

УДК 519.718.7

## О ПОСТРОЕНИИ КОНТРОЛИРУЕМЫХ СХЕМ С НЕБОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОЛЮСОВ<sup>\*)</sup>

*В. Н. Носков*

В серии работ автора были предложены методы преобразования комбинационных и автоматных схем в схемы, моделирующие работу исходных схем и допускающие детальную тестовую диагностику их неисправностей. В преобразованных схемах при проведении диагностических процедур используется большое число дополнительных выходов. В настоящей статье описана модификация предложенных методов, позволяющая существенно уменьшить число дополнительных полюсов в схемах.

### Введение

В работах [2–9] мы предложили методы преобразования схем, реализующих булевы и автоматные функции в контролируемые схемы, реализующие те же функции, что и исходные схемы. Схемы строятся из базисных элементов, которые реализуют логические и автоматные функции. Достоинством предложенных методов является то, что они позволяют строить схемы, в которых можно с помощью тестовых процедур детально локализовать неисправности из широкого класса.

Входной алфавит базисных элементов состоит из всех  $r$ -разрядных булевых векторов, а входной алфавит исходной схемы — из всех  $n$ -разрядных булевых векторов. Описаны преобразования любой схемы  $S$  в контролируемую схему  $S'$ . При этих преобразованиях произвольная заданная часть  $B$  схемы  $S$  заменяется схемой  $C$ , а оставшаяся часть схемы  $S$  не меняется. Схема  $S'$  имеет больше входов и выходов, чем схема  $S$ . Схемы  $S$  и  $S'$  изображены на рис. 1.

Если на дополнительные входы исправной схемы  $S'$  подаются нули, то на ее выходах  $a_1, \dots, a_\mu$  реализуются те же функции от значений переменных, поступающих на основные входы, что и на выходах  $a_1, \dots, a_\mu$

---

<sup>\*)</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00032).

схемы  $S$ . Выходы  $b_1, \dots, b_\nu$  схемы  $S'$  используются для тестирования схемы. В работах [2–9] показано наличие довольно короткого слова  $\vec{V}$ , подав которое на входы схемы  $S'$ , можно получить информацию, позволяющую указать небольшие области в  $C$ , в которых находятся неисправные элементы.

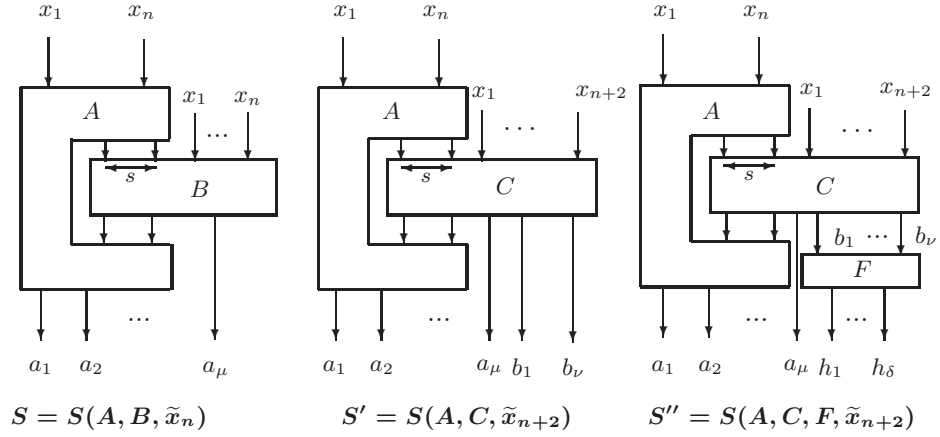


Рис. 1

Этот метод обладает тем недостатком, что в схеме используется большое число выходов ее элементов, которые становятся внешними полюсами (выходами схемы). Оно близко к числу элементов в схеме  $C$ . Это "плата" за удобства в тестировании. В настоящей статье мы стараемся сократить число внешних полюсов схемы. В некоторых случаях это удастся сделать следующим образом. Схема  $S'$  преобразуется в схему  $S''$ . Преобразование заключается в том, что к выходам схемы  $S'$  подключается специальная схема  $F$  и лишь ее выходы становятся дополнительными внешними полюсами всей схемы  $S''$ . Так удастся сократить число внешних полюсов схемы. При этом преобразовании не снижается качество диагностики: используются тесты той же длины и сохраняется точность диагностики. На рис. 1 справа изображена схема  $S''$ . Число ее внешних выходов (на рис. 1 оно обозначено через  $\delta$ ) не превышает  $cm^3 \ln L(C)$ , где  $L(C)$  — число элементов в  $C$ ,  $c$  — константа, зависящая лишь от базиса,  $m$  — верхняя оценка числа неисправных элементов в  $C$  и  $F$ . Из сравнения величин  $cm^3 \ln L(C)$  и  $L(C)$  видно, что преобразование, связанное с добавлением схемы  $F$ , эффективно в случаях, когда  $m$  сравнительно невелико. Например, если  $m = \text{const}$ , а  $L(C)$  неограниченно растет, то отношение  $(cm^3 \ln L(C))/L(C)$  быстро стремится к нулю — преобразо-

вание дает большой эффект. С другой стороны, преобразование схемы  $S'$  в схему  $S''$  видимо нецелесообразно в случаях, когда  $m$  сравнимо с  $\sqrt[3]{L(C)}$ .

В настоящей статье рассматриваются преобразования схем над базисом из функциональных элементов. Описанный здесь способ уменьшения числа внешних полюсов схемы нетрудно применить и к схемам над автоматным базисом, для которого существует универсальное входное слово, переводящее каждый базисный автомат в его начальное состояние. Однако изложение этих результатов довольно громоздко. Поэтому мы намерены опубликовать их отдельно.

Формулировки основных утверждений настоящей статьи составляют содержание теоремы 1. Перейдем к точной постановке задачи.

Изображенные на рис. 1 схемы  $S$ ,  $S'$  и  $S''$  с выделенными в них частями  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  будем обозначать через  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ ,  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$ ,  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ , где через  $\tilde{x}_n$  и  $\tilde{x}_{n+2}$  обозначены векторы  $(x_1, \dots, x_n)$  и  $(x_1, \dots, x_{n+2})$ .

Допустимые неисправности. Предположим, что  $\beta$  — функциональный элемент схемы какой-либо из схем  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$ ,  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ ,  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ . Пусть  $v_1, \dots, v_r$  — входные полюсы элемента  $\beta$ , на каждый из которых в схеме может поступать 0 и 1. Полюсы  $v_1, \dots, v_r$  будем отождествлять с одноименными булевыми переменными. На выходе элемента  $\beta$  реализуется булева функция  $\beta(v_1, \dots, v_r)$ . При появлении неисправностей в схеме элемент  $\beta$  может превратиться в элемент  $\beta^*$ , реализующий произвольную булеву функцию от переменных  $v_1, \dots, v_r$ . Условимся, что число неисправных элементов как в схеме  $C$ , так и в схеме  $F$  не превосходит произвольно заданного числа  $m$ . В схеме  $A$  число неисправных элементов не ограничено.

Введем обозначения:

- ◇  $\Phi$  — полный базис, состоящий из  $l(\Phi)$  функциональных элементов.
- ◇  $A^*$ ,  $C^*$  и  $F^*$  — схемы, в которые преобразуются схемы  $A$ ,  $C$  и  $F$  при появлении в них допустимых неисправностей;  $S(A^*, B, \tilde{x}_n)$ ,  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  и  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$  — схемы, в которые превращаются схемы  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ ,  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  и  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ , когда их подсхемы  $A$ ,  $C$  и  $F$  преобразуются в  $A^*$ ,  $C^*$  и  $F^*$ .
- ◇  $L(E)$  — сложность (т. е. число элементов) произвольной схемы  $E$ .
- ◇  $S_a(A, B, \tilde{x}_n)$  и  $S_a(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  — вектор-функции, реализуемые на выходах  $a_1, \dots, a_\mu$  схем  $S(A, B, \tilde{x}_n)$  и  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ . Аналогично определяются вектор-функции  $S_a(A^*, B, \tilde{x}_n)$  и  $S_a(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$ .

