ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2003. Серия 2. Том 10, № 1, 53–64

УДК 519.852

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ФУРЬЕ — МОЦКИНА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ

В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев

Предлагается итерационный алгоритм построения триангуляции конечного множества точек $A \subset R^d$, являющейся таким разбиением d-мерной выпуклой оболочки $[A]$ множества A на симплексы с вершинами из A, что пересечением любых двух пересекающихся симплексов является их общая грань. Этот алгоритм является модификацией итерационного алгоритма Фурье — Моцкина [2, 5] построения неприводимой системы неравенств, описывающей $[A]$. Временная сложность алгоритма не превосходит $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor+1})$, где $N = |A|$, и неулучшаема по порядку при нечетных d.

Введение

Задача о разбиении выпуклых многогранников на симплексы возникает в различных областях: в теории аппроксимации, в компьютерной графике, при вычислении объемов. Часто требуется, чтобы в подобных разбиениях симплексы располагались правильно [3], т. е. так, чтобы пересечением любых двух пересекающихся симплексов являлась их общая грань. Триангуляцией конечного множества точек A, выпуклая оболочка $[A]$ которых является d-мерным многогранником, называется множество таких правильно расположенных d-мерных симплексов с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$. Вопросы триангуляции для d-мерного случая изучались в [6–8], а в [9] были построены триангуляции 3-мерных выпуклых многогранников из некоторых классов, состоящие из минимально возможного числа тетраэдров.

Пусть $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset R^d$ при $n = d+1, \ldots, N$ и $[A_{d+1}]$ является d-мерным симплексом. Предлагаемый алгоритм, являющийся триангуляционной модификацией алгоритма Фурье — Моцкина и поэтому называемый ТФМ-алгоритмом, осуществляет построение триангуляции множества точек A_N за время $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor+1})$. Предполагается, что размерность d является константой, а операции сложения и умножения выполняются за единицу времени. ТФМ-алгоритм, как и алгоритм Фурье — Моцкина, является итерационным, и если алгоритм Фурье — Моцкина по неприводимой системе неравенств, описывающей $[A_n]$, и точке a_{n+1} строит неприводимую систему неравенств, описывающую $[A_{n+1}]$, то ТФМ-алгоритм полагает $T(A_{d+1}) = \{[A_{d+1}]\}$ и далее последовательно при $n = d+1, \ldots, N-1$ по триангуляции $T(A_n)$ и точке a_{n+1} строит триангуляцию

$$T(A_{n+1}) = T(A_n) \cup T_n. \tag{1}$$

По $T(A_n)$ и точке a_{n+1} множество симплексов T_n определяется однозначно, и если $a_{n+1} \in [A_n]$, то $T(A_{n+1}) = T(A_n)$. Таким образом, на каждой итерации ТФМ-алгоритм может лишь пополнять построенную на предыдущем этапе триангуляцию новыми симплексами. Триангуляцию $T(A_N)$, построенную по схеме (1), будем называть триангуляцией Фурье — Моцкина (ФМ-триангуляцией) последовательности точек $\widehat{A}_N = (a_1, \ldots, a_N)$. Важным является то обстоятельство, что существует пример, в котором число симплексов в ФМ-триангуляции имеет порядок $N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor}$. Следовательно, временная сложность ТФМ-алгоритма неулучшаема по порядку при нечетном d для получения ФМ-триангуляций. Заметим также (см. [8]), что любая триангуляция множества A_N содержит $O(N^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$ симплексов. ТФМ-алгоритм одновременно с триангуляцией множества A_N также строит триангуляцию границы политопа $[A_N]$, причем с той же временной сложностью $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$, что и метод построения выпуклой оболочки из [4]. Результаты данной статьи были частично анонсированы в [1] и [10].

1. Основные определения и свойства

Рассмотрим выпуклый многогранник M размерности $\dim(M) = d$, являющийся выпуклой оболочкой конечного множества точек и поэтому называемый d-мерным *политопом.* Через $\mathrm{int}(M)$ обозначим множество внутренних точек политопа M, а через $\mathscr{F}_i(M)$ — множество его i-мерных граней, положив $\mathscr{F}(M) = \bigcup\limits_{i=0}^{d} \mathscr{F}_i(M)$. Грани из $\mathscr{F}_{d-1}(M)$ назовем гипергранями политопа M. Если $|\mathscr{F}_0(M)| = d+1$, то M будем называть *d-мерным симплексом.* Для произвольной точки $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$ положим $\bar{x} = (1, x_1, \ldots, x_d)$. Выпуклую оболочку множества точек $A = \{a^1, \ldots, a^n\}$ в d-мерном пространстве R^d обозначим через $[A]$. Пусть $\dim([A]) = d$. В этом случае множество A назовем *d-мерным* и положим $\mathscr{A}_1(d) = \{A \subset R^d \mid |A| < +\infty,\ \dim([A]) = d\}$, $\mathscr{A}_1(d,n) = \{A \in \mathscr{A}_1(d) \mid |A| = n\}$.

