prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{i}{w_0}\right)\right\}$$
$$< \sum_{u\geqslant g}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{n^4k}{a}\right)^u}\Big/\prod_{i=1}^{u}\left(1+\frac{i}{w_0}\right)\right\}$$
$$< \sum_{u\geqslant g}1\Big/\left(\left(1-\frac{n^4k}{a}\right)^u\left(1+\frac{u}{w_0}\right)^{u/2}\right).$$

Пользуясь (49), убеждаемся в том, что $g > n\sqrt{w_0}$ и $n^4k/a = o(g/w_0)$. Поэтому

$$\frac{1}{|\vec{Z}(n,b)|}\sum_{u\geqslant g}|\vec{Z}(n,b,w_0+u)| < \frac{b}{\left(1-\frac{n^4k}{a}\right)^b\left(1+\frac{g}{w_0}\right)^{g/2}} < 2^{-n^2/2-1}.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\frac{1}{|\vec{Z}(n,b)|}\sum_{u\leqslant w_0-g}|\vec{Z}(n,b,u)| < 2^{-n^2/2-1}.$$

Из последних двух неравенств следует утверждение леммы при $i=1$.

Предположим, что лемма доказана при $i=1,2,\ldots,j-1$. Убедимся в ее справедливости при $i=j$.

Двухэлементную псевдосвязку в последовательности $\vec{C}$ из $\vec{Z}(n,ib)$, состоящую из наборов i-го блока, назовем псевдосвязкой *первого типа*. Двухэлементную псевдосвязку из $\vec{C}$, в которой один набор принадлежит i-му блоку, а другой — одному из предшествующих блоков, назовем псевдосвязкой *второго типа*.

Рассмотрим последовательности $\vec{C}$ из $\vec{Z}(n,ib,w)$ такие, что в $\vec{C}$ содержится w_1 псевдосвязок первого типа и w_2 псевдосвязок второго типа, где $w_1+w_2=w$. Нетрудно видеть, что число способов расположения псевдосвязок первого типа в таких последовательностях равно $\dfrac{b!}{(b-2w_1)!w_1!2^{w_1}}$, а второго типа — меньше $\dbinom{(i-1)b}{w_2}\dbinom{b}{w_2}w_2!$. Поэтому

$$|\vec{Z}(n,ib,w_1+w_2)|/|\vec{Z}(n,ib)| < \left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^7(a-n^4k)}\right)^{w_1}\frac{b!}{(b-2w_1)!w_1!}$$
$$\times\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^6(a-n^4k)}\right)^{w_2}\binom{(i-1)b}{w_2}\binom{b}{w_2}w_2!.$$

Используя приведенные выше рассуждения, убеждаемся в том, что при $n \to \infty$ выражение

$$\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^7(a-n^4k)}\right)^{w_1} \frac{b!}{(b-2w_1)!w_1!},$$

как функция от w_1, сначала возрастает, затем убывает и принимает максимальное значение либо при

$$w_1 = w_{1,0} = \left\lfloor \frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7 a} \right\rfloor, \tag{50}$$

либо при $w_1 = w_{1,0}+1$. Аналогичным способом убеждаемся в том, что при $n \to \infty$ выражение

$$\left(\frac{(n^2-4)(n-4)n}{2^6(a-n^4k)}\right)^{w_2} \binom{(i-1)b}{w_2} \binom{b}{w_2} w_2!,$$

как функция от w_2, сначала возрастает, затем убывает и принимает максимальное значение либо при $w_2 = w_{2,0} = \left\lfloor \frac{(n^2-4)(n-4)n(i-1)b^2}{2^6 a} \right\rfloor$, либо при $w_2 = w_{2,0}+1$. Используя (50), имеем

$$\begin{aligned} w_{1,0} + w_{2,0} \leqslant\ & \frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7 a} + \frac{(n^2-4)(n-4)n(i-1)b^2}{2^6 a} + 2 \\ = \ & \frac{(n^2-4)(n-4)n(i-1/2)b^2}{2^6 a} + 2. \end{aligned}$$

Как и в случае первого блока убеждаемся в том, что если g взято из (49), то

$$\frac{1}{|\vec{Z}(n,ib)|} \sum_{u \geqslant g} |\vec{Z}(n, ib, w_{1,0}+w_{2,0}+u)| < 2^{-n^2/2-1}.$$

Справедливость неравенства

$$\frac{1}{|\vec{Z}(n,ib)|} \sum_{u \leqslant w_{1,0}+w_{2,0}-g} |\vec{Z}(n, ib, u)| < 2^{-n^2/2-1}$$