◇  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V})$  — последовательность  $\delta$ -разрядных векторов, реализуемая на выходах  $h_1, \dots, h_\delta$  схемы  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$ , когда на входы этой схемы подается последовательность  $\vec{V}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $S(A, B, \tilde{x}_n)$  — схема из функциональных элементов над базисом  $\Phi$ , реализующая систему булевых функций от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда существуют такая константа  $c$ , зависящая лишь от базиса  $\Phi$ , такая последовательность  $\vec{V}$  длины  $2^{r+2} + 8$ , составленная из некоторых булевых  $(n+2)$ -разрядных векторов, и такая схема  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  над базисом  $\Phi$  с выделенными в  $C$  частями  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_q$ ,  $q < cmL(B)$ , что

- (а)  $S_a(A, B, (x_1, \dots, x_n)) \equiv S_a(A, C, F, (x_1, \dots, x_n, 0, 0))$ ;
- (б) число дополнительных выходов в схеме  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  меньше  $(m+1)^3 \ln L(C)$ ;
- (в)  $L(C) < cmL(B)$ ,  $L(F) < cm^3L(B) \cdot (\ln L(B) + \ln m)$ ,  $|\mathcal{U}_i| \leq r+2$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ ;
- (г) при любых  $A^*, C^*, F^*$  по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V})$  множество частей  $\{\mathcal{U}_i\}$ ,  $1 \leq i \leq q$ , в схеме  $C^*$  можно разбить на два класса  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$  такие, что
  - если множество  $\mathcal{U}(1, C^*)$  не пусто, то в каждой части  $\mathcal{U}_i$  из  $\mathcal{U}(1, C^*)$  имеется неисправный элемент из  $C^*$ ;
  - если множество  $\mathcal{U}(1, C^*)$  пусто, то

$$S_a(A^*, B, (x_1, \dots, x_n)) \equiv S_a(A^*, C^*, F^*, (x_1, \dots, x_n, 0, 0)).$$

Утверждение (а) означает, схема  $C$  моделирует схему  $B$ , т. е. при  $x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv 0$  схема  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  превращается в схему, функционально эквивалентную схеме  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ .

Неравенства из (в) задают ограничения на сложность схем  $C$ ,  $F$  и размеры частей  $\mathcal{U}_i$ . Эти размеры характеризуют степень точности, с которой указываются места неисправных элементов в схеме.

Утверждение (г) дает представление о полноте диагностики схемы: указываются места расположения неисправных элементов с точностью до нескольких элементов, расположенных вместе с неисправным элементом в одной из частей. Если во всех частях из  $\mathcal{U}(1, C^*)$  провести замену всех неисправных элементов на исправные, то схема  $C^*$  превратится в такую схему  $C^{**}$ , что класс  $\mathcal{U}(1, C^{**})$  окажется пустым. Согласно второму утверждению из (г) схема  $C^{**}$  может моделировать работу исправной схемы  $B$  из  $S(A^*, B, \tilde{x}_n)$ .

Доказательство теоремы 1 конструктивно:

(i) указывается последовательность преобразований, которые превращают схему  $S(A, B, \tilde{x}_n)$  в схему  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ , обладающую свойствами (a)–(d) из утверждения теоремы;

(ii) приведен алгоритм, который с использованием лишь последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V})$  позволяет разбить множество частей схемы  $C^*$  на классы  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$ .

В основе преобразований схемы  $B$  в схему  $C$  лежит установка в  $B$  специальных подсхем на линиях между внутренними полюсами. Эти подсхемы играют роль коммутаторов, работающих в двух режимах. При работе в первом режиме коммутаторы проводят без изменения сигналы от некоторых своих входов к своим же выходам. Этот режим работы коммутаторов используется при функционировании схемы  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$ , когда на ее основных выходах реализуется система функций, которую должна реализовать схема  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ . Работая во втором режиме, коммутаторы позволяют передавать значения с входных полюсов схемы  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  на входы некоторых ее элементов. Этот режим работы коммутаторов используется при диагностике неисправностей схемы. При таком режиме на выходах всех элементов схемы  $C$  удастся добиться слабой зависимости значений друг от друга, что обеспечивает должный уровень локализации неисправностей в контролируемой схеме. Переключение работы коммутаторов в разные режимы осуществляется подачей подходящих значений дополнительных переменных на входы коммутаторов.

При построении схемы  $F$  используется полезное свойство схемы  $C$ , состоящее в том, что множество ее частей  $\{\mathcal{U}_i\}$ ,  $1 \leq i \leq q$ , можно разбить на  $2l(\Phi) + 3$  классов, обладающих следующим свойством.

Если на входы схемы  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  подается последовательность  $\vec{V}$  и две части принадлежат одному классу, то на выходах соответствующих элементов этих частей должны появляться совпадающие между собой последовательности. При возникающих в схеме неисправностях эти совпадения могут нарушаться. Схема  $F$  является индикатором эквивалентности последовательностей, принадлежащих специально выбранным семействам. Число этих семейств определяет количество выходов схемы  $F$ .

Целью оставшейся части статьи является доказательство теоремы 1.

## § 1. Схема $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$

**1.1.  $Q$ -преобразование.** Рассмотрим схему  $R$ , изображенную на рис. 2. Она содержит  $2m + 1$  подсхем  $Q$  и одну подсхему  $D$ . Опишем эти подсхемы.

Схема  $Q$ . Если на первый, второй и третий входы схемы  $Q$  подаются значения переменных  $k$ ,  $v$  и  $w$ , то на ее выходе реализуется функция  $\bar{k}v \vee kw$ .

Схема  $D$ . Эта схема осуществляет отображение

$$b(a_1, \dots, a_{2m+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{2m+1} a_i > m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

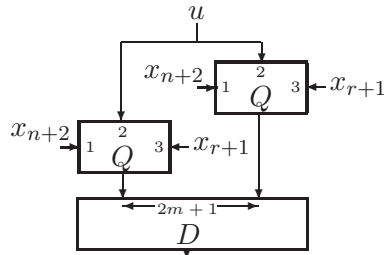


Схема  $R$

Рис. 2

Ясно, что если схема  $D$  исправна и в  $R$  имеется не более  $m$  неисправных схем  $Q$ , то  $R$  — самокорректирующаяся схема. Функция  $b(a_1, \dots, a_{2m+1})$  является симметрической булевой функцией от  $2m + 1$  переменных. Известно [10, с. 369], что такую функцию можно реализовать схемой в базисе  $\{\&, \vee, -\}$ , содержащей не более  $c_1 m$  элементов, где  $c_1$  — константа. В базисе  $\Phi$  можно построить такую схему  $R$ , что

$$L(R) < c_2 m. \quad (1.1)$$

(Здесь и всюду ниже через  $c_2, c_3, \dots$  обозначены константы, зависящие только от базиса  $\Phi$ .)

Пусть  $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$  — выходы тех элементов схемы  $A$ , к которым в схеме  $S(A, B, \tilde{x}_n)$  подключены входные полюсы схемы  $B$ . Выполним следующие преобразования. Вход схемы  $B$ , подключенный к  $w_{i_1}$ , переключим на выход схемы  $R$ , а к  $w_{i_1}$  подключим вход схемы  $R$ . Аналогичные переключения выполним для  $w_{i_2}, \dots, w_{i_s}$ , используя каждый раз новый экземпляр схемы  $R$ . В результате между выходами  $w_{i_1}, \dots, w_{i_s}$  и входными полюсами схемы  $B$  появится  $s$  одинаковых схем  $R$ .

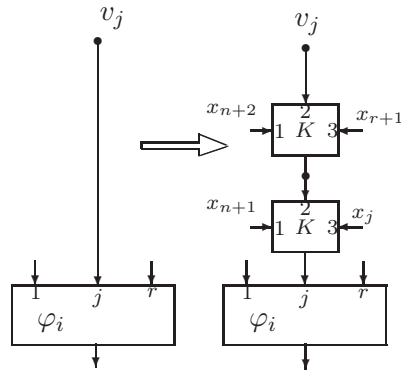
На этом  $Q$ -преобразование схемы  $S(A, B, \tilde{x}_n)$  заканчивается. Схему, в которую превратилась схема  $B$  после  $Q$ -преобразования, обозначим через  $B_1$ . Эта схема состоит из схемы  $B$  и  $s$  схем  $R$ . Отсюда и из (1.1) следует, что

$$L(B_1) < c_3 m L(B). \quad (1.2)$$

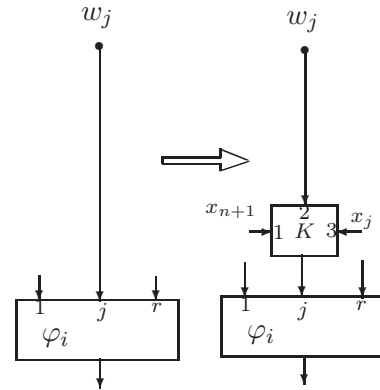
**1.2.  $K$ -преобразование.** Это преобразование связано с размещением схем  $K$  в схеме  $B_1$  на линиях, соединяющих некоторые пары элементов. Преобразования изображены на рис. 3.

