ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2003. Серия 2. Том 10, № 1, 44–52

УДК 519.874

ЗАДАЧА ДВУХУРОВНЕВОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОГОВАРИАНТНЫМ РАНЦЕМ НА НИЖНЕМ УРОВНЕ*)

А. В. Плясунов

Рассматривается задача двухуровневого линейного программирования с ограничениями общего вида на верхнем уровне и с подзадачей о многовариантном ранце на нижнем уровне. Найдены условия, при которых задача является невырожденной и сводится к серии задач линейного программирования.

Введение

В данной статье продолжены исследования из [1], связанные с выделением полиномиально разрешимых классов задач на основе декомпозиции области допустимых решений. Идея предлагаемого подхода состоит в следующем. Множество допустимых решений двухуровневой задачи разбивается на подмножества таким образом, что на каждом из них исходная задача сводится к решению более простой задачи. Если число подмножеств невелико и на каждом из них соответствующая задача решается эффективно, то получаем полиномиальный алгоритм и для исходной задачи. Основная трудность заключается в поиске подходящего разбиения допустимой области. При выборе разбиения следует учитывать условия оптимальности для внутренней подзадачи или двойственной к ней, а также структурные особенности системы ограничений. Полученные на основе этого подхода результаты содержатся в [1–3].

В § 1 приводится постановка двухуровневой задачи с многовариантным ранцем на нижнем уровне. Формулируются критерии доминирования, позволяющие упрощать исходные данные внутренней задачи, что является существенным при разработке алгоритмов решения.

В § 2 приводятся условия, при которых задача оказывается невырожденной и решается за полиномиальное время.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01–07–90212).

Определения допустимого, оптимального, наилучшего гарантированного решений, а также невырожденной задачи содержатся в [1].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу двухуровневого линейного программирования: найти

$$\max_{x \geqslant 0}(cx + dy(x)) \tag{1}$$

при ограничениях

$$Ax + By(x) \leqslant b, \tag{2}$$

где $y(x)$ — оптимальное решение задачи о многовариантном ранце МВР(x): найти

$$\max_{y \geqslant 0} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} f_{ij} y_{ij} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i \in I_j} y_{ij} = x_j, \quad j \in J, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} p_{ij} y_{ij} \leqslant \sum_{j \in J} q_j x_j, \tag{5}$$

где $J = \{1, \ldots, n\}$, $I_j = \{1, \ldots, m_j\}$, $j \in J$.

Обозначим через ДМВР(x) задачу, двойственную к задаче (3)–(5): найти

$$\min_{w,\gamma} \left\{ \sum_{j \in J} q_j x_j w + \sum_{j \in J} x_j \ \gamma_j \right\} \tag{6}$$

при условиях

$$\gamma_j + p_{ij} \ w \geqslant f_{ij}, i \in I_j, \quad j \in J, \tag{7}$$

$$w \geqslant 0, \tag{8}$$

где w, γ_j — двойственные переменные.

Положим $f_j(w) = \max\limits_{i \in I_j}\{f_{ij} - p_{ij} \ w\}$. Оптимальное значение переменной γ_j равно $f_j(w)$ при любом w. Поэтому задача ДМВР(x) эквивалентна следующей задаче: найти минимум функции

$$F(w) = \sum_{j \in J} q_j x_j w + \sum_{j \in J} x_j \ f_j(w) = \sum_{j \in J} x_j (q_j w + f_j(w))$$

при ограничении (8). Функции $f_j(w)$, $j \in J$, выпуклы по w. Поэтому функция $F(w)$ также является выпуклой. Через $\mu(w)$ и $\rho(w)$ обозначим левую и правую производные функции F в точке w, а через $\mu_j(w)$,

$\rho_j(w)$ — соответствующие производные функции f_j. Нетрудно видеть, что

$$\mu_j(w) = -\max\{p_{ij} \mid f_{ij} - p_{ij}w = f_j(w)\},$$
$$\rho_j(w) = -\min\{p_{ij} \mid f_{ij} - p_{ij}w = f_j(w)\},$$
$$\mu(w) = \sum_{j\in J} x_j(q_j + \mu_j(w)), \quad \rho(w) = \sum_{j\in J} x_j(q_j + \rho_j(w)).$$

Точка w^* является точкой минимума функции F тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\mu(w^*) \leqslant 0 \leqslant \rho(w^*).$$

Функция F неограничена снизу, если $\rho(w) < 0$ при достаточно больших значениях w. В этом случае задача МВР(x) не имеет решений. Если $\rho(0) \geqslant 0$, то минимум функции F достигается в точке 0.