доказывается аналогичным способом с учетом следующего факта. Пусть число особых наборов в j-м блоке, где $j = 1, 2, \ldots, i-1$, не превосходит

$$\frac{(n^2-4)(n-4)n(j-1/2)b^2}{2^6 a} + n^3 k^{9/10} a^{-1/2}$$

и число псевдосвязок первого типа в i-м блоке не превосходит

$$\frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7 a} + n^3 k^{9/10} a^{-1/2}.$$

Тогда при любом $w_2 \leqslant 2w_{2,0}$ и $n \to \infty$ число способов расположения w_2 псевдосвязок, относящихся к i-му блоку, не меньше

$$\binom{(i-1)b - \left\lceil \frac{i^2(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^7 a} \right\rceil}{w_2} \binom{b - \left\lceil \frac{(n^2-4)(n-4)nb^2}{2^6 a} \right\rceil}{w_2} w_2$$
$$\sim \frac{((i-1)b)^{w_2}}{w_2!} b^{w_2} \sim \binom{(i-1)b}{w_2} \binom{b}{w_2} w_2!.$$

Следовательно, наличие такого числа двухэлементных псевдосвязок в первых $i-1$ блоках и в i-м блоке можно не учитывать.

Из (49) и (50) следует утверждение леммы при $i = j$. Лемма 10 доказана.

Пусть $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ — произвольная последовательность из $\vec{W}^4_D(n,k)$, разбитая на блоки длины b. Набор $\widetilde{\alpha}_i$ из $\vec{C}$ назовем *парным*, если в $\vec{C}$ содержится такой набор $\widetilde{\alpha}_j$, $j < i$, что в $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ имеется только одна общая единичная компонента, т. е. наборы $\widetilde{\alpha}_i$ и $\widetilde{\alpha}_j$ являются далекими.

Обозначим через $\vec{W}^5(n,k,i,w_i)$ множество таких последовательностей $\vec{C}$ из $\vec{W}^4_D(n,k)$, что в i-м блоке последовательности $\vec{C}$ содержится w_i особых наборов, принадлежащих парам далеких наборов.

Лемма 11. *Пусть $k \leqslant a(2/3)^{n/2}$ и i — произвольное натуральное число, $1 \leqslant i \leqslant p$. Тогда при любом w_i таком, что*

$$\left| w_i - \frac{(n^2-4)(n-2)nb^2(i-1/2)}{2^5 \cdot 3a} \right| \geqslant n^3 k^{9/10} a^{-1/2},$$

справедливо неравенство

$$|\vec{W}^5(n,k,i,w_i) < |\vec{W}^4_D(n,k)| 2^{-n^2/2}.$$

Доказательство этой леммы фактически совпадает с доказательством леммы 10. Отличие состоит лишь в следующем. Вместо величины $\frac{1}{2^6}(n^2-4)(n-4)n$, равной числу наборов в $E^{n,n/2-1}$, которые находятся на расстоянии 4 от фиксированного набора из $E^{n,n/2-1}$, надо использовать величину

$$(n/2-1)\binom{n/2+1}{3} = \frac{(n^2-4)(n-2)n}{2^5 \cdot 3},$$

равную числу наборов в $E^{n,n/2-1}$, которые имеют только одну общую компоненту с фиксированным набором из $E^{n,n/2-1}$.

Перейдем к нахождению асимптотики для $|\vec{W}_D^4(n,k)|$. Вернемся к рассмотрению 2-неразделенных последовательностей $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \dots \widetilde{\alpha}_w$ длины $w = k+2r+3s+3v$, в которых наборы $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_k$, образующие одноэлементные связки, еще не определены, наборы $\widetilde{\alpha}_{k+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_w$, уже заданы, причем $\widetilde{\alpha}_{k+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_{k+2r}$ образуют двухэлементные связки, $\widetilde{\alpha}_{k+2r+1}, \dots,$ $\widetilde{\alpha}_{k+2r+3s}$ — линейные трехэлементные связки и треугольные трехэлементные связки первого вида и $\widetilde{\alpha}_{k+2r+1}, \dots, \widetilde{\alpha}_{k+2r+3s}$ — треугольные трехэлементные связки второго вида.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \left| \bigcup_{i=k+2r+3s+1}^{w} \Big(S(n, \widetilde{\alpha}_i, 4) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \Big) \right|, \\
q_2 &= \left| \bigcup_{i=k+2r+1}^{k+2r+3s} \Big(S(n, \widetilde{\alpha}_i, 4) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \Big) \right|, \\
q_3 &= \left| \bigcup_{i=k+1}^{k+2r} \Big(S(n, \widetilde{\alpha}_i, 4) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \Big) \right|, \\
q\ &= q_1 + q_2 + q_3.
\end{aligned}$$

Пусть в последовательности $\vec{C}$ наборы $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{j-1}$ уже определены, $j \leqslant k$. Тогда число возможностей для выбора набора $\widetilde{\alpha}_j$ равно

$$a - \left| \bigcup_{i=1}^{j-1} \Big(S(n, \widetilde{\alpha}_i, 2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}_i) \Big) \right| - q.$$

Следовательно, с возрастанием q число возможностей для выбора $\widetilde{\alpha}_j$ убывает.