Пусть $V \subset A$, $\dim([V]) = d-1$ и A лежит по одну сторону от аффинной оболочки множества точек V. Положим $F = [V]$ и обозначим через b_F^A такой вектор $b_F^A \in R^{d+1}$, что $(b_F^A, \bar{x}) = 0$ при любом $x \in F$ и $(b_F^A, \bar{x}) \geqslant 0$ при любом $x \in A$. Политоп $[A] = \{x \in R^d \mid \forall F \in \mathscr{F}_{d-1}([A])\ \ (b_F^A, \bar{x}) \geqslant 0\}$

полностью описывается неприводимой системой неравенств $\{(b_F^A, \bar{x}) \geqslant 0 \mid F \in \mathscr{F}_{d-1}([A])\}$, соответствующей множеству его гиперграней $\mathscr{F}_{d-1}([A])$.

Триангуляцией d-мерного политопа $[A]$ с узлами из множества точек A или *триангуляцией* d-мерного множества точек A назовем такое множество $T(A)$ d-мерных симплексов, что

$[A] = \bigcup\limits_{S \in T(A)} S$;

$\mathscr{F}_0(S) \subseteq A$ при любом $S \in T(A)$;

$S_1 \cap S_2 = [\mathscr{F}_0(S_1) \cap \mathscr{F}_0(S_2)]$ при любых $S_1, S_2 \in T(A)$.

Множество всех триангуляций политопа $[A]$ с узлами из множества точек A обозначим через $\mathscr{T}(A)$ и положим $\mathscr{T}_d = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_1(d)} \mathscr{T}(A)$, $\mathscr{T}_{d,n} = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}_1(d,n)} \mathscr{T}(A)$. Из [8] следует, что для любой триангуляции $T \in \mathscr{T}_{d,n}$

$$|T| \leqslant \sum_{j=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} (d+2-2j)\binom{n-d+j-3}{j}. \qquad (2)$$

Триангуляция как множество симплексов является частным случаем множества симплексов одинаковой размерности. Рассматривая множество C симплексов размерности k, будем говорить, что они располагаются правильно [3], если $S_1 \cap S_2 = [\mathscr{F}_0(S_1) \cap \mathscr{F}_0(S_2)]$ при любых $S_1, S_2 \in C$. Рассматривая теперь множество C правильно расположенных k-мерных симплексов, положим $\Gamma_i(C) = \bigcup\limits_{S \in C} \Gamma_i(S)$, $\Gamma(C) = \bigcup\limits_{i=0}^{k} \Gamma_i(C)$, $f_i(C) = |\Gamma_i(C)|$, $i = 0, \dots, k$, и заметим, что $\Gamma_k(C) = C$. Элементы множества $\Gamma(C)$ назовем *гранями* множества C, а элементы множества $\Gamma_i(C)$ — *i-мерными гранями* множества C, $i = 0, \dots, k$. Для произвольных граней $F_1, F_2 \in \Gamma(C)$ множества C имеет место соотношение

$$F_1 \cap F_2 = [\mathscr{F}_0(F_1) \cap \mathscr{F}_0(F_2)].$$

Отсюда следует, что если $F, F' \in \Gamma(C)$ и $i = \dim(F) < \dim(F')$, то $F \subset F'$ тогда и только тогда, когда $F \in \mathscr{F}_i(F')$. Для $F \in \Gamma(C)$ положим $\Gamma_j(F, C) = \{F' \in \Gamma_j(C) \mid F \in \mathscr{F}(F')\}$ и $f_j(F, C) = |\Gamma_j(F, C)|$. Грань $F \in \Gamma_{k-1}(C)$ назовем *внешней*, если $f_k(F, C) = 1$, в противном случае грань F будем называть *внутренней*. Положим $H(C) = \{F \in \Gamma_{k-1}(C) \mid f_k(F, C) = 1\}$ и рассмотрим обыкновенный граф $G(C) = (C, E(C))$ с множеством вершин C и множеством ребер $E(C) = \{\{S_1, S_2\} \in C * C \mid S_1 \cap S_2 \in \Gamma_{k-1}(C)\}$. Если $A \in \mathscr{A}_1(d)$ и $T \in \mathscr{T}(A)$, то из [7] следует, что $H(T) = \{F \in \Gamma_{d-1}(T) \mid F \subset [A] \backslash \mathrm{int}([A])\}$, и если $F \in \Gamma_{d-1}(T)$, то $f_d(F, T(A)) \in \{1, 2\}$. Таким образом, грань $F \in \Gamma_{d-1}(T)$ принадлежит не более чем двум симплексам из T и является внешней тогда и только тогда, когда принадлежит в точности одному симплексу.

Множества C_1 и C_2 правильно расположенных k-мерных симплексов назовем изоморфными, если между множествами $\Gamma(C_1)$ и $\Gamma(C_2)$ существует биекция φ, сохраняющая отношение включения: для любой $F_1 \in \Gamma(C_1)$ и любой $F_2 \in \Gamma(C_2)$ включение $F_1 \subseteq F_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$. Заметим, что такая биекция φ сохраняет также и размерность: если $F \in \Gamma(C)$, то $\dim(F) = \dim(\varphi(F))$.

