ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2003. Серия 2. Том 10, № 1, 3–10

УДК 519.854.3

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. Ю. Золотых

Рассматривается задача о рюкзаке, в которой множество допустимых значений M вычисляется с использованием оракула, отвечающего на вопрос «$x \in M$?». Установлены нижние оценки числа обращений к оракулу. Предлагаемые оценки близки к известным верхним оценкам.

Введение

Рассматривается известная задача о рюкзаке с двусторонними ограничениями: найти

$$\max \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in M\}, \tag{1}$$

где

$$M = \{\mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \leqslant a_0\}, \tag{2}$$

$$B(n,k) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leqslant x_j \leqslant k-1 \ (j = 1, \dots, n)\}, \tag{3}$$

$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^n$, $a_0 \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 2$, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$.

В статье исследуется задача (1)–(3) при условии, что M вычисляется с использованием оракула, отвечающего на вопрос «$x \in M$?», где x — точка, выбираемая из $B(n,k)$. Естественной мерой сложности алгоритма, решающего поставленную задачу, является число обращений к оракулу в худшем случае.

В разд. 1 рассматривается алгоритм $\mathscr{A}_0$ из [9], решающий поставленную задачу. Этот алгоритм использует не более $c_n \log^n k$ *) обращений к оракулу, где величина c_n зависит только от n. Для частного случая $n = 2$ предлагается алгоритм $\mathscr{A}_1$, использующий не более $6\log(k-1)+4$ обращений к оракулу.

*) Здесь и всюду в дальнейшем log обозначает логарифм по основанию 2.

В разд. 2 даны нижние оценки числа обращений к оракулу, совершаемых наилучшим алгоритмов в худшем случае. Оценка, основанная на мощностных соображениях, имеет вид $n \log k$. При $n = 2$ эта оценка близка к верхней оценке сложности алгоритма $\mathscr{A}_1$. Основным результатом статьи является нижняя оценка $c_n \log^{n-2} k$, где c_n — некоторая положительная величина, зависящая только от n. При фиксированном n эта оценка по порядку близка к верхней оценке сложности алгоритма $\mathscr{A}_0$.

В разд. 3 рассматривается булева задача о рюкзаке ($n = 2$).

Используемый в статье подход для получения нижних оценок основан на идеях работы [5]. Нижние оценки сложности оракульных алгоритмов для задач оптимизации на системах независимости и задач о неподвижной точке рассмотрены в [11]. Оракульная сложность порядковой оптимизации на булевом кубе рассмотрена в [7].

1. Верхние оценки сложности

Обозначим через $\mathscr{M}(n,k)$ множество всех допустимых областей M, удовлетворяющих условию (2). Следующую задачу обозначим через $\mathscr{P}_0$: «Для заданных целых $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ и $c_1, \ldots, c_n$ с помощью обращений к оракулу определить, является ли пустым множество M, и если нет, найти максимум (1)». Пусть $\mathscr{A}$ — некоторый алгоритм, решающий задачу $\mathscr{P}_0$. Обозначим через $\tau(\mathscr{A}, n, k)$ и $\rho(\mathscr{A}, n, k)$ соответственно максимальное число обращений к оракулу и максимальное число арифметических операций, совершаемых алгоритмом $\mathscr{A}$, если максимум берется по всем возможным $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$ и $M \in \mathscr{M}(n,k)$. Пусть $\alpha = \max\{k, c_1, \ldots, c_n\}$.

Теорема 1 [8, 12]. *Существует такой алгоритм $\mathscr{A}_0$ решения задачи $\mathscr{P}_0$, что при всех $n \geqslant 2$ и $k \geqslant 2$ справедливы неравенства*

$$\tau(\mathscr{A}_0, n, k) \leqslant c_n \log^n k \quad \text{и} \quad \rho(\mathscr{A}_0, n, k) \leqslant c_n' \log^{c_n''} \alpha,$$

где величины c_n, c_n', c_n'' зависят только от n.

Алгоритм $\mathscr{A}_0$, решающий задачу $\mathscr{P}_0$, был впервые описан в работе [8] (см. также [9, приложение 4, лемма 7]). Было показано, что при каждом фиксированном n величины $\tau(\mathscr{A}_0, n, k)$ и $\rho(\mathscr{A}_0, n, k)$ ограничены сверху некоторыми полиномами от $\log k$ и $\log \alpha$ соответственно Более точная оценка сложности алгоритма $\mathscr{A}_0$, имеющая вид $\tau(\mathscr{A}_0, n, k) \leqslant c_n \log^n k$, неявно содержится в [12] (см. также [2], где рассматривается более общий случай).