При рассматриваемых k, s_0, v_0 нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\left(1 - \frac{n^4(s_0 + n\sqrt{s_0})}{a - n^4 k}\right)^k \sim 1, \ \left(1 - \frac{n^4(v_0 + n\sqrt{v_0})}{a - n^4 k}\right)^k \sim 1,$$
$$\left(1 - \frac{n^6(h_0 + n\sqrt{h_0})}{a - n^4 k}\right)^k \sim 1.$$

Кроме того, если $x \leqslant n\sqrt{r_0}$, то

$$\left(1 - \frac{n^4 x}{a - n^4 k}\right)^r \sim 1.$$

Поэтому при нахождении числа способов выбора наборов $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k$ можно полагать, что $v = 0$, $s = 0$, $r = r_0$, причем расстояние между любыми двумя наборами из разных двухэлементных связок больше 8.

Множество последовательностей из $\vec{W}_D^4(n,k)$ при таких v, s и r обозначим через $\vec{W}_D^8(n,k)$. Из сказанного выше следует, что при $n \to \infty$

$$|\vec{W}_D^4(n,k)| \sim |\vec{W}_D^8(n,k)|. \tag{51}$$

Через $\vec{W}_D^9(n,k)$ обозначим множество последовательностей $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{W}_D^8(n,k)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

(a) в $\vec{C}$ нет псевдосвязок объема не менее 4;

(b) в $\vec{C}$ имеется не более $a(2/3)^{3n/2}$ трехэлементных псевдосвязок;

(c) в i-м блоке, $1 \leqslant i \leqslant p$, последовательности $\vec{C}$ содержится не менее $\dfrac{1}{2^6 a}(n^2-4)(n-4)nb^2(i-1/2) - n^3k^{9/10}a^{-1/2}$ и не более $\dfrac{1}{2^6 a}(n^2-4)(n-4)nb^2(i-1/2) + n^3k^{9/10}a^{-1/2}$ особых наборов, принадлежащих двухэлементным псевдосвязкам;

(d) в i-м блоке, $1 \leqslant i \leqslant p$, последовательности $\vec{C}$ содержится не менее $\dfrac{1}{2^5 \cdot 3a}(n^2-4)(n-2)nb^2(i-1/2) - n^3k^{9/10}a^{-1/2}$ и не более $\dfrac{1}{2^5 \cdot 3a}(n^2-4)(n-2)nb^2(i-1/2) + n^3k^{9/10}a^{-1/2}$ особых наборов, принадлежащих парам далеких вершин.

Убедимся в том, что

$$|\vec{W}_D^9(n,k)| \sim |\vec{W}_D^8(n,k)|. \tag{52}$$

Во-первых, число последовательностей из $\vec{W}_D^8(n,k)$, которые не удовлетворяют условию (a), равно $o(|\vec{W}_D^8(n,k)|)$. Это следует из леммы 6. Во-вторых, число последовательностей из $\vec{W}_D^8(n,k)$, которые не удовлетворяют условию (b), равно $o(|\vec{W}_D^8(n,k)|)$. Это следует из леммы 7. В-третьих, число последовательностей из $\vec{W}_D^8(n,k)$, которые не удовлетворяют условию (c), равно $o(|\vec{W}_D^8(n,k)|)$. Это следует из леммы 10. В-четвертых, число последовательностей из $\vec{W}_D^8(n,k)$, которые не удовлетворяют условию (d), равно $o(|\vec{W}_D^8(n,k)|)$. Это следует из леммы 11.