Триангуляцией границы d-мерного политопа $[A]$ с узлами из множества A или *граничной триангуляцией* d-мерного множества точек A назовем такое множество $T^{\partial}(A)$ правильно расположенных $(d-1)$-мерных симплексов, что $T^{\partial}(A) = \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}_{d-1}([A])} T(F \cap A)$, где $T(F \cap A) \in \mathscr{T}(F \cap A)$. Множество всех триангуляций границы политопа $[A]$ с узлами из множества точек A обозначим через $\mathscr{T}^{\partial}(A)$ и положим $\mathscr{T}^{\partial}_d = \bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}_1(d)} T^{\partial}(A)$, $\mathscr{T}^{\partial}_{d,n} = \bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}_1(d,n)} T^{\partial}(A)$. Заметим, что при $d \geqslant 2$, $H \in \mathscr{T}^{\partial}_d$ и $F \in \Gamma_{d-2}(H)$ справедливы равенства

$$f_{d-1}(F, H) = 2, \tag{3}$$

$$|E(H)| = \frac{d|H|}{2}. \tag{4}$$

При $A \in \mathscr{A}_1(d)$ множество $(d-1)$-мерных внешних граней триангуляции $T(A) \in \mathscr{T}(A)$ является граничной триангуляцией множества точек A. Поэтому

$$H(T(A)) \in \mathscr{T}^{\partial}(A). \tag{5}$$

Рассмотрим произвольную граничную триангуляцию $H \in \mathscr{T}^{\partial}(A)$ для $A \in \mathscr{A}_1(d)$ и точку $a \in R^d$, положив $H^- = \{S \in H \mid (b^A_S, \bar a) < 0\}$, $n^- = f_0(H^-)$, $H^+ = \{S \in H \mid (b^A_S, \bar a) > 0\}$ и $n^+ = f_0(H^+)$. Заметим, что $H^- \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a \notin [A]$.

Лемма 1. *Если $H^- \neq \varnothing$, то существуют триангуляция $T^- \in \mathscr{T}_{d-1,n^-}$, изоморфная H^-, и триангуляция $T^+ \in \mathscr{T}_{d-1,n^+}$, изоморфная H^+.*

Доказательство. Предположим, что $|H^-| \neq \varnothing$, и докажем утверждение для H^-. Положим $M(H^-) = \bigcup\limits_{S\in H^-} S$. Поскольку $|H^-| \neq \varnothing$, то существует такой $b \in R^{d+1}$, что $\beta = (b, \bar a) < 0$ и $(b, \bar v) > 0$ при любой $v \in A$. Рассмотрим гиперплоскость $\pi = \{x \in R^d \mid (b, \bar x) = 0\}$, коническое многообразие $Q = \{a + \alpha(c-a) \mid \alpha \geqslant 0,\ c \in M(H^-)\}$ и такую биекцию ψ множества $M(H^-)$ на $\pi \cap Q$, что если $x \in M(H^-)$, то $\psi(x) = \pi \cap \{a + \alpha(x-a) \mid \alpha \geqslant 0\} = a - \frac{(b,\bar a)}{(b,\bar x - \bar a)}(x-a)$. Для любой $F \in \Gamma(H^-)$ положим $\psi(F) = \{\psi(x) \mid x \in F\}$. Тогда $T^- = \{\psi(S) \mid S \in H^-\} \in \mathscr{T}_{d-1,n^-}$ является триангуляцией политопа $[\Phi^-]$ с узлами из $\Phi^- = \{\psi(x) \mid x \in \Gamma_0(H^-)\}$, которая изоморфна множеству $(d-1)$-мерных симплексов H^-. Для H^+ утверждение доказывается аналогично.

Теорема 1. *Если* $H \in \mathscr{T}^{\partial}_{d,n}$, *то* $|H| \leqslant 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (d+1-2j)\binom{n-d+j-2}{j}$.

Доказательство. Пусть $H \in \mathscr{T}^{\partial}_{d,n}$. Тогда существует такое множество точек $A \in \mathscr{A}_1(d,n)$, что $H \in \mathscr{T}^{\partial}(A)$. Рассмотрим $F \in \Gamma_{d-1}([A])$ и такую точку $p \in R^d$, что $p \notin [A]$, $(b^A_F, \bar{p}) < 0$ и $(b^A_{\widehat{F}}, \bar{p}) > 0$ для любой $\widehat{F} \in \Gamma_{d-1}([A]) \backslash \{F\}$. Можно показать, что такая точка p существует. Теперь положим $H^-_p = \{S \in H \mid (b^A_S, \bar{p}) < 0\}$, $H^+_p = \{S \in H \mid (b^A_S, \bar{p}) > 0\}$ и заметим, что $n^- = f_0(H^-_p) < n$, $n^+ = f_0(H^+_p) \leqslant n$, $H^-_p \cup H^+_p = H$ и $H^-_p \cap H^+_p = \varnothing$. Поэтому $|H| = |H^-_p| + |H^+_p|$. Из (2) следует, что $|T| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (d+1-2j)\binom{n-d+j-2}{j}$ для любой $T \in \mathscr{T}_{d-1,n}$. Используя лемму 1, получаем $T^- \in \mathscr{T}_{d-1,n^-}$, изоморфную H^-_p, и $T^+ \in \mathscr{T}_{d-1,n^+}$, изоморфную H^+_p. Тогда $|H| = |T^-| + |T^+| \leqslant 2 \sum\limits_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (d+1-2j)\binom{n-d+j-2}{j}$. Теорема 1 доказана.