Будем считать, что при каждом $j \in J$ выполняются равенства

$$f_{1j} = \max\{f_{ij} \mid i \in I_j\} \text{ и } p_{1j} = \max\{p_{ij} \mid i \in I_j, f_{ij} = f_{1j}\}.$$

При разработке алгоритмов решения задачи о многовариантном ранце используются критерии доминирования, позволяющие уменьшить размерность задачи [5, 6]. В предложениях 1 и 2 приводятся аналогичные утверждения для задачи (3)–(5). Критерии доминирования позволяют получить минимальное представление функций $f_j(w), j \in J$, при котором не изменяется множество оптимальных решений задачи МВР(x). Доказательства предложений 1 и 2 легко следуют из соотношений дополняющей нежесткости.

Предложение 1. 1). *Если $f_{rj} < f_{1j}$ и $p_{rj} \geqslant p_{1j}$, то для любого оптимального решения задачи* МВР(x) *верно равенство $y_{rj} = 0$.*

2). *Пусть $f_{rj}, f_{sj} < f_{1j}$. Тогда при выполнении условий*

$$f_{rj} < f_{sj} \text{ и } p_{rj} \geqslant p_{sj} \text{ или } f_{rj} = f_{sj} \text{ и } p_{rj} > p_{sj}$$

для любого оптимального решения задачи МВР(x) *верно равенство $y_{rj} = 0$.*

Окончательный вид функции $f_j(w), j \in J$, который может быть получен на основе данного утверждения, изображен на рис. 1. Отметим,

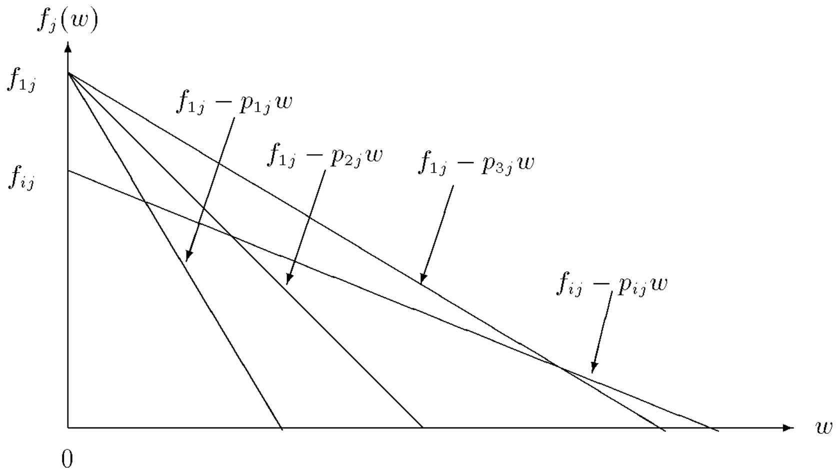

Рис. 1

что сохраняются все функции вида $f_{1j} - p_{ij}\ w$. Последнее гарантирует, что не будет потеряно ни одно из оптимальных решений, на котором ограничение (5) задачи МВР(x) выполняется как строгое неравенство. Любая из оставшихся функций $f_{ij} - p_{ij}\ w$ может иметь несколько копий.