Из (51) и (52) вытекает, что для завершения доказательства соотношения (10) остается найти асимптотику для $|\vec{W}_D^9(n,k)|$. Для этого найдем верхнюю и нижнюю оценки для $|\vec{W}_D^9(n,k)|$, асимптотически совпадающие между собой. При этом мы будем пользоваться следующими (легко проверяемыми) равенствами:

1) если $\widetilde{\alpha}$ — набор из $E^{n,n/2-1}$, то

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}})| = \frac{1}{8}n(3n+2) = \lambda; \tag{53}$$

2) если наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ являются далекими, то согласно лемме 6

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup S(n,\widetilde{\beta},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = \frac{1}{4}n(3n+2) - 6 = 2\lambda - 6; \quad (54)$$

3) если наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ таковы, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) > 4$, $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) \neq n-2$ и не являются далекими, то

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup S(n,\widetilde{\beta},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = 2\lambda; \quad (55)$$

4) если наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ таковы, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 4$, то

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup S(n,\widetilde{\beta},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = 2\lambda - 5; \quad (56)$$

5) если наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,n/2-1}$ таковы, что $\rho(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}) = 2$, то

$$|S(n,\widetilde{\alpha},2) \cup S(n,\widetilde{\beta},2) \cup P^2(\overline{\widetilde{\alpha}}) \cup P^2(\overline{\widetilde{\beta}})| = \frac{3}{4}n^2 - n + 1 = \nu. \quad (57)$$

Сначала найдем верхнюю оценку для $|\vec{W}^9_D(n,k)|$. Пусть $\vec{C}_1 = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_{q-1}$ — последовательность наборов из $E^{n,n/2-1}$, которую можно продолжить до последовательности $\vec{C} = \widetilde{\alpha}_1 \ldots \widetilde{\alpha}_{q-1} \ldots \widetilde{\alpha}_k$ из $\vec{W}^9_D(n,k)$. Оценим сверху число способов выбора набора $\widetilde{\alpha}_q$ при условии, что $\widetilde{\alpha}_q$ находится в i-й позиции j-го блока, $1 \leqslant i \leqslant b$, $1 \leqslant j \leqslant p$.

Из определения множества $\vec{W}^9_D(n,k)$ следует, что среди наборов из $\vec{C}_1$, которые принадлежат первым $j-1$ блокам, должно быть не более

$$\sum_{l=1}^{j-1} \left\{ \frac{1}{2^6 a}(n^2-4)(n-4)nb^2(l-1/2) + n^3 k^{9/10} a^{-1/2} \right\} < \frac{(j-1)^2}{2^7 a}(n^2-4)(n-4)nb^2 + jn^3 k^{9/10} a^{-1/2}$$

особых наборов, которые принадлежат двухэлементным псевдосвязкам, и не более

$$\sum_{l=1}^{j-1} \left\{ \frac{1}{2^5 \cdot 3a}(n^2-4)(n-2)nb^2(l-1/2) + n^3 k^{9/10} a^{-1/2} \right\} < \frac{(j-1)^2}{2^7 a}(n^2-4)(n-2)nb^2 + jn^3 k^{9/10} a^{-1/2}$$

особых наборов, которые принадлежат парам далеких наборов из этих блоков.

Пользуясь этим фактом, равенствами (53)–(57) и соотношением

$$1-x=e^{\ln(1-x)}=\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right), \tag{58}$$

убеждаемся в том, что число способов выбора набора $\widetilde{\alpha}_h$ не превосходит

$$\begin{aligned}
& a- \ \nu r_0-(b(j-1)\lambda+5\left(\frac{j^2}{2^7a}(n^2-4)(n-4)nb^2+jn^3k^{9/10}a^{-1/2}\right)\\
+ \ & 6\left(\frac{j^2}{2^7a}(n^2-4)(n-2)nb^2+jn^3k^{9/10}a^{-1/2}\right)+jn^3(2/3)^{3n/2}\\
= \ & a\left\{1-\frac{\nu r_0}{a}-\frac{\lambda}{a}(b(j-1)+\frac{j^2}{2^7a^2}(n^2-4)(11n-32)nb^2\right.\\
+ \ & \left.\frac{11}{a\sqrt{a}}jn^3k^{9/10}+n^4(2/3)^{3n/2}\right\}= \ a\exp\left\{-\frac{1}{a}\nu r_0-\frac{\lambda bj}{a}-\frac{\lambda^2}{a^2}b^2j^2\right.\\
+ \ & \left.\frac{j^2}{2^7a^2}(n^2-4)(11n-32)nb^2+o(1/k)\right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, число способов выбора всех наборов, принадлежащих j-му блоку, не превосходит