2. Алгоритм Фурье — Моцкина

Пусть $A_N = \{a_1, \ldots, a_N\}$, $a_i \in R^d$, $i = 1, \ldots, N$, и пусть $[a_1, \ldots, a_{d+1}]$ является d-мерным симплексом. Алгоритм Фурье — Моцкина (ФМ-алгоритм) последовательно при $n = d+1, \ldots, N-1$ по множеству $\mathscr{F}_{d-1}([A_n])$, где $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, вместе с соответствующей ему неприводимой системой неравенств и точке a_{n+1} строит множество $\mathscr{F}_{d-1}([A_{n+1}])$ и соответствующую ему неприводимую систему неравенств (см., например, [2] и [5]). При добавлении точки a_{n+1} действия ФМ-алгоритма заключаются в следующем.

Шаг 1. Разбить $\mathscr{H}_n = \mathscr{F}_{d-1}([A_n])$ на $\mathscr{H}^-_n = \{F \in \mathscr{H}_n \mid (b^{A_n}_F, \overline{a_{n+1}}) < 0\}$, $\mathscr{H}^0_n = \{F \in \mathscr{H}_n \mid (b^{A_n}_F, \overline{a_{n+1}}) = 0\}$ и $\mathscr{H}^+_n = \{F \in \mathscr{H}_n \mid (b^{A_n}_F, \overline{a_{n+1}}) > 0\}$. Для каждой $F^+ \in \mathscr{H}^+_n$ положить $b^{A_{n+1}}_{F^+} = b^{A_n}_{F^+}$.

Шаг 2. Для каждой пары $(F^+, F^-) \in \mathscr{H}^+_n * \mathscr{H}^-_n$, где $F^+ \cap F^- \in \mathscr{F}_{d-2}([A_n])$, получить гипергрань $F = [F^+ \cap F^-, a_{n+1}]$ политопа $[A_{n+1}]$ и соответствующий ей вектор $b^{A_{n+1}}_F = (b^{A_n}_{F^+}, \overline{a_{n+1}})b^{A_n}_{F^-} - (b^{A_n}_{F^-}, \overline{a_{n+1}})b^{A_n}_{F^+}$ и тем самым найти множество $\mathscr{H}_{n,1} = \{[F^+ \cap F^-, a_{n+1}] \mid F^+ \in \mathscr{H}^+_n,\ F^- \in \mathscr{H}^-_n,\ F^+ \cap F^- \in \mathscr{F}_{d-2}([A_n])\}$.

Для каждой $F^0 \in \mathscr{H}^0_n$ получить $F' = [F^0, a_{n+1}]$, $b^{A_{n+1}}_{F'} = b^{A_n}_{F^0}$ и найти $\mathscr{H}_{n,2} = \{[F^0, a_{n+1}] \mid F^0 \in \mathscr{H}^0_n\}$.

Шаг 3. Тогда $\mathscr{F}_{d-1}([A_{n+1}]) = \mathscr{H}_{n+1} = \mathscr{H}^+_n \cup \mathscr{H}_{n,1} \cup \mathscr{H}_{n,2}$.

Произведя эти действия последовательно для $n = d+1, \ldots N-1$, ФМ-алгоритм найдет $\mathscr{F}_{d-1}([A_N])$.

3. Итерация ТФМ-алгоритма

Рассмотрим множество точек $A \in \mathscr{A}_1(d)$ и новую точку $a \in R^d$, положив $A' = A \cup \{a\}$. ТФМ-алгоритм на каждой итерации, получив на входе $T(A) \in \mathscr{T}(A)$, $H = H(T(A))$, b_F^A для каждой $F \in H$, $G(H) = (H, E(H))$ и новую точку $a \in R^d$, выдает $\mathscr{T}FM_1(H, E(H), a) = (H', E')$, $\mathscr{T}FM_2(T(A), H, a) = T(A')$, а также $b_F^{A'}$ для каждой $F \in H'$. Докажем, что $H' = H(T(A'))$, $(H', E') = (H', E(H')) = G(H')$ и $T(A') \in \mathscr{T}(A)$. Итерация ТФМ-алгоритма заключается в следующем.

Шаг 1. Разделить H на $H^- = \{F \in H \mid (b_F^A, \bar{a}) < 0\}$ и $H^{+,0} = \{F \in H \mid (b_F^A, \bar{a}) \geqslant 0\}$. Для каждой $F \in H^{+,0}$ положить $b_F^{A'} = b_F^A$.

Шаг 2. Если $H^- = \varnothing$, то положить $H' = H$, $G(H') = G(H)$, $T(A') = T(A)$ и закончить итерацию.

Шаг 3. Если $d = 1$, то положить $H' = H^{+,0} \cup \{a\}$, $G(H') = (H', \varnothing)$, $b_a^{A'} = b_v^A - ((b_a^A, \bar{a}), 0)$, где $\{v\} = H^-$, и перейти на шаг 8.

Шаг 4. Для каждой $F^- \in H^-$ определить $\omega^*(F^-) = \{F^* = F \cap F^- \mid \{F, F^-\} \in E(H),\ F \in H^{+,0}\}$, при этом для каждой $F^* = F \cap F^- \in \omega^*(F^-)$, где $F \in H^{+,0}$, положить $\omega^-(F^*) = F^-$ и $\omega^{+,0}(F^*) = F$. Создать $H^* = \bigcup\limits_{F^- \in H^-} \omega^*(F^-)$. Преобразовать граф $G(H)$ в графы $G(H^-) = (H^-, E(H^-))$ и $G(H^{+,0}) = (H^{+,0}, E(H^{+,0}))$.