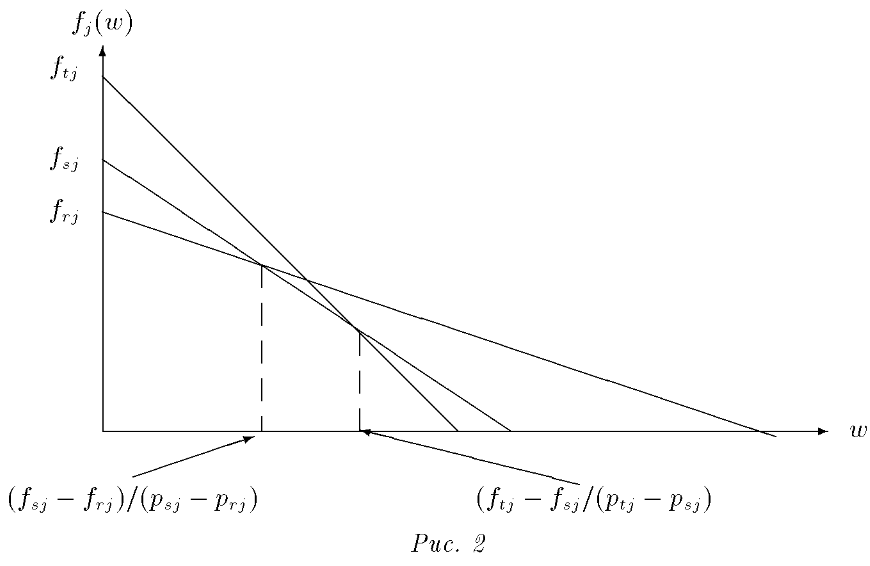

Рис. 2

Предложение 2. *Если* $f_{rj} < f_{sj} < f_{tj}$, $p_{tj} > p_{sj} > p_{rj}$ *и* $(f_{sj} - f_{rj})/(p_{sj} - p_{rj}) < (f_{tj} - f_{sj})/(p_{tj} - p_{sj})$, *то для любого оптимального решения задачи* МВР(x) *верно равенство* $y_{sj} = 0$ (рис. 2).

Основываясь на этих утверждениях, без ограничения общности будем предполагать, что выполняются неравенства

$$f_{1j} \geqslant f_{2j} \geqslant \ldots \geqslant f_{m_j j}, \quad p_{1j} \geqslant p_{2j} \geqslant \ldots \geqslant p_{m_j j} \tag{9}$$

и если $f_{rj} < f_{sj} < f_{tj}$, $p_{tj} > p_{sj} > p_{rj}$, то

$$(f_{sj} - f_{rj})/(p_{sj} - p_{rj}) \geqslant (f_{tj} - f_{sj})/(p_{tj} - p_{sj}). \tag{10}$$

§ 2. Основной результат

Положим $w_{1j} = 0$ при $j \in J$. Для $k = 2, \ldots, m_j - 1$ обозначим через w_{kj} узел $(f_{kj} - f_{k+1j})/(p_{kj} - p_{k+1j})$ функции $f_j(w)$, соответствующий линейным функциям $(f_{kj} - p_{kj}\ w)$ и $(f_{k+1j} - p_{k+1j}\ w)$, коэффициенты которых являются соседними в порядке (9). Предположим, что

(A) неравенства (9) и (10) являются строгими;

(B) при $k \geqslant 2$ и $j \in J$ узлы w_{kj} различны.

Лемма 1. *Если выполняются условия* (A) *и* (B) *и* (x, y) *является допустимым решением задачи* (1)–(5), *то задача* МВР(x) *имеет единственное оптимальное решение.*

Доказательство. Если $x = 0$, то $y = 0$ — единственное оптимальное решение. Далее без ограничения общности будем считать, что $x > 0$ и задача МВР(x) записана в канонической форме. Для этого достаточно ввести вспомогательную неотрицательную переменную z в ограничение (5) и поменять знак неравенства на равенство. При этом двойственная задача к каноническому представлению совпадает с задачей ДМВР(x).

Так как задача МВР(x) разрешима, то функция F ограничена снизу и достигает минимальное значение в некоторой точке w^*. Обозначим через $w_{k_0 j_0}$ и $w_{k_1 j_1}$ два соседних узла, между которыми лежит w^*.