$$\begin{aligned}
a^b\exp\Bigg\{\sum_{i=1}^{b}\Bigg[&-\frac{1}{a}\nu r_0-\frac{\lambda bj}{a}-\frac{\lambda^2}{a^2}b^2j^2\\
&+\frac{j^2}{2^7a^2}(n^2-4)(11n-32)nb^2+o(1/k)\Bigg]\Bigg\}\\
&=a^b\exp\left\{-\frac{b\nu r_0}{a}-\frac{\lambda}{a}b^2j-\frac{\lambda^2}{a^2}b^3j^2\right.\\
&\left.+\frac{j^2}{2^7a^2}(n^2-4)(11n-32)nb^3+o(b/k)\right\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
|\vec{W}_D^9(n,k)|<a^k\exp\Bigg\{&-\frac{\nu kr_0}{a}-\frac{\lambda k^2}{2a}-\frac{\lambda^2}{3a^2}k^3\\
&+\frac{k^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n-32)n+o(1)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Перейдем к рассмотрению нижней оценки для $|\vec{W}_D^9(n,k)|$. Из определения множества $\vec{W}_D^9(n,k)$ следует, что среди наборов из $\vec{C}_1$, которые принадлежат первым $j-1$ блокам, должно быть не менее

$$\sum_{l=1}^{j-1}\left\{\frac{1}{2^6a}(n^2-4)(n-4)nb^2(l-1/2)-n^3k^{9/10}a^{-1/2}\right\} \\ > \frac{(j-1)^2}{2^7a}(n^2-4)(n-4)nb^2-jn^3k^{9/10}a^{-1/2}+o(1/k)$$

особых наборов, которые принадлежат двухэлементным псевдосвязкам, и не менее

$$\sum_{l=1}^{j-1}\left\{\frac{1}{2^6a}(n^2-4)(n-2)nb^2(l-1/2)-n^3k^{9/10}a^{-1/2}\right\} \\ > \frac{(j-1)^2}{2^7a}(n^2-4)(n-2)nb^2-jn^3k^{9/10}a^{-1/2}+o(1)$$

особых наборов, которые принадлежат парам далеких наборов из этих блоков, а число способов выбора $\widetilde{\alpha}_h$ не меньше

$$a-\nu r_0-\lambda bj+5\left(\frac{(j-1)^2}{2^7a}(n^2-4)(n-4)nb^2-jn^3k^{9/10}a^{-1/2}\right) \\ +6\left(\frac{(j-1)^2}{2^7a}(n^2-4)(n-2)nb^2-jn^3k^{9/10}a^{-1/2}\right)-jn^3(2/3)^{3n/2}.$$

Далее, повторяя рассуждения, проведенные при установлении (59), убеждаемся в том, что

$$|\vec{W}_D^9(n,k)|>a^k\exp\left\{-\frac{\nu kr_0}{a}-\frac{\lambda k^2}{2a}-\frac{\lambda^2}{3a^2}k^3 \right. \\ \left. +\frac{k^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n-32)n-o(1)\right\}. \quad (60)$$

Из (51), (52) и (59), (60) следует, что

$$|\vec{W}_D^4(n,k)|\sim a^k\exp\left\{-\frac{\nu kr_0}{a}-\frac{\lambda k^2}{2a}-\frac{\lambda^2}{3a^2}k^3 \right. \\ \left. +\frac{k^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n-32)n\right\}. \quad (61)$$

Пусть

$$g_5(k) = \frac{a^k}{k!3^k}\left(\frac{2}{3}\right)^{nk/2}\exp\left\{-\frac{\nu k r_0}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2}{3a^2}k^3 + \frac{k^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n-32)n\right\}. \quad (62)$$

Убедимся в том, что функция $g_5(k)$ сначала возрастает, затем убывает и принимает максимальное значение либо при

$$k = k_0 = \left\lfloor \frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda a}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{\lambda^2 a}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} + \frac{a}{2^7\cdot 3^3}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} - \frac{\nu r_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2}\right\rfloor,$$

либо при $k = k_0 + 1$. С этой целью рассмотрим функцию

$$g_6(k) = g_5(k)/g_5(k-1) = \frac{a}{3k}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2}\exp\left\{-\frac{\nu r_0}{a} - \frac{\lambda k}{a} + \frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^2}{3a^2}(3k^2-3k+1) + \frac{1}{2^7\cdot 3a^2}(3k^2-3k+1)(n^2-4)(11n-32)n\right\}.$$

Легко видеть, что она убывает, причем $g_6(2)>1$ и $g_6\left(\left\lfloor\frac{a}{3}(2/3)^{n/2}\right\rfloor\right)<1$. Отсюда следует, что $g_6(k)$ принимает максимальное значение при $k < \frac{a}{3}(2/3)^{n/2}$. Вместо натурального k рассмотрим действительное переменное x. Пусть