Заметим, что известны процедуры, решающие более общую задачу. В [4, 13] предложены алгоритмы, которые находят все вершины множества M, используя при этом не более $c_n \log^n k$ обращений к оракулу

и полиномиальное от $\log k$ число арифметических операций (n фиксировано). Нетрудно видеть, что при фиксированном n точка, максимизирующая целевую функцию (1) на множестве M, может быть выбрана из множества всех вершин за полиномиальное от $\log \alpha$ число арифметических операций.

Положив $n = 2$, получим частный случай $\mathscr{P}_1$ задачи $\mathscr{P}_0$.

Теорема 2. *Существует такой алгоритм $\mathscr{A}_1$ решения задачи $\mathscr{P}_1$, что при каждом $k \geqslant 2$ справедливы неравенства*

$$\tau(\mathscr{A}_1, 2, k) \leqslant 6\log(k-1) + 4 \quad \text{и} \quad \rho(\mathscr{A}_1, 2, k) \leqslant c \log^2 \alpha,$$

где c — некоторая постоянная величина.

Алгоритм $\mathscr{A}_1$ основан на алгоритме из [3], который при $n = 2$ находит все вершины множества M с использованием не более $6\log(k-1)+4$ обращений к оракулу и не более $c' \log^2 k$ арифметических операций. Точка, максимизирующая целевую функцию (1) на множестве M, может быть выбрана из множества всех вершин с использованием не более $c'' \log \alpha$ арифметических операций.

2. Нижние оценки сложности

Получим следующую нижнюю оценку сложности задачи $\mathscr{P}_0$.

Утверждение 1. *Для произвольного алгоритма $\mathscr{A}$, решающего задачу $\mathscr{P}_0$, при всех целых $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\tau(\mathscr{A}, n, k) \geqslant n \log k.$$

Почти очевидно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любого $\mathbf{x}' \in B(n,k)$ найдутся $a_0 \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ и $\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^n$ такие, что $\mathbf{x}'$ — единственное решение задачи $\mathscr{P}_0$.*

Для доказательства леммы положим

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} = (k^{n-1}, k^{n-1} + k^{n-2}, \ldots, k^{n-1} + \cdots + 1), \quad a_0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Индукцией по n легко проверяется, что если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(n,k)$, то $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \neq \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$. Отсюда следует утверждение леммы.

Для доказательства утверждения 1 рассмотрим произвольное *дерево решений* задачи $\mathscr{P}_0$, т. е. корневое бинарное дерево со следующими свойствами:

- каждая неконцевая вершина помечена некоторым $\mathbf{x} \in B(n,k)$;
- из каждой неконцевой вершины выходит 2 ребра, помеченных числами $0, 1$;
- каждый лист помечен некоторым $\mathbf{x} \in B(n,k)$;

- для любой внутренней вершины v, любого выходящего из него ребра r и любого листа w, в который из v через r ведет путь, выполняется неравенство $\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \leqslant a_0$, если ребро имеет метку 1, или обратное неравенство, если ребро имеет метку 0.

На дерево решений можно смотреть как на описание некоторого алгоритма $\mathscr{A}$ решения задачи $\mathscr{P}_0$ при заданных n, k, $\mathbf{c}$. Очевидно, что высота дерева совпадает с $\tau(\mathscr{A}, n, k)$, и по лемме 1 число листьев не меньше числа элементов в $B(n,k)$. Воспользовавшись известной нижней оценкой высоты бинарного дерева, получаем, что $\tau(\mathscr{A}, n, k) \geqslant \log|B(n,k)| = n\log k$. Утверждение 1 доказано.

Для каждого целого $\Delta \geqslant 2$ определим множество

$$\Phi(n,\Delta) = \{(a_0,\mathbf{a}) = (a_0,\ldots,a_{n-1},1) \mid 0 \leqslant a_j \leqslant \Delta - 1 \ (j = 0,\ldots,n-1)\}.$$

Пусть $(a_0,\mathbf{a}) \in \Phi(n,\Delta)$. Обозначим через $V(a_0,\mathbf{a},\Delta)$ множество вершин выпуклой оболочки множества решений системы

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + x_j \equiv a_0 \pmod{\Delta}, \quad x_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1\ldots n). \tag{4}$$

В [1] (см. также [9, разд. 3.5]) установлена верхняя оценка для среднего числа вершин

$$\varphi(n,\Delta) = \Delta^{-n} \sum_{(a_0,\mathbf{a})\in\Phi(n,\Delta)} |V(a_0,\mathbf{a},\Delta)|.$$

Лемма 2 [1]. *При любых целых $n \geqslant 2$ и $\Delta \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\varphi(n,\Delta) \geqslant c_n\Big(\log\Delta - n - 2 - n\log(n-1)\Big)^{n-1},$$

где $c_n = \Big(4n3^n(n-1)^{n-1}((n-1)!)^2\Big)^{-1}$.