Предположим, что точка w^* является внутренней точкой интервала $[w_{k_0 j_0}, w_{k_1 j_1}]$. Тогда $\mu(w^*) = \rho(w^*) = 0$. Следовательно, для любого w такого, что $w_{k_0 j_0} < w < w_{k_1 j_1}$, получим $\mu(w) = \rho(w) = 0$. С другой стороны, для концов интервала выполняются равенства и неравенства $\mu(w_{k_0 j_0}) < 0 = \rho(w_{k_0 j_0})$ и $\mu(w_{k_1 j_1}) = 0 < \rho(w_{k_1 j_1})$. Таким образом, все точки рассматриваемого интервала являются точками минимума функции F. Пусть

$$\rho(w_{k_0 j_0}) = \sum_{j \in J} x_j (q_j - p_{i_j j}).$$

Так как неравенства (9) и (10) предполагаются строгими, то величины $p_{i_j j}$ определяются однозначно. Рассмотрим допустимое решение (y^1_{ij}, z^1) задачи МВР(x), где $z^1 = 0$, $y^1_{i_j j} = x_j$ при $j \in J$ и $y^1_{ij} = 0$ во всех остальных случаях. Пусть M — столбцы матрицы ограничений, соответствующие ненулевым переменным $y^1_{i_j j}$. Очевидно, что ранг матрицы

M равен n и для каждой нулевой переменной z^1 или y^1_{ij} соответствующее двойственное ограничение задачи ДМВР(x) выполняется как строгое неравенство на любом оптимальном решении (w,γ), где $w\in(w_{k_0j_0},w_{k_1j_1})$, $\gamma_j=f_j(w)$. Отсюда следует, что рассматриваемое допустимое решение задачи МВР(x) является ее единственным оптимальным решением.

Предположим, что $\mu(w^*)<0<\rho(w^*)$. Тогда w^* совпадает с одним из узлов $w_{k_0j_0}$ или $w_{k_1j_1}$ и является единственной точкой, в которой функция F принимает минимальное значение. Следовательно, в задаче ДМВР(x) существует единственное оптимальное решение (w^*,γ^*), где $\gamma^*_j=f_j(w^*)$. Допустим, что $w^*=w_{k_1j_1}$. Тогда для $j\neq j_1$ имеем $\mu_j(w^*)=\rho_j(w^*)=-p_{i_jj}$. Если $j=j_1$, то $\mu_{j_1}(w^*)=-p_{k_1j_1}$ и $\rho_{j_1}(w^*)=-p_{k_1+1j_1}$. Рассмотрим допустимое решение (y^2_{ij},z^2) задачи МВР(x), которое является решением следующей системы равенств:

$$z=0,\ y_{ij}=0,\ j\neq j_1,\ i\neq i_j,\ y_{ij_1}=0,\ i\neq k_1,\ k_1+1, \tag{11}$$

$$y_{i_jj}=x_j,\ j\neq j_1, \tag{12}$$

$$y_{k_1j_1}+y_{k_1+1j_1}=x_{j_1}, \tag{13}$$

$$\sum_{j\neq j_1}p_{i_jj}y_{i_jj}+p_{k_1j_1}y_{k_1j_1}+p_{k_1+1j_1}y_{k_1+1j_1}=\sum_{j\in J}q_jx_j. \tag{14}$$

Так как $\mu(w^*)<0<\rho(w^*)$, то переменные $y^2_{k_1j_1}$ и $y^2_{k_1j_1}$ являются ненулевыми. Как и в предыдущем случае, рассмотрим множество M столбцов матрицы ограничений, соответствующих ненулевым переменным y^2_{ij}. Так как ранг матрицы M равен $n+1$, т. е. числу ненулевых переменных, то решение системы уравнений (11)–(14) является базисным допустимым решением задачи МВР(x). Учитывая, что для нулевых переменных соответствующие двойственные ограничения задачи ДМВР(x) выполняются как строгие неравенства на оптимальном решении (w^*,γ^*), имеем (y^2_{ij},z^2) — единственное оптимальное решение задачи МВР(x). Случай, когда $w^*=w_{k_0j_0}$, доказывается аналогично.

Предположим, что функция F принимает минимальное значение в точке $w^*=0$ и $\rho(0)>0$. Тогда оптимальное решение внутренней задачи является единственным и определяется из соотношений $y^3_{1j}=x_j$, $y^3_{kj}=0$, $z^3=\sum\limits_{j\in J}x_j(q_j-p_{1j})$, где $j\in J$ и $k\neq 1$.