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda a}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{\lambda^2 a}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \\ & + \frac{a}{2^7 3^3}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} - \frac{\nu r_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + y \\ = {} & \frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2}\left(1 - \frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2^7\cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \frac{\nu r_0}{a} + \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}}\right), \end{aligned}$$

где $-1 < y < 1$. Тогда

$$g_6(x) = \exp\left\{ -\frac{\nu r_0}{a} - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^2}{3a^2}(3x^2 - 3x + 1) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^7 3a^2}(3x^2 - 3x + 1)(n^2 - 4)(11n^2 - 32n) \right\}$$
$$\times \left\{ 1 - \frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^7 \cdot 9}(n^2 - 4)(11n^2 - 32n)\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{\nu r_0}{a} + \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} \right\}^{-1}.$$

Воспользовавшись равенством (58), при $n \to \infty$ получаем

$$\left\{ 1 - \frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^7 \cdot 9}(n^2 - 4)(11n^2 - 32n)\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{\nu r_0}{a} + \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} \right\}^{-1}$$
$$= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2^7 \cdot 9}(n^2 - 4)(11n^2 - 32n)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\nu r_0}{a} - \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} \right)^i \right] \right\}$$
$$= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2^7 \cdot 9}(n^2 - 4)(11n^2 - 32n)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\nu r_0}{a} - \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} \right)^i \right]$$
$$\left. + o\left(\frac{1}{na(2/3)^{n/2}}\right) \right\} = \exp\left\{ \frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right.$$
$$- \frac{1}{2^7 \cdot 9}(n^2 - 4)(11n^2 - 32n)\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\nu r_0}{a} - \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}}$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{na(2/3)^{n/2}}\right) \right\}. \tag{63}$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
g_6(x) = \exp\Bigg\{ & -\frac{\nu r_0}{a} - \frac{\lambda}{a}\Bigg[\frac{a}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda a}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{\lambda^2 a}{54}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} \\
+ & \frac{a}{2^7\cdot 3^3}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} - \frac{\nu r_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + y\Bigg] \\
- & \frac{\lambda^2}{3a^2}(3x^2-3x+1) + \frac{1}{2^7\cdot 3a^2}(3x^2-3x+1)(n^2-4)(11n^2-32n) \\
+ & \frac{\lambda}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} - \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \frac{1}{2^7\cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{\nu r_0}{a} \\
- & \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} + \frac{\lambda^2}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + o\left(\frac{1}{na\,(2/3)^{n/2}}\right)\Bigg\} = \exp\Bigg\{ \frac{\lambda^2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \\
- & \frac{\lambda^2}{3a^2}(3x^2-3x+1) + \frac{1}{2^7\cdot 3a^2}(3x^2-3x+1)(n^2-4)(11n^2-32n) \\
- & \frac{1}{2^7\cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} + o\left(\frac{1}{na\,(2/3)^{n/2}}\right)\Bigg\} \\
= & \exp\Bigg\{ -\frac{3y}{a\,(2/3)^{n/2}} + o\left(\frac{1}{na\,(2/3)^{n/2}}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что $g_6(x) > 1$ при $y < -1/n$ и $g_6(x) < 1$ при $y > 1/n$. Следовательно, обозначив через x_1 такое x, что $g_6(x_1) = 1$, имеем

$$
\begin{aligned}
x_1 = & \frac{a}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{\lambda a}{9}(2/3)^{n} + \frac{\lambda^2 a}{54}(2/3)^{3n/2} \\
& + \frac{a}{2^7\cdot 3^3}(n^2-4)(11n^2-32n)\left(\frac{2}{3}\right)^{3n/2} - \frac{\nu r_0}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} + y_0,
\end{aligned}
$$

где $|y_0| < 1/n$.

Положим $k_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, $\alpha = x_1 - k_1$. Воспользовавшись (62), получаем

$$
\begin{aligned}
g_5(k_1) \sim & \frac{a^{k_1}}{k_1!3^{k_1}}(2/3)^{nk_1/2}\exp\left\{-\frac{\nu k_1 r_0}{a} - \frac{\lambda k_1^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k_1^3}{3a^2}\right. \\
& \left. + \frac{k_1^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n^2-32n)\right\} \sim \frac{a^{k_1}e^{k_1}}{\sqrt{2\pi k_1}k_1^{k_1}3^{k_1}}(2/3)^{nk_1/2}
\end{aligned}
$$

$$\times\ \exp\left\{-\frac{\nu k_1 r_0}{a}-\frac{\lambda k_1^2}{2a}-\frac{\lambda^2 k_1^3}{3a^2}\ +\frac{k_1^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n^2-32n)\right\}.$$