Шаг 5. Построить граф $G(H^*)$ по графу $G(H^-)$.

Шаг 6. Преобразовать H^* в $\eta(H^*) = \{\eta(F^*) = [F^*, a] \mid F^* \in H^*\}$ и для каждой $F^* \in H^*$ положить $b_{\eta(F^*)}^{A'} = (b_{\omega^{+,0}(F^*)}^A, \overline{a}) b_{\omega^-(F^*)}^A - (b_{\omega^-(F^*)}^A, \overline{a})$ $b_{\omega^{+,0}(F^*)}^A$. Положить $E_1 = \{\{\omega^{+,0}(F^*), \eta(F^*)\} \mid F^* \in H^*\}$. Если $d > 2$, то положить $E_2 = \{\{\eta(F_1^*), \eta(F_2^*)\} \mid \{F_1^*, F_2^*\} \in E(H^*)\}$, иначе положить $E_2 = \{\{\eta(F_1^*), \eta(F_2^*)\}\}$, где $\{F_1^*, F_2^*\} = H^*$.

Шаг 7. Положить $H' = H^{+,0} \cup \eta(H^*)$ и $E' = E(H^{+,0}) \cup E_1 \cup E_2$. Тогда $G(H') = (H', E(H')) = (H', E')$.

Шаг 8. Положить $T(A') = T(A) \cup \{[F^-, a] \mid F^- \in H^-\}$.

Симплексы любой размерности задаются списком своих вершин. Каждая триангуляция $T(A)$ и $T(A')$ представляется списком своих симплексов. Структура данных, соответствующая любому используемому на итерации ТФМ-алгоритма графу, такова, что он задается списком своих вершин и с каждой вершиной связаны ссылки на инцидентные ей вершины данного графа. Таковы структуры данных, соответствующие графам $G(H)$, $G(H^-)$, $G(H^{+,0})$, $G(H^*)$, $G(H')$.

Следующие утверждения обосновывают правильность работы ТФМ-алгоритма на его итерации. Шаг 5, который выполняется при $d \geqslant 2$ и $H^- \neq \varnothing$, осуществляется в соответствии с леммой 2.

Лемма 2. *Граф* $G(H^*)$ *можно построить по графу* $G(H^-)$ *за время* $O(|H^-|)$.

Доказательство. Согласно (5) имеем $H = H(T(A)) \in \mathscr{T}^\partial(A)$. В силу (3) любая грань $F^* \in \Gamma_{d-2}(H)$ является $(d-2)$-мерной гранью ровно двух $(d-1)$-мерных симплексов из H. Поэтому $H^* = H(H^-)$. По лемме 1 множество H^- изоморфно некоторой триангуляции $T^- \in \mathscr{T}_{d-1}$. Поэтому $H^* = H(H^-)$ изоморфно $H(T^-)$ и $H(T^-) \in \mathscr{T}^\partial_{d-1}$ согласно (5).

В случае $d = 2$ имеем граф $G(H^*) = (H^*, \varnothing)$.

Пусть теперь $d > 2$. Рассмотрим $(d-2)$-мерную грань $F^* \in H^*$. Ей соответствует вершина графа $G(H^*)$. Поскольку множество H^* изоморфно триангуляции границы из $\mathscr{T}^\partial_{d-1}$, то вершина F^* графа $G(H^*)$ принадлежит $(d-1)$ его ребрам, которые можно найти следующим образом. Рассмотрим произвольную грань $F \in \Gamma_{d-3}(F^*)$. $(d-1)$-мерный симплекс $F_1 = \omega^-(F^*) \in H^-$ имеет в точности две $(d-2)$-мерные грани F^* и F^*_1, содержащие грань F. Если $F^*_1 \in H^*$, то ребро $\{F^*, F^*_1\} \in E(H^*)$, соответствующее F, найдено и процесс можно считать завершенным. Если же $F^*_1 \notin H^*$, то F^*_1 является внутренней $(d-2)$-мерной гранью множества H^- и принадлежит в точности двум симплексам F_1 и F_2 из H^-. В свою очередь симплекс F_2 имеет в точности две $(d-2)$-мерные грани F^*_1 и F^*_2, содержащие грань F. Если $F^*_2 \in H^*$, то ребро $\{F^*, F^*_2\} \in E(H^*)$, соответствующее грани F, найдено и процесс можно считать завершенным. Если же $F^*_2 \notin H^*$, то F^*_2 является внутренней $(d-2)$-мерной гранью множества H^- и принадлежит в точности двум симплексам F_2 и F_3 из H^-. Продолжая этот процесс, найдем $F^*_t \in H^*$, содержащую грань F, и ребро $\{F^*, F^*_t\} \in E(H^*)$, соответствующее грани F, время поиска которого пропорционально $f_{d-1}(F, H^-)$.