Схема  $K$ . Эта схема реализует ту же функцию, что и схема  $Q$ , т.е. если на входы схемы  $K$  подаются значения трех аргументов  $k, v$  и  $w$ , то на ее выходе реализуется функция  $\bar{k}v \vee kw$ .

**Замечание 1.** Схемы  $K$  и  $Q$  реализуют одно и то же отображение. Можно было бы обозначать их одинаковыми символами. Однако использование обоих символов позволяет избегать пояснений, связанных с указанием расположения элементов в схеме: в отличие от  $K$  один из входов схемы  $Q$  подключен к выходу элемента, содержащегося в подсхеме  $A$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Рис. 3

Предполагается, что элемент  $\varphi_i$ , изображенный в левых частях фигур 1 и 2 рисунка 3, не находится внутри схемы  $K$  или  $Q$ . Элемент  $v_j$  является либо входным полюсом из множества  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , отличным от  $x_{r+1}$ , либо выходом элемента, не находящегося внутри схем  $Q$  или  $K$ . Элемент  $w_j$  является либо полюсом  $x_{r+1}$ , либо выходом блока  $Q$ . Преобразования ведутся до тех пор, пока в полученной схеме не исчезнут фрагменты, изображенные в левых частях рассматриваемых рисунков. Полученную в результате  $K$ -преобразования схему обозначим через  $C$ .

Поскольку  $C$  получается из  $B_1$  добавлением не более  $2rL(B)$  схем  $K$  сложности 4 в базисе  $\{\&, \vee, -\}$ , из (1.2) следует, что

$$L(C) < c_4 m L(B). \quad (1.3)$$

**1.3. Функции, реализуемые схемой  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$ .** При построении схемы  $C$  добавляемые схемы  $K$  и  $Q$  таковы, что если на входы

$x_{n+1}$  и  $x_{n+2}$  схемы  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  постоянно подаются нулевые значения, то все элементы  $K$  и  $Q$  функционируют как проводники, соединяющие их вторые входы с их же выходами. При тех же условиях все схемы  $R$ , добавленные при первом преобразовании, будут эквивалентны проводникам, соединяющим их входы  $u$  с их же выходами (см. рис. 2). Таким образом, если в схеме  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  не использовать дополнительные выходы и постоянно подавать нулевые значения на полюсы  $x_{n+1}$  и  $x_{n+2}$ , то схема  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  работает как схема  $S(A, B, \tilde{x}_n)$ . Точнее, имеет место

**Теорема 2.** *Справедливо тождество*

$$S_a(A, B, (x_1, \dots, x_n)) \equiv S_a(A, C, (x_1, \dots, x_n, 0, 0)).$$

**1.4. Блоки в  $C$  и их окрестности.** Элементы схемы  $C$ , находящиеся вне схем  $K$  и  $Q$ , будем называть *основными блоками* схемы  $C$ , а схемы  $K$  и  $Q$  — *вспомогательными блоками*.

Выходы схемы  $C$ . Полагаем, что выход каждого блока схемы  $C$  является и ее дополнительным выходом. На рис. 1 дополнительные выходы схемы  $C$  обозначены через  $b_1, \dots, b_\nu$ .

Окрестность блока. На рис. 4 изображены фрагменты схемы  $C$ ; элемент  $\varphi_j$  — это основной блок из  $C$ , являющийся элементом из базиса  $\Phi$ .

◇ Окрестность блока  $\varphi_j$  из фрагмента с меткой  $(\varphi_j, K)$  состоит из блока  $\varphi_j$  и размещенных в этом фрагменте  $r$  блоков  $K$ . Блок  $\varphi_j$  — центр этой окрестности.

◇ Окрестность блока  $K^*$  из фрагмента с меткой  $(K, \varphi_j, K)$  состоит из блоков  $K^*$ ,  $\varphi_j$  и размещенных в этом фрагменте  $r$  блоков  $K$ . Блок  $K^*$  — центр этой окрестности.

◇ Окрестность блока  $K^*$  из фрагмента с меткой  $(K)$  состоит из блока  $K^*$ ; он же является центром окрестности.

◇ Окрестность блока  $K^*$  из фрагмента с меткой  $(K, r+1)$  состоит из блока  $K^*$ ; он же является центром окрестности.

◇ Окрестность блока  $K^*$  из фрагмента с меткой  $(K, \star)$  состоит из размещенных в этом фрагменте блока  $K^*$  и одного из двух блоков  $K$  или  $Q$ . Блок  $K^*$  — центр этой окрестности.

Этот список определяет окрестности всех блоков из  $C$ , отличных от  $Q$ . Каждой окрестности сопоставлена одна из меток:  $(K)$ ,  $(K, \star)$ ,  $(K, r+1)$ ,  $(\varphi_j, K)$ ,  $(K, \varphi_j, K)$ , где  $1 \leq j \leq l(\Phi)$ . Имеется  $2l(\Phi) + 3$  разных меток.

Окрестность  $O(\beta)$  блока  $\beta$  (см. рис. 4) может содержать  $t$ ,  $t \in \{1, 2, r+1, r+2\}$ , блоков. Если на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  подается булевый  $(n+2)$ -разрядный вектор, то на выходах  $t$  блоков из  $O(\beta)$  появляется



набор из нулей и единиц. Считая этот набор упорядоченным согласно номерам выходов, указанным на рис. 4, будем говорить об этом наборе как о булевом  $t$ -разрядном векторе. Теперь можно сказать, что если на схему  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  поступает последовательность  $\vec{M}$  в алфавите из  $(n+2)$ -разрядных булевых векторов, то на выходах блоков из  $O(\beta)$  появляется последовательность в алфавите из  $t$ -разрядных булевых векторов.

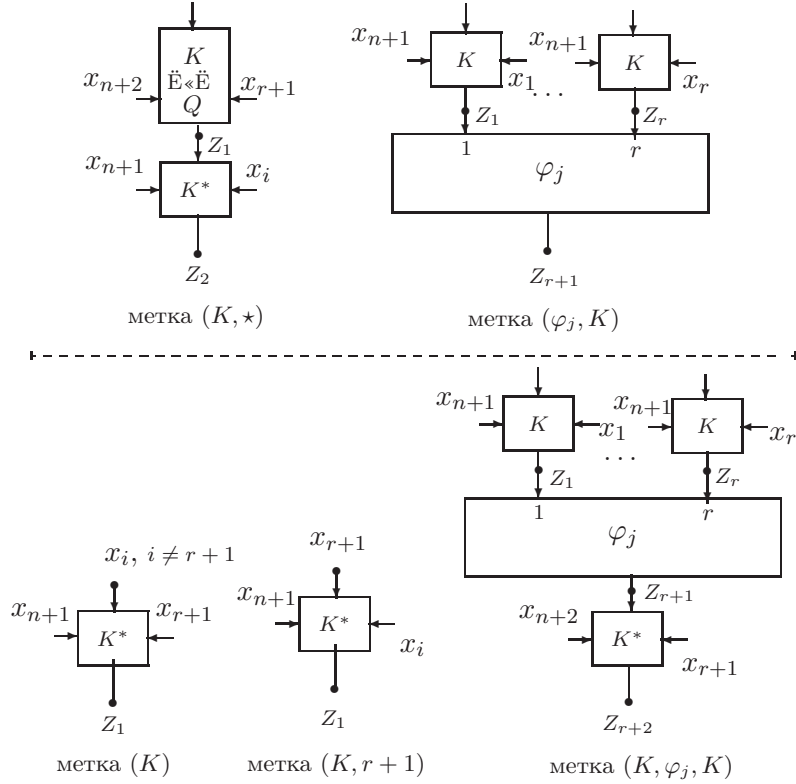


Рис. 4

**1.5.  $\vec{V}$ -совершенная схема относительно блока.** Определим два множества  $(n+2)$ -разрядных булевых векторов:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \{(\underbrace{a_1, \dots, a_r}_r, b, \underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{n-r-1}, 1, c)\}, \\ \mathcal{V}_2 &= \{(\underbrace{a, \dots, a}_r, b, \underbrace{a, \dots, a}_{n-r-1}, c, 1)\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где компоненты  $a, b, c, a_1, \dots, a_r$ , принимают значения 0 и 1.