Обозначим через $N(a_0,\mathbf{a})$ множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных целочисленных решений уравнения $\langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle = a_0$. Используя лемму 2, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *При любых целых $n \geqslant 3$ и $\gamma \geqslant 2$ найдутся $a_0 \in \mathbf{Z}$ и $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbf{Z}^n$ такие, что $0 < a_j < \gamma$ $(j = 0,1,\ldots,n)$ и*

$$|N(a_0,\mathbf{a})| \geqslant c_{n-1}\Big(\frac{1}{2}\log\gamma - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\Big)^{n-2},$$

где c_n — величина, определенная в лемме 2.

Пусть $(a_0,\mathbf{a}) = (a_0,\ldots,a_{n-1},\Delta)$, где

$$\Delta(\Delta-1) \leqslant a_0 \leqslant \Delta^2 - 1, \quad 0 \leqslant a_j \leqslant \Delta - 1 \quad (j = 1,\ldots,n-1).$$

По теореме 3.35 из [9] имеем $N' \subseteq N(a_0, \mathbf{a})$, где N' — множество вершин выпуклой оболочки целочисленных решений системы

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + \Delta x_n = a_0, \quad x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Легко видеть, что N' взаимно однозначно отображается в множество вершин выпуклой оболочки неотрицательных решений сравнения

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \equiv a_0 \pmod{\Delta}$$

или ему эквивалентного

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} \equiv a_0 - \Delta(\Delta - 1) \pmod{\Delta}. \tag{5}$$

Для завершения доказательства леммы осталось сравнить (4) с (5), положить $\gamma = \Delta^2$ и воспользоваться леммой 2.

Теорема 3. *При любых целых $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ и для произвольного алгоритма $\mathscr{A}$, решающего задачу $\mathscr{P}_0$, справедливо неравенство*

$$\tau(\mathscr{A}, n, k) \geqslant c_{n-1}\Big(\frac{1}{2}\log k - n - 3 - (n-1)\log(n-2)\Big)^{n-2},$$

где c_n — величина, определенная в лемме 2.

Положим $\gamma = k$ и рассмотрим задачу максимизации целевой функции (1), если

$$M = \{\mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \leqslant a_0 - 1\},$$

a_0, a — величины, существование которых утверждается в лемме 3, и $c = a$. Так как $1 \leqslant a_j \leqslant k-1$, то $N(a_0, \mathbf{a}) \subseteq B(n,k)$.

Пусть $\mathbf{v} \in N(a_0, \mathbf{a})$. Тогда существуют $\mathbf{b} \in \mathbf{Z}^n$ и $b_0 \in \mathbf{Z}$ такие, что $\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = b_0$ и $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \geqslant b_0 + 1$ при любом $\mathbf{x} \in N(a_0, \mathbf{a}) \setminus \{\mathbf{v}\}$. Рассмотрим множество

$$M' = \left\{\mathbf{x} \in B(n,k) \mid \langle \mathbf{a} + \beta^{-1}b, \mathbf{x} \rangle \leqslant a_0 + \beta^{-1}b_0\right\},$$

где

$$\beta = \max\left\{2(k-1)\sum_{j=1}^{n}|b_j|,\ 2|b_0|\right\}.$$

Так как $b \neq 0$, то $\beta > 0$. Покажем, что $M' = M \cup \{\mathbf{v}\}$. Действительно, при любом $\mathbf{x} \in M$ имеем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \beta^{-1}\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \leqslant a_0 - 1 + \beta^{-1}(k-1)\sum_{j=1}^{n}|b_j| \leqslant a_0 - \frac{1}{2} \leqslant a_0 + \beta^{-1}b_0.$$

Далее,

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle + \beta^{-1}\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = a_0 + \beta^{-1}b_0.$$

И наконец, при любом $\mathbf{x} \in B(n,k) \setminus (M \cup \{\mathbf{v}\})$ имеем

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle + \beta^{-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \geqslant a_0 + \beta^{-1}(b_0 + 1) > a_0 + \beta^{-1} b_0.$$

Таким образом, $M' = M \cup \{\mathbf{v}\}$. Так как $\langle \mathbf{c}, \mathbf{v} \rangle = a_0 > \max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in M\}$, то, очевидно, любой алгоритм, решающий задачу $\mathscr{P}_0$ с областью допустимых значений M и вектором целевой функции $c = a$, обратится к оракулу в точке $\mathbf{v}$. Доказываемое неравенство теперь следует из леммы 3.

Заметим, что доказательство теоремы 3 легко переносится на специальный случай задачи $\mathscr{P}_0$, когда в (2) выполнены неравенства $a_j \geqslant 0$ и $c_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, и на случай, когда $a_j > 0$, $c_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ и

$$\frac{c_1}{a_1} \geqslant \frac{c_2}{a_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}.$$

3. Булева задача о рюкзаке

Рассмотрим частный случай $\mathscr{P}_2$ задачи $\mathscr{P}_0$, положив $k = 2$.