Так как при $n\to\infty$

$$\begin{aligned}
&k_1^{k_1}=(x_1-\alpha)^{k_1}=x_1^{k_1}\left(1-\ \frac{\alpha}{x_1}\right)^{k_1}\sim x_1^{k_1}e^{-\alpha},\\
&\frac{\lambda k_1^2}{2a}=\frac{\lambda a}{18}(2/3)^n-\frac{\lambda^2 a}{27}(2/3)^{3n/2}+o(1),\\
&\frac{\lambda^2 k_1^3}{3a^2}=\frac{\lambda^2 a}{3^4}(2/3)^{3n/2}+o(1),\\
&\frac{k_1^3}{2^7\cdot 3a^2}(n^2-4)(11n^2-32n)=\frac{a}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}+o(1),
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
g_5(k_1)\sim{}&\frac{e^{x_1}}{\sqrt{2\pi k_1}}\left(\frac{a}{3x_1}(2/3)^{n/2}\right)^{k_1}\exp\left\{-\frac{\nu k_1 r_0}{a}-\frac{\lambda a}{18}(2/3)^n\right.\\
&\left.+\frac{\lambda^2 a}{27}(2/3)^{3n/2}-\frac{\lambda^2 a}{3^4}(2/3)^{3n/2}+\frac{a}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}\right\}\\
\sim{}&\frac{e^{x_1}}{\sqrt{2\pi k_1}}\left(1-\frac{\lambda}{3}(2/3)^{n/2}+\frac{\lambda^2}{18}(2/3)^n+\frac{1}{2^7\cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^n\right.\\
&\left.-\ \frac{\nu r_0}{a}+\frac{3y_0}{a(2/3)^{n/2}}\right)^{-k_1}\exp\left\{-\frac{\nu k_1 r_0}{a}-\frac{\lambda a}{18}(2/3)^n+\frac{\lambda^2 a}{27}(2/3)^{3n/2}\right.\\
&\left.-\frac{\lambda^2 a}{3^4}(2/3)^{3n/2}+\frac{a}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}\right\}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись (63), получаем

$$\begin{aligned}
g_5(k_1)\sim{}&\frac{e^{x_1}}{\sqrt{2\pi k_1}}\exp\left\{k_1\left[\frac{\lambda}{3}(2/3)^{n/2}-\frac{1}{2^7 9}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^n\right.\right.\\
&\left.+\ \frac{\nu r_0}{a}-\frac{3y_0}{a(2/3)^{n/2}}\right]-\frac{\nu k_1 r_0}{a}-\frac{\lambda a}{18}(2/3)^n+\frac{\lambda^2 a}{27}(2/3)^{3n/2}-\frac{\lambda^2 a}{3^4}(2/3)^{3n/2}\\
&\left.+\ \frac{a}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}\right\}.
\end{aligned}$$

В свою очередь, при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{\lambda k_1}{3}(2/3)^{n/2} = \frac{\lambda a}{9}(2/3)^n - \frac{\lambda^2 a}{27}(2/3)^{3n/2} + o(1),$$
$$\frac{k_1}{2^7 \cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^n = \frac{a}{2^7 3^3}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}$$
$$+o(1), \qquad \frac{3y_0 k_1}{a(2/3)^{n/2}} = o(1).$$

Пользуясь этими соотношениями, получаем

$$g_5(k_1) \sim \frac{e^{x_1}}{\sqrt{2\pi k_1}} \exp\left\{\frac{\lambda a}{18}(2/3)^n - \frac{\lambda^2 a}{3^4}(2/3)^{3n/2}\right.$$
$$\left. - \frac{a}{2^6 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2}\right\}$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1}} \exp\left\{a\left[\frac{1}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{\lambda}{18}(2/3)^n + \frac{\lambda^2}{2\cdot 3^4}(2/3)^{3n/2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^{3n/2} - \frac{\nu(n^2-4)}{2^4 3^2}(2/3)^{3n/2}\right]\right\}. \quad (64)$$

Пусть $k = k_1 + z$, где $0 \leqslant z \leqslant n\sqrt{k_1}$. Тогда

$$g_5(k) \sim \frac{a^k}{k! 3^k}(2/3)^{nk/2} \exp\left\{-\frac{\nu k r_0}{a} - \frac{\lambda k^2}{2a} - \frac{\lambda^2 k^3}{3a^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^3}{2^7 \cdot 3a^2}(n^2-4)(11n^2-32n)\right\}$$
$$\sim \frac{a^{k_1+z}}{(k_1+z)! 3^{k_1+z}}(2/3)^{n(k_1+z)/2} \exp\left\{-\frac{\nu k_1 r_0}{a} - \frac{\lambda k_1^2}{2a} - \frac{\lambda k_1 z}{a}\right.$$
$$\left. + \frac{\lambda^2 k_1^3}{3a^2} + \frac{k_1^3}{2^7 \cdot 3a^2}(n^2-4)(11n^2-32n)\right\}$$
$$\sim g_5(k_1)\frac{a^z}{3^z}(2/3)^{nz/2} \exp\left(-\frac{\lambda k_1 z}{a}\right) \prod_{i=1}^{z}(k_1+i)^{-1}.$$