Ясно, что  $|\mathcal{V}_1| = 2^{r+2}$ ,  $|\mathcal{V}_2| = 8$ . Произвольно упорядочив элементы множеств  $\mathcal{V}_1$  и  $\mathcal{V}_2$ , образуем последовательности  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{V}_2$  и  $\vec{V} = \vec{V}_1\vec{V}_2$ . Обозначив через  $|\vec{V}|$  длину последовательности  $\vec{V}$ , имеем

$$|\vec{V}| = 2^{r+2} + 8. \quad (1.5)$$

Пусть  $\vec{\mathcal{M}}$  — некоторая последовательность в алфавите из  $(n+2)$ -разрядных булевых векторов и  $\beta$  — произвольный отличный от  $Q$  блок из  $C^*$ . Схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  называется  $\vec{\mathcal{M}}$ -правильной относительно  $O(\beta)$ , если при поступлении на ее входы последовательности  $\vec{\mathcal{M}}$  на выходе любого блока из  $O(\beta)$  появляется последовательность, совпадающая с последовательностью, которая появилась бы на этом выходе в исправной схеме  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$ .

Схему  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  назовем  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ , если выполняется одно из следующих условий:

- (а) в  $O(\beta)$  есть основной блок из  $C$  и схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  является  $\vec{V}_1$ -правильной относительно  $O(\beta)$ ;
- (б) в  $O(\beta)$  нет основных блоков из  $C$  и схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  является  $\vec{V}_2$ -правильной относительно  $O(\beta)$ .

Если условия (а) и (б) не выполняются, то будем говорить, что  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  не является  $\vec{V}$ -совершенной схемой относительно  $\beta$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\beta$  — блок из  $C$ , отличный от  $Q$ . Тогда

- 1) если схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  не является  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ , то в  $O(\beta)$  есть неисправный блок;
- 2) если схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  является  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ , то блок  $\beta$  исправен.

**Доказательство.** Предположим, что  $\beta$  является основным блоком, т.е. базисным элементом  $\varphi_j$ , а схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  не является  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ . Тогда эта схема не является  $\vec{V}_1$ -правильной относительно окрестности  $O(\beta)$  и в этой окрестности найдется такой блок  $\gamma$ , что при поступлении на вход схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  вектора  $(a_1, \dots, a_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$  на выходе блока  $\gamma$  появляется значение, не совпадающее с тем, которое появилось бы на нем в исправной схеме. Рассмотрим случаи (а) и (б), исчерпывающие все ситуации, когда схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  не является  $\vec{V}_1$ -правильной относительно  $\beta$ .

- (а) При поступлении на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  некоторого вектора  $(a_1, \dots, a_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$  на входы блока  $\beta$  поступает вектор, отличный от вектора  $(a_1, \dots, a_r)$ .
- (б) При поступлении на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  любого вектора  $(b_1, \dots, b_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$  на входы блока  $\beta$  поступает вектор  $(b_1, \dots, b_r)$

и в  $\vec{V}_1$  содержится вектор  $(a_1, \dots, a_{n+2})$ , при поступлении которого на вход схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  на выходе блока  $\beta$  появляется значение  $\bar{\varphi}_j(a_1, \dots, a_r)$ .

Пусть выполняется условие (а). Тогда найдется такое  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , что при поступлении на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  некоторого вектора  $(a_1, \dots, a_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$  на  $i$ -й вход блока  $\beta$  поступает значение  $\bar{a}_i$ . Пусть  $\gamma$  — блок, выход которого подключен к  $i$ -му входу блока  $\beta$ . Так как к входам блока  $\beta$  подключены только выходы блоков типа  $K$ , то  $\gamma$  является блоком типа  $K$ . При поступлении вектора  $(a_1, \dots, a_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$  на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  на первый вход блока  $\gamma$  поступает значение  $a_{n+1} = 1$ , на третий вход — значение  $a_i$ . Если блок  $\gamma$  исправен, то независимо от значения, подаваемого на второй вход этого блока, на выходе блока  $\gamma$  должно появиться значение  $a_i$ . Поскольку на этом выходе появилось значение  $\bar{a}_i$ , блок  $\gamma$  неисправен.

При условии (b) очевидно неисправен блок  $\beta$ .

Таким образом доказано, что если  $\beta$  является основным блоком и схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  не является  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ , то в  $O(\beta)$  есть неисправный блок.

Предположим, что  $\beta$  является основным блоком  $\varphi_j$  и схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  является  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ . Тогда схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  является  $\vec{V}_1$ -правильной относительно  $\beta$  и если на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  поступает любой вектор  $(a_1, \dots, a_{n+2})$  из  $\vec{V}_1$ , то на входы блока  $\beta$  поступает вектор  $(a_1, \dots, a_r)$  и на его выходе появляется правильное значение, т. е.  $\varphi_j(a_1, \dots, a_r)$ . Последовательность  $\vec{V}_1$  выбрана такой, что для любого булевого вектора  $(a_1, \dots, a_r)$  в  $\vec{V}_1$  найдется  $(n+2)$ -разрядный вектор, в котором первые  $r$  компонент образуют вектор  $(a_1, \dots, a_r)$ . Это означает, что при поступлении на вход блока  $\beta$  любого булевого вектора  $(a_1, \dots, a_r)$  на его выходе реализуется значение  $\varphi_j(a_1, \dots, a_r)$ . Следовательно,  $\beta$  является исправным блоком.

Доказана справедливость теоремы 3 при условии, что  $\beta$  является основным блоком. Остается доказать справедливость теоремы в случаях, когда  $\beta$  является блоком  $K$ . Здесь требуется рассмотреть 4 случая в зависимости от того, к какому типу окрестности относится  $O(\beta)$ . (Все типы окрестностей изображены на рис. 4.) Для остальных случаев доказательства аналогичны приведенному, мы их опускаем.

## § 2. Множество связей

**2.1. Связки  $\pi_i(j_1, j_2, \dots, j_k)$ .** Окрестности с одинаковыми метками назовем *однотипными*. Из определения окрестности блока следует

**Утверждение 1.** Любые две однотипные окрестности не имеют общих блоков. Множество окрестностей из  $C$  можно разбить на  $2l(\Phi) + 3$  классов, каждый из которых состоит из однотипных окрестностей.

Классы однотипных окрестностей из  $C$  обозначим через  $\mathcal{P}_i$ ,  $1 \leq i \leq 2l(\Phi) + 3$ . Окрестности из класса  $\mathcal{P}_i$ ,  $1 \leq i \leq 2l(\Phi) + 3$ , занумеруем числами  $1, 2, \dots, N_i$ . Пусть  $\pi_i(j_1, j_2, \dots, j_k)$  — множество окрестностей из  $\mathcal{P}_i$  с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , где  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq N_i$ . Это множество назовем  $k$ -компонентной связкой окрестностей из  $\mathcal{P}_i$ . Любые две окрестности из  $\mathcal{P}_i$  состоят из одинакового числа блоков. Это число обозначим через  $t(i)$ .

Пусть  $O(\beta)$  — окрестность с номером  $j_p$  из  $\mathcal{P}_i$ . Обозначим через  $Z_v^{j_p}$ ,  $1 \leq v \leq t(i)$ , выходные полюсы блоков, содержащихся в  $O(\beta)$ : полюс  $Z_v$  из соответствующего фрагмента на рис. 4 теперь обозначается через  $Z_v^{j_p}$  и отождествляется с одноименной булевой переменной. Если на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  поступает булевый вектор  $\tilde{a}_{n+2}$ , то  $Z_v^{j_i}$  является функцией от  $A^*$ ,  $C^*$  и  $\tilde{a}_{n+2}$ .

Определим функцию

$$\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2}) = \prod_{v=1}^{t(i)} \left\{ [Z_v^{j_1}(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2}) \& \dots \& Z_v^{j_k}(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})] \vee [\bar{Z}_v^{j_1}(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2}) \& \dots \& \bar{Z}_v^{j_k}(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})] \right\}. \quad (2.1)$$

Эту функцию назовем *функцией связки*.