Утверждение 2. *Для произвольного алгоритма $\mathscr{A}$, решающего задачу $\mathscr{P}_2$, $\tau(\mathscr{A}, n, 2) = 2^n$.*

Пусть $M = \varnothing$. Для того чтобы определить, содержится ли в M хотя бы одна точка, произвольный алгоритм, решающий задачу $\mathscr{P}_2$, должен обратиться к оракулу в каждой точке $B(n,2)$. Утверждение 2 доказано.

В заключение рассмотрим специальный случай $\mathscr{P}_3$ задачи $\mathscr{P}_2$, если в (1)–(3)

$$c_j \geqslant 0, \quad a_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Пусть $\mathscr{A}$ — алгоритм, решающий задачу $\mathscr{P}_3$. Обозначим через $\tau'(\mathscr{A}, n)$ максимальное число обращений к оракулу, совершаемых алгоритмом $\mathscr{A}$, если максимум берется по всем возможным c и M, удовлетворяющим условиям (2), (6). Для решения задачи $\mathscr{P}_3$ можно использовать алгоритм $\mathscr{A}_2$ из [6], решающий (более общую) многомерную булеву задачу о рюкзаке: найти $\max\{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \mid \mathbf{x} \in M\}$, где

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in B(n,2) \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant a_{i0} \ (i = 1, 2, \ldots, m) \right\},$$

$c_j, a_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$. Алгоритм $\mathscr{A}_1$ использует не более $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1$ обращений к оракулу. Доказательство следующего утверждения неявно содержится в [6] (ср. [10]).

Утверждение 3. *Для произвольного алгоритма $\mathscr{A}$, решающего задачу $\mathscr{P}_3$, справедливо неравенство*

$$\tau'(\mathscr{A}, n) \geqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + 1.$$

Утверждение может быть доказано с использованием того же метода, что и при доказательстве теоремы 3. Рассмотрим булеву задачу о рюкзаке с входными данными

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in B(n,2) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \lfloor n/2 \rfloor - 1 \right\}$$

и $c_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Нетрудно видеть, что $|N(\lfloor n/2 \rfloor, \mathbf{a})| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, где $a_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$. Далее можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.

Автор благодарит В. Н. Шевченко, С. И. Веселова и В. А. Таланова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Веселов С. И.** Нижняя оценка среднего числа неприводимых и крайних точек в двух задачах дискретного программирования. Деп. в ВИНИТИ. № 2 В619-84. М., 1984.
2. **Золотых Н. Ю.** О пороговых и близких к ним функциях, определенных в целочисленных точках политопа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 2. С. 40–54.
3. **Золотых Н. Ю.** Пороговые функции, зависящие от двух переменных: сложность расшифровки и мощность разрешающего множества // Материалы Четвертой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 сентября 2000 г.). М.: Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2000. С. 48–54.
4. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** Расшифровка пороговых функций k-значной логики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 18–23.
5. **Золотых Н. Ю., Шевченко В. Н.** О нижней оценке сложности расшифровки пороговых функций k-значной логики // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 2. С. 346–352.
6. **Смирнов А. Н.** О сложности одного класса задач булева программирования // Сообщения ВЦ АН СССР. Вып. 10. М.: ВЦ АН СССР, 1978.
7. **Соколов Н. А.** Оракульная сложность порядковой оптимизации на булевом кубе // Комбинаторные модели и методы. Вып. 2. М.: ВЦ РАН, 1997. С. 85–90.
8. **Шевченко В. Н.** О расшифровке пороговой функции многозначной логики // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Горьк. гос. ун-т, 1987. С. 155–163.

9. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.

10. **Hausmann D., Kannan R., Korte B.** Exponential lower bounds on a class of knapsack algorithms // Math. Oper. Res. 1981. V. 6, N 2. P. 225–232.

11. **Hausmann D., Korte B.** Lower bounds on the worst-case complexity of some oracle algorithms // Discrete Math. 1978. V. 24, N 3. P. 261–272.

12. **Hegedüs T.** Geometrical concept learning and convex polytopes // Proc. of the 7th annual ACM conf. on computational learning theory (COLT'94). N. Y.: ACM Press, 1994. P. 228–236.

13. **Hegedüs T.** Generalized teaching dimensions and the query complexity of learning // Proc. of the 8th annual ACM conf. on computational learning theory (COLT'95). N. Y.: ACM Press, 1995. P. 108–117.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет
им. Н. И. Лобачевского,
603950 Нижний Новгород,
пр. Гагарина, 23.
E-mail: zny@uic.nnov.ru

Статья поступила
27 марта 2003 г.