Рассмотрим последний случай, когда w^* совпадает с максимальным узлом и $\rho(w^*)=0$. Тогда решение $y^4_{m_jj}=x_j$, $y^4_{kj}=0$, $j\in J$, $k\neq m_j$, $z^4=0$ является единственным оптимальным решением задачи МВР(x). Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, что любое допустимое решение задачи (1)–(5) является гарантированным и любое ее оптимальное решение является наилучшим гарантированным решением.

Пусть $L = \sum\limits_{j}(m_j - 1) + 1$ — число узлов функции $F(w)$.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (A) *и* (B), *то задача* (1)–(5) *полиномиально разрешима.*

Доказательство. Множество допустимых решений задачи (1)–(5) представим в виде объединения подмножеств Π_{ks}. Множество Π_{ks} состоит из всех таких допустимых решений (x, y), что функция F достигает минимума в узле w_{ks}. В общем случае эти множества могут пересекаться.

Пусть (x, y) — произвольное допустимое решение задачи (1)–(5). Покажем, что решение задачи МВР(x) сводится к решению системы линейных уравнений и неравенств. Так как y — оптимальное решение задачи МВР(x), то существует оптимальное решение (γ, w) двойственной задачи ДМВР(x). Тогда значения целевых функций на этих решениях совпадают, т. е.

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} f_{ij}y_{ij} = \sum_{j\in J} q_j x_j w + \sum_{j\in J} x_j\ \gamma_j, \tag{15}$$

и выполняются ограничения $y \geqslant 0$, (4), (5), (7), (8). Верно и обратное утверждение. Если (y, γ, w) — решение равенства (15) при указанных ограничениях, то y — оптимальное решение задачи МВР(x).

Используя функции f_i и F, получим эквивалентную систему ограничений (4), (5), (8), $y \geqslant 0$ и

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} f_{ij}y_{ij} = F(w).$$

Как следует из доказательства леммы 1, существует такой узел w_{ks}, что

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} f_{ij}y_{ij} = F(w_{ks}),$$

и, следовательно, решение (x, y) попадает в множество Π_{ks}. Нетрудно показать, что множество Π_{ks} определяется следующей системой линейных ограничений:

$$\begin{gathered}
Ax + By \leqslant b,\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} f_{ij}y_{ij} = \sum_{j\in J}(q_j w_{ks} + f_j(w_{ks}))x_j,\\
\sum_{i\in I_j} y_{ij} = x_j,\ j \in J,\\
\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} p_{ij}y_{ij} \leqslant \sum_{j\in J} q_j x_j,\\
x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Поэтому решение задачи (1)–(5) на множестве Π_{ks} эквивалентно решению следующей задачи линейного программирования (P_{ks}): найти

$$\max_{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}(cx+dy)$$

при условиях

$$Ax+By\leqslant b,$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} f_{ij}y_{ij}=\sum_{j\in J}(q_j w_{ks}+f_j(w_{ks}))x_j,$$
$$\sum_{i\in I_j} y_{ij}=x_j,\ j\in J,$$
$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} p_{ij}y_{ij}\leqslant \sum_{j\in J} q_j x_j.$$

Таким образом, если исходная задача разрешима, то среди задач P_{ks} найдутся разрешимые. Верно также и обратное утверждение. Так как задачи P_{ks} могут быть решены с помощью полиномиальных алгоритмов [4] и их число ограничено полиномом от длины исходных данных, то задача (1)–(5) является полиномиально разрешимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 2. С. 23–33.

2. **Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого нелинейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 89–113.

3. **Плясунов А. В.** Об одном подходе к решению задач двухуровневого программирования // Труды XII Байкальской междунар. конф. «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 24 июня — 1 июля 2001 г.). Иркутск, 2001. С. 227–231.

4. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

5. **Dyer M. E., Kayal N., Walker J.** A branch and bound algorithm for solving the multiple-choice knapsak program // J. Comput. and Appl. Math. 1984. V. 11, N 1. P. 231–249.

6. **Ibaraki T., Hasegawa T., Teranaka K., Iwase J.** The multiple-choice knapsak problem // J. Oper. Res. Soc. Jap. 1978. V. 21, N 1. P. 59–93.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: apljas@math.nsc.ru

Статья поступила
6 июня 2002 г.,
переработанный вариант —
6 ноября 2002 г.