Пусть  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$  — последовательности, определенные в п. 1.5. Положим

$$\vec{V}(i) = \begin{cases} \vec{V}_1, & \text{если окрестности из } \mathcal{P}_i \text{ содержат основной блок;} \\ \vec{V}_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Последовательность  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$ . Если аргумент  $\tilde{x}_{n+2}$  функции связки последовательно принимает значения последовательности  $\vec{V}(i)$ , то получающуюся при этом последовательность значений функции связки обозначим через  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$ .

**Теорема 4.** Если в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  встречается 0, то в связке  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  есть окрестность, содержащая неисправный блок. Если последовательность  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  состоит только из единиц и  $k > t$ , то в  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  исправны все блоки, являющиеся центрами окрестностей из связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ .

*Доказательство.* Предположим, что в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  встречается 0. Тогда в  $\vec{V}(i)$  найдется такой вектор

$\tilde{a}_{n+2}$ , что  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) = 0$ . Отсюда и из (2.1) следует, что при некотором  $v$ ,  $1 \leq v \leq t(i)$ , справедливо равенство

$$\begin{aligned} & Z_v^{j_1}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \& \dots \& Z_v^{j_k}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \\ & \vee \overline{Z}_v^{j_1}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \& \dots \& \overline{Z}_v^{j_k}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что найдутся такие числа  $j_p$  и  $j_s$ , что

$$Z_v^{j_p}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \neq Z_v^{j_s}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}).$$

Из этого неравенства следует, что схема  $S(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$  не является  $\vec{V}(i)$ -правильной относительно  $j_p$ -й или  $j_s$ -й окрестности из  $\mathcal{P}_i$ . Эту окрестность обозначим через  $O(\beta)$ . Пусть  $\beta$  — ее центр. Из сказанного следует, что схема  $S(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$  не является  $\vec{V}$ -совершенной относительно блока  $\beta$ . Отсюда и из теоремы 3 следует, что в  $O(\beta)$  есть неисправный блок. Так как  $\{j_p, j_s\} \subset \{j_1, \dots, j_k\}$ , то  $O(\beta) \in \pi_i(j_1, \dots, j_k)$ . Это означает, что в  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  есть окрестность с неисправным блоком. Первое утверждение теоремы 4 доказано.

Предположим, что последовательность  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  состоит лишь из единиц и  $k > m$ . Любые две окрестности из  $\mathcal{P}_i$  однотипны. Такие окрестности не имеют общих блоков. Так как в схеме  $C^*$  имеется не более  $m$  неисправных блоков, то при  $k > m$  в связке  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  имеется окрестность, состоящая лишь из исправных блоков. Пусть  $j_p$  — ее номер. Рассмотрим  $j_s$ -ю окрестность,  $s \neq p$ , из связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ . По предположению утверждения 2 теоремы 4 последовательность  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  состоит лишь из единиц. Отсюда и из (2.1) следует, что при любых  $\tilde{a}_{n+2}$  из  $\vec{V}(i)$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} & (Z_v^{j_p}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \& Z_v^{j_s}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})) \\ & \vee (\overline{Z}_v^{j_p}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) \& \overline{Z}_v^{j_s}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})) = 1. \end{aligned}$$

Поэтому при любых  $\tilde{a}_{n+2}$  из  $\vec{V}(i)$  справедливо равенство  $Z_v^{j_p}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) = Z_v^{j_s}(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$ . Таким образом, при поступлении последовательности  $\vec{V}(i)$  на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$  на выходах блоков, содержащихся в  $j_s$ -й окрестности, появятся последовательности, которые появились бы на них в случае исправной схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$ . Это означает, что схема  $S(A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2})$  является  $\vec{V}(i)$ -правильной относительно  $j_s$ -й окрестности из  $\mathcal{P}_i$  и  $\vec{V}$ -совершенной относительно центра этой окрестности. По теореме 3 блок, являющийся центром  $j_s$ -й окрестности, исправен. Так как число  $s$  выбрано произвольно из  $\{1, \dots, k\} \setminus \{p\}$ ,

то исправны все блоки, являющиеся центрами окрестностей из связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ . Второе утверждение теоремы 4 доказано.

**2.2. Полное множество связок в  $\mathcal{P}_i$ .** Обозначим через  $\mathcal{D}_i = \{\pi_i(p_1, \dots, p_k), \dots, \pi_i(s_1, \dots, s_k)\}$  некоторое множество  $k$ -компонентных связок окрестностей из  $\mathcal{P}_i$ . Пусть  $\mathcal{M}_i$  — множество *всех* таких  $(m+1)$ -разрядных векторов  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , что  $b$  и  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , принадлежат множеству  $\{1, 2, \dots, N_i\}$ , причем  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  и  $b \notin \{a_1, \dots, a_m\}$ .

Будем говорить, что

(1) связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  из  $\mathcal{D}_i$  *покрывает* вектор  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$  из  $\mathcal{M}_i$ , если  $\{b, a_1, \dots, a_m\} \cap \{j_1, \dots, j_k\} = \{b\}$ ;

(2) множество связок  $\mathcal{D}_i$  *полно* в  $\mathcal{P}_i$ , если для любого вектора  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$  из  $\mathcal{M}_i$  в  $\mathcal{D}_i$  найдется связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , покрывающая вектор  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Обозначим через  $\mathcal{D}_i(b)$  множество всех таких связок из  $\mathcal{D}_i$ , что если  $\pi_i(j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{D}_i(b)$ , то  $b \in \{j_1, \dots, j_k\}$ .

**Теорема 5.** Пусть множество  $k$ -компонентных связок  $\mathcal{D}_i$  полно в  $\mathcal{P}_i$ ,  $m < k$ , и пусть  $O(\beta)$  является окрестностью с номером  $b$  в  $\mathcal{P}_i$ . Тогда

(а) если для любой связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  из  $\mathcal{D}_i(b)$  в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  имеется 0, то в  $O(\beta)$  есть неисправный блок;

(б) если в  $\mathcal{D}_i(b)$  имеется такая связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , что в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  нет 0, то блок  $\beta$  исправен.

**Доказательство.** Докажем утверждение (а) от противного. Пусть условия этого утверждения выполнены, т.е. для любой связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$  из  $\mathcal{D}_i(b)$  в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  имеется 0. Предположим, что в  $O(\beta)$  нет неисправных блоков. Так как в  $C^*$  имеется не более  $m$  неисправных блоков, то из утверждения 1 следует, что в  $\mathcal{P}_i$  содержится не более  $m$  окрестностей с неисправными блоками. Пусть  $s_1, s_2, \dots, s_q$  — номера всех окрестностей из  $\mathcal{P}_i$  с такими блоками. По определению множества  $\mathcal{M}_i$  в нем есть такой вектор  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , что  $\{s_1, s_2, \dots, s_q\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Так как множество  $\mathcal{D}_i$  полно в  $\mathcal{P}_i$ , то для вектора  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$  в  $\mathcal{D}_i$  найдется такая связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , что  $b \in \{j_1, \dots, j_k\}$  и  $\{j_1, \dots, j_k\} \cap \{s_1, s_2, \dots, s_q\} = \emptyset$ . Все блоки из окрестностей, образующих связку  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , исправны. По первому утверждению теоремы 4 для такой связки должно выполняться условие: в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  отсутствует 0. Но это противоречит условию утверждения (а). Следовательно, неверно предположение о том, что в  $O(\beta)$  нет неисправных блоков. Утверждение

(а) теоремы 5 доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (b). Пусть в  $\mathcal{D}_i(b)$  имеется такая связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , что в последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_k), A^*, C^*, \vec{V}(i))$  отсутствует 0. Из второго утверждения теоремы 4 следует, что в  $C^*$  исправны все блоки, являющиеся центрами окрестностей с номерами  $j_1, \dots, j_k$  (условие  $k > m$ , при котором доказана теорема 4, предполагается выполненным и в теореме 5). Из того, что  $b \in \{j_1, \dots, j_k\}$ , следует исправность блока  $\beta$ . Утверждение (b) теоремы 5 доказано.