Произведя указанные действия для каждой грани $F^* \in H^*$ и всех $F \in \Gamma_{d-3}(F^*)$, найдем все ребра из $E(H^*)$ и, стало быть, весь граф $G(H^*)$. Временная сложность этого поиска равна

$$O\Bigg(\sum_{F\in\Gamma_{d-3}(H^*)} f_{d-1}(F, H^-)\Bigg)$$

и не превосходит величины $O(|H^-|)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. ТФМ-*алгоритм по* $T(A) \in \mathscr{T}(A)$, $H = H(T(A))$ *и графу* $G(H)$ *строит* $T(A') \in \mathscr{T}(A')$, $H' = H(T(A'))$ *и граф* $G(H') = (H', E')$ *за время* $O(|H|)$.

Доказательство. При $a \in [A]$ или $d = 1$ утверждение теоремы очевидно. Поэтому ниже будем рассматривать случай $a \notin [A]$ и $d \geqslant 2$. Из [6, теорема 1.31] следует, что $T(A') \in \mathscr{T}(A')$. Таким образом, осталось доказать, что $H' = H(T(A'))$, $G(H') = (H', E')$ и временная сложность итерации ТФМ-алгоритма равна $O(|H|)$.

Покажем, что $H' \subseteq H(T(A'))$. По построению $H' = H^{+,0} \cup \eta(H^*)$. Рассмотрим произвольную грань $F^{+,0} \in H^{+,0}$. Поскольку $H^{+,0} \subseteq H$, то в триангуляции $T(A)$ существует единственный симплекс S, имеющий $F^{+,0}$ своей $(d-1)$-мерной гранью. При этом $F^{+,0}$ не является $(d-1)$-мерной гранью какого-либо симплекса из $\{[F^-, a] \mid F^- \in H^-\}$, поскольку $F^{+,0} \notin H^-$. Поэтому $F^{+,0}$ является $(d-1)$-мерной гранью только одного симплекса S триангуляции $T(A')$. Следовательно, $F^{+,0} \in H(T(A'))$.

Теперь рассмотрим произвольную грань $F \in \eta(H^*)$. Тогда существуют грани $F^* \in H^*$ и $F_1^- \in H^-$ такие, что $F = \eta(F^*) = [F^*, a]$ и $F^* \in \Gamma_{d-2}(F_1^-)$. При этом $S_1 = [F_1^-, a] \in T(A')$ и $F \in \Gamma_{d-1}(S_1)$. Предположим, что в триангуляции $T(A')$ существует еще один симплекс $S_2 \neq S_1$, $(d-1)$-мерной гранью которого является F. Поскольку $a \notin [A]$ и $a \in F$, то существует такая грань $F_2^- \in H^-$, что $S_2 = [F_2^-, a]$. Тогда $F^* \in \Gamma_{d-2}(F_2^-)$. Согласно (5) $H = H(T(A)) \in \mathscr{T}^\partial(A)$ и из (3) следует, что F^* является $(d-2)$-мерной гранью в точности двух элементов из H: один из них является гранью $F_1^- \in H^-$, другой по построению H^* принадлежит $H^{+,0}$. Поэтому $F_2^- = F_1^-$, $S_2 = S_1$ и предположение неверно. Следовательно, F является $(d-1)$-мерной гранью только одного симплекса S триангуляции $T(A')$ и $F \in H(T(A'))$. Таким образом, $H' \subseteq H(T(A'))$.

Теперь докажем , что $H(T(A')) \subseteq H' = H^{+,0} \cup \eta(H^*)$. Рассмотрим произвольную грань $F' \in H(T(A'))$. Тогда F' является $(d-1)$-мерной гранью только одного симплекса S триангуляции $T(A')$. Если $S \in T(A)$, то $F' \in H^{+,0} \subset H'$. В ином случае существует такая грань $F^- \in H^-$, что $S = [F^-, a]$. Поскольку F^- является $(d-1)$-мерной гранью двух симплексов триангуляции $T(A')$, то $F' \neq F^-$. Положим $F^* = F' \cap F^-$. Тогда $\{F^*\} = \Gamma_{d-2}(F') \cap \Gamma_{d-2}(F')$ и $F' = [F^*, a]$. Согласно (3) F^* является $(d-2)$-мерной гранью в точности двух элементов из H: один из них является гранью $F^- \in H^-$, другой обозначим через F. Если предположить, что $F \in H^-$, то тогда в триангуляции $T(A')$ было бы два симплекса S и $[F, a]$ с одной и той же $(d-1)$-мерной гранью F'. Это означало бы, что $F' \notin H(T(A'))$. Последнее неверно. Следовательно, $F \in H^{+,0}$ и $F^* \in H^*$ по построению H^*. Поэтому $F' = [F^*, a] \in \eta(H^*) \subset H'$. Таким образом, $H(T(A')) \subseteq H'$ и $H' = H(T(A'))$.

Поскольку $H' = H(T(A'))$ и $H(T(A')) \in \mathscr{T}^\partial(A)$ согласно (5), $|E(H')| = d|H'|/2$ в силу (4). Нетрудно видеть, что $E' \subseteq E(H')$ и $|E'| = d|H'|/2 = |E(H')|$. Поэтому $E' = E(H')$ и $G(H') = (H', E(H')) = (H', E')$.