В свою очередь, при $n \to \infty$ имеем

$$\prod_{i=1}^{z}(k_1+i) = k_1^z \prod_{i=1}^{z}\left(1+\frac{i}{k_1}\right) \sim k_1^z \exp\left(\frac{z^2}{2k_1}\right).$$

Поэтому

$$\frac{a^z}{3^z}(2/3)^{nz/2}\exp\left(-\frac{\lambda k_1 z}{a}\right)\Big/\prod_{i=1}^{z}(k_1+i)$$
$$\sim \left(\frac{a}{3k_1}(2/3)^{n/2}\right)^z \exp\left(-\frac{\lambda k_1 z}{a}-\frac{z^2}{2k_1}\right)$$
$$\sim \exp\left(-\frac{\lambda k_1 z}{a}-\frac{z^2}{2k_1}\right)\left(1-\frac{\lambda}{3}(2/3)^{n/2}\right.$$
$$\left.+\ \frac{\lambda^2}{18}(2/3)^n+\frac{1}{2^7\cdot 9}(n^2-4)(11n^2-32n)(2/3)^n-\frac{\nu r_0}{a}+\frac{3y_0}{\alpha(2/3)^{n/2}}\right)^{-z}$$
$$\sim \exp\left\{-\frac{\lambda k_1 z}{a}-\frac{z^2}{2k_1}+\frac{\lambda z}{3}(2/3)^{n/2}\right\}\sim\exp\left(-\frac{z^2}{2k_1}\right). \qquad (65)$$

Из (64) и (65) следует, что если $k=k_1+z$, где $0\leqslant z\leqslant n\sqrt{k_1}$, то

$$g_5(k)\sim g_5(k_1)\exp\left(-\frac{z^2}{2k_1}\right). \qquad (66)$$

Аналогично можно убедиться в справедливости (66), если $k=k_1-z$, где $0\leqslant z\leqslant n\sqrt{k_1}$.

Отсюда и из (61) следует, что

$$\sum_{|k-k_1|\leqslant n\sqrt{k_1}}\frac{1}{k!3^k}(2/3)^{n/2}|\vec{W}_D^4(n,k)|\sim g_5(k_1)\sum_{|z|\leqslant n\sqrt{k_1}}\exp\left(-\frac{z^2}{2k_1}\right)$$
$$\sim g_5(k_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2k_1}\right)=g_5(k_1)\sqrt{2\pi k_1}.$$

Используя (64) и значения параметров λ и ν, определенные в (53) и (57), получаем

$$\sum_{|k-k_1|\leqslant n\sqrt{k_1}}\frac{1}{k!3^k}(2/3)^{n/2}|\vec{W}_D^4(n,k)|$$
$$\sim \exp\left\{a\left\{\frac{1}{3}(2/3)^{n/2}-\frac{1}{2^4 3^2}n(3n+2)(2/3)^n\right.\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{2^7 3^4}(n^2-4)(11n^2-32n) + \frac{n^2(3n+2)^2}{2^7\cdot 3^4} - \frac{(n^2-4)(3n^2-4n+4)}{2^5\cdot 3^2}\right] \times (2/3)^{3n/2}\Biggr\}\Biggr\}. \quad (67)$$

Подставив (67) в (35), после тождественных преобразований получаем асимптотическое равенство (10).

Литература

1. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. Вып. 38. М.: Наука, 1981. С. 5–104.
2. **Коршунов А. Д.** О мощности и структуре некоторых замкнутых классов Поста (семейств подмножеств конечного множества) // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988. С. 159–204. (Тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт математики; Т. 10.)
3. **Марченков С. С.** Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000.
4. **Erdös P, Kleitman D. J.** Extremal problems among subsets of a set // Discrete Math. 1974. V. 8, N 3. P. 281–294. (Русский перевод в книге: **Ердёш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976. С. 115–130.)
5. **Post E.** The two-valued iterative systems of mathematical logic. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия
E-mail: korshun@math.nsc.ru

Статья поступила
13 сентября 2003 г.