**2.3. Комментарии к теоремам 3 и 5.** Теоремы 3 и 5 определяют процедуры поиска неисправных блоков в схеме  $C^*$  с помощью тестового слова  $\vec{V}$ . Эти процедуры обозначим через Пр-3 и Пр-5 соответственно. В каждой из них на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  подается слово  $\vec{V}$  и по информации, получаемой на выходах блоков из  $C^*$ , для каждого блока  $\beta$  из  $C^*$ , отличного от  $Q$ , дается заключение о том, исправен ли блок  $\beta$  или в  $O(\beta)$  есть неисправный блок. По качеству диагностики эти процедуры эквивалентны.

Отличие Пр-3 от Пр-5 состоит в следующем. В Пр-3 информация с выходов блоков из  $C^*$  поступает прямо на выходы всей схемы, тогда как в Пр-5 эта информация поступает на входы схемы  $F$ . На выходах схемы  $F$  реализуются последовательности  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}), A^*, C^*, \vec{V}(i))$ ,  $1 \leq i \leq 2l(\Phi) + 3$ . В Пр-5 эти последовательности используются для выяснения, исправен ли блок  $\beta$  из  $C^*$ . Таким образом, в Пр-3 дополнительными выходами всей схемы считаются выходы всех блоков из  $C^*$ , а в Пр-5 — выходы схемы  $F$ .

Целью оставшейся части статьи является описание схемы  $F$  с числом выходов, существенно меньшим величины  $L(C)$ . Для решения этой задачи требуется найти полное в  $\mathcal{P}_i$  множество связок  $\mathcal{D}_i$  небольшой мощности.

### § 3. О построении полных множеств связок

Пусть  $\mathcal{D}'_i = \{\pi_i(j_1, \dots, j_k)\}$ , где  $(j_1, \dots, j_k)$  — любой  $k$ -элементный набор таких натуральных чисел, что  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq N_i$ . Пусть  $\mathcal{M}_i$  — множество всех  $(m+1)$ -разрядных векторов  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , компонентами которых являются такие числа из множества  $\{1, 2, \dots, N_i\}$ , что  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  и  $b \notin \{a_1, \dots, a_m\}$ .

Определим бинарную таблицу  $T$ , т. е. прямоугольную таблицу, состоящую из нулей и единиц. Будем полагать, что каждой связке из  $\mathcal{D}'_i$  поставлен в соответствие столбец таблицы  $T$ , а каждому вектору из  $\mathcal{M}_i$  — строка. Полагаем, что в  $T$  на пересечении столбца, поставленного в соответствие связке  $\pi_i(j_1, \dots, j_k)$ , и строки, поставленной в соответ-

ствие вектору  $(b, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , находится такое число  $g$ , что

$$g = \begin{cases} 1, & \text{если } \{b, a_1, \dots, a_m\} \cap \{j_1, \dots, j_k\} = \{b\}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ясно, что если  $k \leq N_i - m$ , то в любой строке таблицы  $T$  есть единицы, причем их доля в каждой строке равна  $\gamma$ , где

$$\gamma = \binom{N_i - m - 1}{k - 1} / \binom{N_i}{k}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) получаем

$$\gamma = \frac{(N_i - k) \cdots (N_i - k - m + 1)k}{N_i(N_i - 1) \cdots (N_i - m)} \geq \left(1 - \frac{m + k - 1}{N_i}\right)^m \frac{k}{N_i}. \quad (3.3)$$

Оценим снизу величину  $\gamma$  при условии, что

$$k = k(i) = \begin{cases} \lfloor N_i/2 \rfloor & \text{при } m = 1; \\ \lfloor N_i/m \rfloor - m + 1 & \text{при } m \geq 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) получаем

$$\gamma \geq \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{если } m = 1 \text{ и } N_i \geq 4; \\ \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \left(\frac{1}{m} - \frac{m}{N_i}\right), & \text{если } m \geq 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

В области  $x \geq 2$  функция  $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$  возрастает. Это легко увидеть из соотношений

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(-x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{ix^i}\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{ix^{i-1}}\right).$$

Следовательно, при любом  $m \geq 2$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m \geq \frac{1}{4}. \quad (3.6)$$

С другой стороны, при любом  $m$ ,  $2 \leq m < \sqrt{N_i/2}$ , имеем

$$\frac{1}{m} - \frac{m}{N_i} > \frac{1}{m} - \frac{m}{2m^2} = \frac{1}{2m}.$$



Отсюда, а также из (3.5) и (3.6) следует, что если  $2 \leq m < \sqrt{N_i/2}$  и выполняется условие (3.4), то

$$\gamma > \frac{1}{8m}. \quad (3.7)$$

Ниже всюду будем предполагать, что величины  $N_i$ ,  $m$  и  $k(i)$  связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} 1 \leq m < \sqrt{N_i/2}, \quad N_i \geq 4, \\ k(i) = \begin{cases} \lfloor N_i/2 \rfloor, & \text{если } m = 1; \\ \lfloor N_i/m \rfloor - m + 1, & \text{если } m \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Утверждение 2.** Если выполняются соотношения (3.8), то справедливы неравенства

$$\gamma \geq \frac{1}{8m}, \quad k(i) > m. \quad (3.9)$$

Доказательство. Соотношение (3.7) получено при выполнении условий (3.8). Неравенство  $k(i) > m$  очевидно при  $m = 1$ , а при  $m \geq 2$  оно следует из соотношений  $k(i) = \lfloor N_i/m \rfloor - m + 1 \geq N_i/m - m > m$ , ибо при условии (3.8) имеем  $N_i > 2m^2$ .

Пусть  $U$  — бинарная таблица без нулевых строк. Если некоторый набор столбцов из  $U$  образует таблицу без нулевых строк, то говорят, что такой набор столбцов *протыкает* все строки таблицы  $U$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $U$  — произвольная бинарная таблица. Если  $U$  состоит из  $l$  строк и в каждой строке таблицы  $U$  доля единиц не меньше  $\delta$ ,  $\delta > 0$ , то в  $U$  имеется набор, состоящий не более чем из  $\frac{1}{\delta}(\ln \delta l + 1) + 1$  столбцов, протыкающий все строки в  $U$ .

Доказательство этого утверждения имеется, например, в [1, лемма 9].

**Замечание 2.** С помощью так называемого жадного алгоритма можно получить протыкающий набор столбцов мощности  $\left\lceil \frac{1}{\delta}(\ln \delta l + 1) + 1 \right\rceil$ . Такой набор строится по шагам, на каждом из которых к уже выбранному столбцу присоединяется столбец, протыкающий наибольшее число строк таблицы, не проткнутых на предыдущих шагах. В [1] утверждение 3 доказано этим способом.

**Утверждение 4.** Если выполняются соотношения (3.8), то в  $T$  имеется набор из  $\lceil 8(m+1)^2 \ln N_i \rceil$  столбцов, протыкающий все ее строки.

Доказательство. Пусть  $l$  — число строк таблицы  $T$ . Из определения

этой таблицы следует, что

$$l = |\mathcal{M}_i| = N_i \binom{N_i - 1}{m} < N_i^{m+1}. \quad (3.10)$$

При выполнении условий (3.8) из утверждения 2 следует, что доля единиц в каждой строке таблицы  $T$  не меньше  $\frac{1}{8m}$ . Отсюда, а также из утверждения 3 и соотношений (3.10) следует утверждение 4.

**Утверждение 5.** *Если все строки бинарной таблицы  $T$  протыкаются некоторым подмножеством ее столбцов, то совокупность связей  $\mathcal{D}_i$ , поставленная в соответствие столбцам этого подмножества, образует полное в  $\mathcal{P}_i$  множество связей.*

**Доказательство.** Таблица  $T$  определена так, что если на  $p$ -м месте ее  $s$ -й строки находится 1, то связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , поставленная в соответствие  $p$ -му столбцу таблицы, покрывает вектор из  $\mathcal{M}_i$ , поставленный в соответствие  $s$ -й строке. Отсюда следует, что если подмножество столбцов из  $T$  образует таблицу  $U$  без нулевых строк, то для любого вектора  $\tilde{a}$  из  $\mathcal{M}_i$  найдется столбец из  $U$ , которому поставлена в соответствие связка, покрывающая  $\tilde{a}$ . Таким образом, совокупность связей из  $\mathcal{P}_i$ , поставленных в соответствие столбцам из  $U$ , является полным множеством связей в  $\mathcal{P}_i$ .