В силу используемых структур данных временная сложность совокупности шагов 1–3 и 6–8 равна $O(|H|)$. Шаг 4 выполняется за время $O(|H^-|)$, поскольку $|H^*| = \sum\limits_{F^- \in H^-} |\omega^*(F^-)|$, и $\omega^*(F^-)$, $F^- \in H^-$, может быть найдено за время $O(1)$, так как любая вершина графа $G(H)$ принадлежит ровно d его ребрам и d предполагается константой. Шаг 5 согласно лемме 2 выполняется за время $O(|H^-|)$. Таким образом, временная сложность итерации ТФМ-алгоритма равна $O(|H|)$. Теорема 2 доказана.

4. ТФМ-алгоритм

Рассмотрим последовательность точек $\widehat{A} = (a_1, \dots, a_N)$, состоящую из $|\widehat{A}| = N \geqslant d+1$ точек $a_1, \dots, a_N \in R^d$, положив $\widehat{A}_n = (a_1, \dots, a_n)$ для $n = d+1, \dots, N$ и предположив, что $[\widehat{A}_{d+1}]$ является d-мерным симплексом. Множество всех таких последовательностей обозначим через $\mathscr{A}_2(d) = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1, \dots, a_k \in R^d,\ k \geqslant d+1,\ \dim[a_1, \dots, a_{d+1}] = d\}$ и при $n \geqslant d+1$ положим $\mathscr{A}_2(d, n) = \{\widehat{A} \in \mathscr{A}_2(d) \mid |\widehat{A}| = n\}$. Определения и обозначения, введенные для триангуляций и граничных триангуляций множеств точек из $\mathscr{A}_1(d)$, без изменений переносятся на случай последовательностей точек из $\mathscr{A}_2(d)$.

ТФМ-алгоритм реализует схему (1) и, таким образом, получает ФМ-триангуляцию поданной на его вход последовательности точек $\widehat{A} = (a_1, \dots, a_N) \in \mathscr{A}_2(d, N)$, выполняя следующие действия.

Шаг 1. Положить $H_{d+1} = \mathscr{F}([\widehat{A}_{d+1}])$, $E_{d+1} = \{\{F_1, F_2\} \mid F_1, F_2 \in H_{d+1}, F_1 \neq F_2\}$, $T(\widehat{A}_{d+1}) = \{[\widehat{A}_{d+1}]\}$ и для каждой $F \in H_{d+1}$ найти $b_F^{\widehat{A}_{d+1}}$.

Шаг 2. Последовательно для $n = d+1, \dots, N-1$ произвести итерации, получая $(H_{n+1}, E_{n+1}) = \mathscr{T}FM_1(H_n, E_n, a_{n+1})$ и $T(\widehat{A}_{n+1}) = \mathscr{T}FM_2(T(\widehat{A}_n), H_n, a)$.

Таким образом, ТФМ-алгоритм строит $T(\widehat{A}) = T(\widehat{A}_N) \in \mathscr{T}(\widehat{A})$, $H_N = H(T(\widehat{A})) \in \mathscr{T}^\partial(\widehat{A})$ и $(H_N, E_N) = G(H_N)$.

Теорема 3. *Временная сложность* ТФМ-*алгоритма построения* ФМ-*триангуляции последовательности точек из* $\mathscr{A}_2(d, N)$ *равна* $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$.

Доказательство. Получив на входе последовательность точек $\widehat{A} \in \mathscr{A}_2(d, N)$, ТФМ-алгоритм каждую итерацию при $n = d+1, \dots, N-1$ в силу теоремы 2 выполняет за время $O(|H_n|)$. При этом $H_n = H(T(\widehat{A}_n)) \in \mathscr{T}^\partial(\widehat{A}_n)$ согласно (5) и $|H_n| = O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ по теореме 1. Следовательно, все итерации при построении $T(\widehat{A}) \in \mathscr{T}(\widehat{A})$ и $H_N = H(T(\widehat{A})) \in \mathscr{T}^\partial(\widehat{A})$ ТФМ-алгоритм выполнит за время $O(N^{\lfloor d/2 \rfloor + 1})$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Временная сложность* ТФМ-*алгоритма построения* ФМ-*триангуляции последовательности точек из* $\mathscr{A}_2(d)$ *при нечетном* d *неулучшаема по порядку.*

Доказательство. Рассмотрим нечетное d и построим последовательность, состоящую из $n \geqslant d+1$ точек, число симплексов ФМ-триангуляции которой имеет порядок n^m, где $m = \lfloor (d+1)/2 \rfloor$. Заметим, что $m = \lfloor d/2 \rfloor + 1$, поскольку d нечетно. Выберем ортонормированный базис $e_2, e_3, \ldots, e_{d+1}$ в R^d и нулевой вектор $e_1 = 0 \in R^d$. Положим $n_1 = n_2 = \cdots = n_{m-1} = \lfloor n/m \rfloor$ и $n_m = n - (m-1)\lfloor n/m \rfloor$, заметив, что $n_m \geqslant \lfloor n/m \rfloor$. При $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, n_i$ рассмотрим точки $a_{i,j} = e_{2i-1} + je_{2i}$ и последовательность $\widehat{A} = (a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{m,1}, a_{m,2},\ a_{1,3}, a_{1,4}, \ldots, a_{1,n_1},$ $a_{2,3}, a_{2,4}, \ldots, a_{2,n_2},\ \ldots,\ a_{m,3}, a_{m,4}, \ldots, a_{m,n_m})$. Тогда в ФМ-триангуляции $T(\widehat{A})$ этой последовательности точек содержится $|T(\widehat{A})| = \prod\limits_{i=1}^{m}(n_i - 1) =$ $(n_m - 1)(\lfloor n/m \rfloor - 1)^{m-1}$ симплексов. Поэтому $|T(\widehat{A})| \geqslant (\lfloor n/m \rfloor - 1)^m$ и любой алгоритм, строящий $T(\widehat{A})$, не может потратить на это время, на порядок меньшее n^m. Вместе с тем по теореме 3 временная сложность ТФМ-алгоритма для построения ФМ-триангуляций последовательностей точек из $\mathscr{A}_2(d, n)$ при нечетном d равна $O(n^m)$. Поэтому при нечетном d она неулучшаема по порядку. Теорема 4 доказана.

Рецензентом данной статьи был поставлен вопрос о существовании полиномиальной по выходу оценки временной сложности ТФМ-алгоритма построения ФМ-триангуляции для любой последовательности точек из $\mathscr{A}_2(d)$. Выходом ТФМ-алгоритма для последовательности из $\mathscr{A}_2(d)$, все точки которой принадлежат выпуклой оболочке ее первых точек $a_1, ..., a_{d+1}$, будет триангуляция, состоящая из одного симплекса $[a_1, ..., a_{d+1}]$. Поскольку данная последовательность может содержать сколь угодно много точек и каждая из них должна быть обработана, требуемой оценки сделать нельзя.

Если же рассмотреть такие последовательности точек, в которых каждая следующая точка не принадлежит выпуклой оболочке предыдущих, то здесь удается получить полиномиальную по выходу оценку временной сложности ТФМ-алгоритма. Множество всех таких последовательностей из $\mathscr{A}_2(d)$ обозначим через $\mathscr{A}_3(d)$.

Теорема 5. *Временная сложность* ТФМ-*алгоритма построения* ФМ-*триангуляции* $T(\widehat{A})$ *последовательности точек* $\widehat{A} \in \mathscr{A}_3(d)$ *равна* $O(|T(\widehat{A})|^2)$.

Доказательство. Пусть $(a_1, \ldots, a_N) = \widehat{A}$. Каждую итерацию при $n = d+1, \ldots, N-1$ в силу теоремы 2 ТФМ-алгоритм выполняет за время $O(|H_n|)$. Таким образом, все итерации ТФМ-алгоритм выполнит за время $O\Big(1 + \sum\limits_{n=d+1}^{N-1} |H_n|\Big)$ и получит ФМ-триангуляцию $T(\widehat{A})$ последовательности точек $\widehat{A}$. Множество H_n состоит из внешних $(d-1)$-мерных граней триангуляции $T(\widehat{A}_n)$. Поэтому $|H_n| \leqslant (d+1)|T(\widehat{A}_n)|$ и $|H_n| \leqslant (d+1)|T(\widehat{A})|$, так как $T(\widehat{A}_n) \subseteq T(\widehat{A})$, $n = d+1, ..., N-1$. Поскольку $\widehat{A} \in \mathscr{A}_3(d)$, каждая следующая добавляемая точка не принадлежит выпуклой оболочке предыдущих и на каждой итерации в триангуляцию добавляется по крайней мере один симплекс. Поэтому $N - d - 1 < |T(\widehat{A})|$. Тогда

$$\sum_{n=d+1}^{N-1} |H_n| \leqslant (N-d-1)(d+1)|T(\widehat{A})| < (d+1)|T(\widehat{A})|^2.$$

Таким образом, временная сложность ТФМ-алгоритма построения ФМ-триангуляции $T(\widehat{A})$ последовательности точек $\widehat{A} \in \mathscr{A}_3(d)$ равна $O(|T(\widehat{A})|^2)$. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Груздев Д. В.** Модификация алгоритма Фурье — Моцкина для построения триангуляций // Информ. бюл. Ассоциации математического программирования. Вып. 10. XII Всерос. конф. «Математическое программирование и приложения» (тез. докл.). Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С. 89–90.
2. **Моцкин Т. С., Райфа Х., Томпсон Дж. Л., Тролл Р. М.** Метод двойного описания: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
3. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1976.
4. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
5. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
6. **Шевченко В. Н.** Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.
7. **Шевченко В. Н.** О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Изв. вузов. Математика. 1997. № 12. С. 89–99.
8. **Шевченко В. Н.** О максимальных триангуляциях выпуклых политопов // Междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конф. (Новосибирск, 26 июня – 1 июля 2000). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 163.
9. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** О минимальном разбиении выпуклого многогранника на тетраэдры // Математическое моделирование и оптимальное управление. Нижн. Новгород, 1998. С. 184–193. (Вестн. Нижегородского ун-та; Вып. 1(18)).

10. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Графовая модификация алгоритма Фурье — Моцкина для построения триангуляции // Рос. конф. «Дискретный анализ и исследование операций». Материалы конф. (Новосибирск, 24–28 июня 2002). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. С. 140.

Адрес автора:

Нижегородский
государственный университет,
пр. Гагарина, 23,
603950 Нижний Новгород.
E-mail: shev@uic.nnov.ru,
grdv100@uic.nnov.ru

Статья поступила
27 июня 2002 г.