**Теорема 6.** *Если выполняются соотношения (3.8), то найдется полное в  $\mathcal{P}_i$  множество  $\mathcal{D}_i$ , состоящее не более чем из  $\lceil 8(m+1)^2 \ln N_i \rceil$  связей.*

Доказательство непосредственно следует из утверждений 4 и 5.

Полное множество связей  $\mathcal{D}_i$  мощности не более  $\lceil 8(m+1)^2 \ln N_i \rceil$  может быть построено с помощью жадного алгоритма (см. замечание 2).

#### § 4. Схема $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$

Сначала опишем вспомогательные схемы  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ ,  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  и множество  $\mathcal{D}^*$ , а затем через них определим схему  $F$  и опишем ее свойства.

**4.1. Множество  $\mathcal{D}^*$ .** Пусть  $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{2l(\Phi)+3}\}$  — множество всех классов одностипных окрестностей в  $C$ . Если выполняется неравенство  $|\mathcal{P}_i| > 2m^2$ , то  $\mathcal{P}_i$  называется *большим* классом. Если же  $|\mathcal{P}_i| \leq 2m^2$ , то  $\mathcal{P}_i$  называется *малым* классом. По теореме 6 для каждого большого класса  $\mathcal{P}_i$  существует полное в  $\mathcal{P}_i$  множество  $\mathcal{D}_i^*$ , состоящее не более чем из  $\lceil 8(m+1)^2 \ln L(C) \rceil$  связей. Введем обозначение  $\mathcal{D}^* = \bigcup_{|\mathcal{P}_i| > 2m^2} \mathcal{D}_i^*$ .

Здесь индекс суммирования  $i$  принимает такие значения, что классы  $\mathcal{P}_i$  являются большими. Отсюда следует неравенство

$$|\mathcal{D}^*| \leq (2l(\Phi) + 3) \lceil 8(m+1)^2 \ln L(C) \rceil. \quad (4.1)$$

**4.2. Схемы  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  и  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ .** Схема  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  изображена на рис. 5. Она имеет  $t(i) \cdot k(i)$  входов, которые в  $S(A$ ,

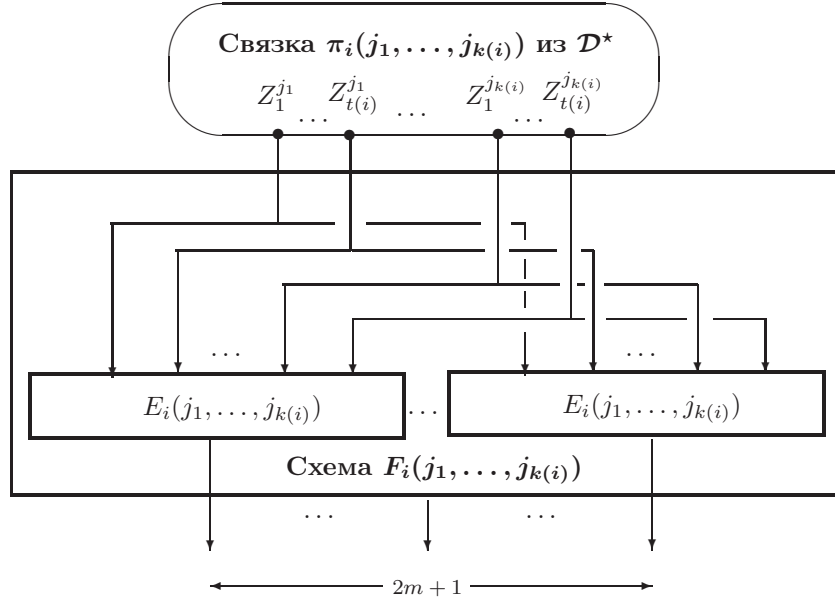


Рис. 5

$C, F, \tilde{x}_{n+2}$ ) подключены к полюсам  $Z_1^{j_1}, \dots, Z_{t(i)}^{j_{k(i)}}$ , т.е. к выходам блоков, расположенных в окрестностях связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ . Отметим, что сама связка  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  находится вне схемы  $F$  и расположена в схеме  $C$ .

Схема  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  является объединением  $2m+1$  одинаковых схем  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , которые работают следующим образом. Если на входы схемы  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  подаются значения переменных  $Z_v^{j_p}$ ,  $1 \leq p \leq k(i)$ ,  $1 \leq v \leq t(i)$ , то каждая схема  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  реализует функцию

$$\prod_{v=1}^{t(i)} \left[ (Z_v^{j_1} \& Z_v^{j_2} \& \dots \& Z_v^{j_{k(i)}}) \vee (\bar{Z}_v^{j_1} \& \bar{Z}_v^{j_2} \& \dots \& \bar{Z}_v^{j_{k(i)}}) \right]. \quad (4.2)$$

Важным свойством схемы  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  является следующее: любые две схемы  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , входящие в  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , не имеют общих функциональных элементов. Схема  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  имеет  $2m + 1$  выходов. Из формулы (4.2) следует, что схема  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  может быть построена так, чтобы выполнялось неравенство

$$L(F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})) < c_5 m k(i) t(i).$$

Отсюда, а также из неравенств  $k(i) < L(C)/m$  и  $t(i) \leq r + 2$ , справедливых при всех  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2l(\Phi) + 3$ , получаем

$$L(F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})) < c_6 \cdot (r + 2) \cdot L(C). \quad (4.3)$$

**4.3. Схема  $F$ .** Эта схема изображена на рис. 6. Она является объ-

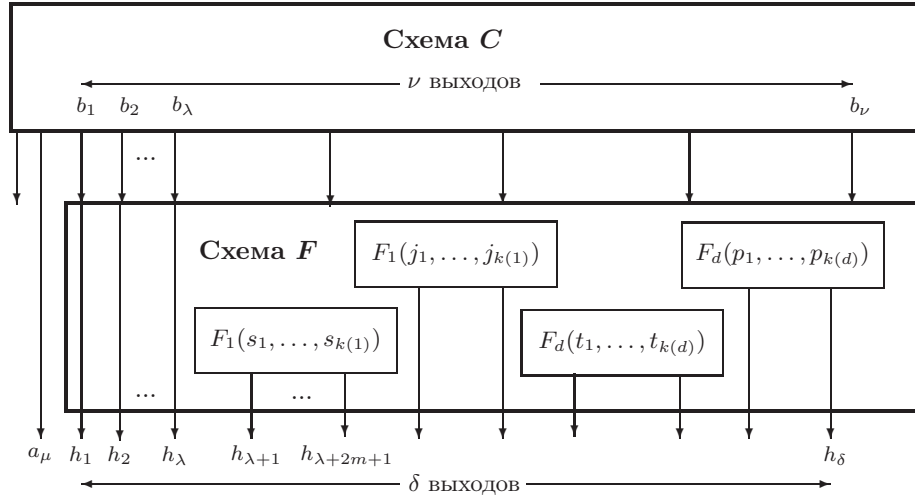


Рис. 6

единением таких схем  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , что  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}) \in \mathcal{D}^*$ . Входы схемы  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  подключены к выходам схемы  $C$ , которые одновременно являются выходами блоков, входящих в окрестности связки  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  (см. рис. 5).

Выходы схемы  $F$ . Обозначим через  $\mathcal{R}$  множество всех блоков  $\beta$  из  $C$ , удовлетворяющих условию: найдется малый класс  $\mathcal{P}_i$ , содержащий окрестность, в которую входит блок  $\beta$ . Из определения  $\mathcal{R}$  следует, что

$$\lambda = |\mathcal{R}| < (r + 2) \cdot (2l(\Phi) + 3) \cdot 2m^2. \quad (4.4)$$

Множество дополнительных выходов схемы  $C$  совпадает с множеством выходов всех блоков в  $C$ . Пусть  $\{b_1, \dots, b_\lambda\}$  — множество выходов блоков из множества  $\mathcal{R}$ . Схема  $F$  устроена так, что на ее выходы  $h_1, \dots, h_\lambda$  напрямую передаются значения с тех ее входов, на которые поступают значения с выходов  $b_1, \dots, b_\lambda$ . (Эта часть схемы  $F$  на рис. 6 изображена в виде линий, соединяющих соответствующие входы и выходы.) Множество остальных выходов схемы  $F$  обозначим через  $\{h_{\lambda+1}, \dots, h_\delta\}$ . Оно совпадает с множеством выходов схем  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ , включенных в  $F$ . Из (4.1) и (4.4) получаем

$$\delta < c_7 m^3 \ln L(C). \quad (4.5)$$

Из (4.3) и определения схемы  $F$  следует неравенство

$$L(F) < c_8 m^2 L(C) \ln L(C).$$

Пользуясь (1.3), получаем

$$L(F) < c_9 m^3 L(B) (\ln L(B) + \ln m). \quad (4.6)$$

Схема, состоящая из схемы  $S(A, C, \tilde{x}_{n+2})$  с подключенной к ней схемой  $F$ , обозначается через  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ .

**4.4. Свойства схемы  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$ .** Обозначим через  $h_{p_1}, h_{p_2}, \dots, h_{p_{2m+1}}$  выходы схемы  $F$ , которые являются выходами ее подсхемы  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ . Пусть при поступлении вектора  $\tilde{a}_{n+2}$  на входы схемы  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$  на выходах ее подсхемы  $F^*$  появился вектор  $S_h(A^*, C^*, F^*, \tilde{a}_{n+2})$ . Тогда

$$\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}), A^*, C^*, \tilde{a}_{n+2}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{v=1}^{2m+1} h_{p_v} > m; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Действительно, схема  $F_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  является объединением  $2m+1$  непесекающихся по элементам схем  $E_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$ . Среди этих схем имеется по меньшей мере  $m+1$  исправных. Пользуясь этим фактом, а также (2.1) и (4.2), убеждаемся в справедливости (4.7).

Из (4.7) следует

**Утверждение 6.** Если  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}) \in \mathcal{D}_i^*$ , то по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V}(i))$  можно однозначно определить последовательность  $\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}), A^*, C^*, \vec{V}(i))$ .

**Теорема 7.** Если  $\beta$  — любой блок из  $C$ , отличный от  $Q$ , то по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V})$  можно установить, какое из следующих утверждений выполняется:

- (a) блок  $\beta$  исправен;
- (b) в  $O(\beta)$  есть неисправные блоки.

**Доказательство.** Пусть блок  $\beta$  является центром окрестности  $O(\beta)$  из большого класса  $\mathcal{P}_i$ . Тогда согласно утверждению 6 по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V}(i))$  можно однозначно определить совокупность последовательностей  $\{\Delta(\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)}), A^*, C^*, \vec{V}(i))\}$ , где  $\pi_i(j_1, \dots, j_{k(i)})$  — любая связка из множества  $\mathcal{D}_i^*$ . Для множества  $\mathcal{D}_i^*$  выполнены условия:  $m < k(i)$  и  $\mathcal{D}_i^*$  полно в  $\mathcal{P}_i$ . При этих условиях применима теорема 5, которая по указанной выше совокупности последовательностей позволяет выяснить, исправен ли блок  $\beta$  или в  $O(\beta)$  есть неисправные блоки.

Пусть блок  $\beta$  является центром окрестности  $O(\beta)$  из малого класса  $\mathcal{P}_i$ . Если на входы схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  подается последовательность  $\vec{V}$ , то по последовательностям, появляющимся на выходах блоков из  $O(\beta)$ , можно установить, является ли схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$   $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ . Это следует из определения схемы,  $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ . Схема  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$  устроена так, что значения, появляющиеся на выходах блоков из малых классов, поступают прямо на соответствующие выходы схемы  $F^*$ . Это означает, что по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V}(i))$  можно установить, является ли под-схема  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  схемы  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$   $\vec{V}$ -совершенной относительно  $\beta$ . Используя теорему 3, получаем, что по последовательности  $S_h(A^*, C^*, F^*, \vec{V}(i))$  можно установить, исправен ли блок  $\beta$  или в  $O(\beta)$  есть неисправные блоки.

**4.5. Классы  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$ .** Обозначим через  $\{\beta_1, \dots, \beta_q\}$  множество всех блоков в  $C$ , отличных от  $Q$ . Положим  $\mathcal{U}_j = O(\beta_j)$ ,  $1 \leq j \leq q$ .

Множество  $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_q\}$  разобьем на классы  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$  согласно следующим правилам:

1. Если при испытании схемы  $S(A^*, C^*, F^*, \tilde{x}_{n+2})$  словом  $\vec{V}$  установлено, что  $\beta$  — исправный блок, то  $O(\beta)$  отнесем к классу  $\mathcal{U}(2, C^*)$ .
2. Если при испытании схемы  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  словом  $\vec{V}(S^*)$  установлено, что в  $O(\beta)$  есть неисправные блоки, то  $O(\beta)$  отнесем к классу  $\mathcal{U}(1, C^*)$ .

**Теорема 8.** Если  $\mathcal{U}(1, C^*) \neq \emptyset$ , то любая часть  $\mathcal{U}_i$  из класса  $\mathcal{U}(1, C^*)$  содержит неисправный элемент из  $C^*$ . Если  $\mathcal{U}(1, C^*) = \emptyset$ , то

$$S_a(A^*, B, (x_1, \dots, x_n)) \equiv S_a(A^*, C^*, F^*, (x_1, \dots, x_n, 0, 0)).$$

*Доказательство.* Если  $\mathcal{U}_i \in \mathcal{U}(1, C^*)$ , то из определения класса  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и теоремы 7 следует, что в  $\mathcal{U}_i$  имеется неисправный элемент, т. е. справедливо первое утверждение теоремы 8.

Предположим, что класс  $\mathcal{U}(1, C^*)$  пуст. Тогда из теоремы 7 и определения классов  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$  следует, что все блоки схемы  $C^*$ , не являющиеся блоками  $Q$ , исправны. При этом среди блоков  $Q$  имеется не более  $m$  неисправных. Из определения блоков  $K$  и  $Q$  следует, что если  $x_{n+1} = x_{n+2} = 0$ , а переменные  $x_1, \dots, x_n$  принимают произвольные значения, то в схеме  $S(A^*, C^*, \tilde{x}_{n+2})$  блоки  $K$  работают как проводники, соединяющие их вторые входы с их же выходами. Так же работают и блоки  $Q$ , кроме неисправных, число которых не превышает  $m$ . В схеме  $C^*$  правильно работающие схемы  $D$  корректируют работу неисправных блоков  $Q$ . Поэтому при  $x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv 0$  схема  $C^*$  работает как исправная схема  $B$ . Отсюда следует второе утверждение теоремы 8.

### Заключение

Покажем, что определенная в § 4 схема  $S(A, C, F, \tilde{x}_{n+2})$  обладает всеми свойствами, перечисленными в утверждениях теоремы 1. Пусть  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_q$  — окрестности всех блоков из  $C$ , отличных от  $Q$ ,  $\mathcal{U}(1, C^*)$  и  $\mathcal{U}(2, C^*)$  — классы, определенные в п. 4.5, и  $\vec{V}$  — последовательность, определенная в п. 1.5 соотношениями (1.4), (1.5). Положим  $c = \max(c_4, c_7, c_9)$ . Тогда

- ◇ утверждение (а) теоремы 1 следует из теоремы 2;
- ◇ утверждение (б) следует из неравенства (4.5);
- ◇ утверждение (с) следует из неравенств (1.3), (4.6) и определения окрестности блока;
- ◇ утверждение (д) следует из теоремы 8.

Все утверждения теоремы 1 доказаны.

### Литература

1. Васильев Ю. Л., Глаголев В. В. Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974. С. 99–148.

2. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сибирский журнал исслед. операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 60–96.
3. **Носков В. Н.** О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надежность их частей // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 2. С. 33–61.
4. **Носков В. Н.** О восстановлении правильной работы неисправных частей комбинационных схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 47–74.
5. **Носков В. Н.** Диагностика частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 1. С. 44–64.
6. **Носков В. Н.** О преобразованиях, повышающих надежность частей схем в автоматных базисах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 3. С. 10–41.
7. **Носков В. Н.** О диагностических и установочных задачах для схем из ненадежных автоматов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 45–71.
8. **Носков В. Н.** Об условных тестах для контроля сетей автоматов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 46–72.
9. **Носков В. Н.** Эффективная диагностика неисправностей в сетях автоматов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 3. С. 48–74.
10. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Адрес автора:

Статья поступила  
22 июля 2003 г.

Институт математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4,  
630090 Новосибирск,  
Россия