ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—июнь 2003. Серия 2. Том 10, № 1, 65–91

УДК 519.865.3

НАХОЖДЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВА — ОБМЕНА*)

В. И. Шмырёв

Рассматривается класс линейных моделей производства — обмена Эрроу — Дебре с весьма простой структурой допустимых производственных множеств участников производителей (фирм): производственное множество каждой фирмы описывается, помимо условий неотрицательности величин выпускаемых продуктов, еще одним неравенством, задающим ограничение по расходованию некоторого лимитирующего ресурса. Именно такие модели возникают как аппроксимационные при исследовании общих моделей, в которых производственные возможности фирм описываются выпуклыми множествами.

В настоящей статье продолжены исследования из [5]. Полученный конечный алгоритм отыскания равновесных состояний примыкает к алгоритмам [1–3] для отыскания равновесных состояний в линейной модели обмена. Он основан на общей схеме полиэдральной комплементарности [4], которая обобщает известную схему Лемке для задач линейной комплементарности [7]. Как и в случае линейной модели обмена, исследуемый процесс характеризуется свойством монотонности, имеющим место при применении процедуры Лемке к задачам с положительными главными минорами матрицы ограничений.

§ 1. Описание класса моделей

Пусть n — число продуктов, учитываемых в рассматриваемой модели. Каждый продукт отождествляется с его номером, т. е. множество $J = \{1, \ldots, n\}$ является множеством продуктов модели.

Участники модели делятся на две группы: производящие товары — их будем именовать производителями, или фирмами, и потребляющие товары — их будем именовать потребителями. Пусть m — число потребителей модели и l — число фирм. Введем общую нумерацию участников

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00877а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФФИ (НШ–80.2003.6).

модели, считая $S = \{1, \dots, m+l\}$ множеством всех участников. При этом $I = \{1, \dots, m\}$ — множество потребителей и $K = \{m+1, \dots, m+l\}$ — множество фирм.

Фирма $k \in K$ планирует производство товара $j \in J$ в некотором объёме x_j^k, определяя тем самым вектор-план $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$. Реализация этого плана требует затрат некоторого ресурса, имеющегося у фирмы в количестве ζ_k. Считается, что при производстве единицы товара j затрачивается c_j^k единиц этого ресурса и количество затрачиваемого ресурса линейно зависит от объёма производимого товара. Таким образом, общие затраты ресурса на реализацию плана x^k задаются линейной функцией $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^k x_j^k = (c^k, x^k)$, где $c^k = (c_1^k, \dots, c_n^k) > 0$.

Продажа произведенной продукции по некоторым ценам p_j $(j = 1, \dots, n)$ дает фирме доход $\lambda_k = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j^k$. Считая, что целью деятельности фирмы является максимизация получаемого дохода, имеем следующую задачу: найти максимум функции

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j^k \tag{1.1}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j^k \leqslant \zeta_k, \tag{1.2}$$

$$x_j^k \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

Будем считать, что у потребителя $i \in I$ имеется некоторый наличный запас денег в количестве α_i. Кроме того, он участвует в доходах фирм, и это участие приносит ему дополнительный доход, равный $\sum\limits_{k \in K} \theta_k^i \lambda_k$, где θ_k^i — некоторые заданные неотрицательные коэффициенты, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i} \theta_k^i = 1 \quad \text{при каждом } k \in K. \tag{1.4}$$

Это означает, что доход каждой фирмы полностью распределяется между потребителями.

Для краткости записи введем векторы $\lambda = (\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+l})$ и $\theta^i = (\theta_{m+1}^i, \dots, \theta_{m+l}^i)$. Тогда суммарное количество денег у потребителя i равно $\varphi_i = \alpha_i + (\theta^i, \lambda)$. На эти деньги потребитель i планирует приобретение x_j^i единиц j-го товара, формируя свой план-вектор $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$.

Считаем, что полезность такого набора товаров для потребителя i задается линейной функцией $\sum_{j\in J} c^i_j x^i_j = (c^i, x^i)$, где c^i_j — некоторые неотрицательные числа, а $c^i = (c^i_1, \ldots, c^i_n)$.

В результате получаем следующую задачу потребителя: найти максимум функции

$$\sum_{j\in J} c^i_j x^i_j \tag{1.5}$$

при условии

$$\sum_{j\in J} p_j x^i_j \leqslant \alpha_i + (\theta^i, \lambda), \tag{1.6}$$

$$x^i_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Естественно предполагать, что все векторы c^k, $k \in K$, положительны, а среди векторов c^i, $i \in I$, нет нулевых. Более того, чтобы избежать излишних усложнений, будем предполагать, что векторы c^i, $i \in I$, также положительны. При таком предположении для разрешимости задач (1.5)–(1.7) нужно требовать положительность всех цен p_j, $j \in J$. Ясно, что тогда при оптимальных решениях задач всех участников, т. е. задач (1.1)–(1.3) и (1.5)–(1.7), условия (1.2) и (1.6) будут выполняться как равенства.

Если предполагать, что потребители приобретают только товары, произведенные фирмами, т. е. если выполняются неравенства

$$\sum_{i\in I} x^i_j \leqslant \sum_{k\in K} x^k_j, \tag{1.8}$$

то, умножая эти неравенства на p_j и складывая, получаем

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} p_j x^i_j \leqslant \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} p_j x^k_j. \tag{1.9}$$

Левую часть этого неравенства можно получить суммированием условий (1.6), которые, как отмечалось, выполняются в виде равенств. Следовательно, с учетом (1.4) имеем

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x^i_j p_j = \sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{i\in I}(\theta^i, \lambda) = \sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{k\in K}\lambda_k.$$

В свою очередь, для правой части неравенства (1.9) имеем

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} p_j x^k_j = \sum_{k\in K}\lambda_k.$$

Таким образом, из (1.9) следует, что

$$\sum_{i\in I}\alpha_i + \sum_{k\in K}\lambda_k \leqslant \sum_{k\in K}\lambda_k,$$

т. е. $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i \leqslant 0$. Значит, $\alpha_i = 0$ при любом $i \in I$. Поэтому при наличии начальных запасов денег у потребителей мы должны предполагать наличие начальных запасов товаров на рынке.

В дальнейшем считаем, что $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i > 0$, и для простоты предполагаем, что на рынке в каких-то количествах имеются начальные запасы всех товаров. Ясно, что выбирая должным образом масштабы измерения товаров, мы можем считать, что имеется ровно одна единица каждого товара. В результате условие (1.8) заменится на условие

$$\sum_{i\in I}x_j^i \leqslant \sum_{k\in K}x_j^k + 1, \quad \text{при любом } j \in J, \tag{1.10}$$

или в векторном виде

$$\sum_{i\in I}x^i \leqslant \sum_{k\in K}x^k + e, \tag{1.11}$$

где $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$.

По тем же соображениям можно считать, что $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i = 1$.

Теперь с учетом этих предварительных рассуждений можно сформулировать общепринятое определение равновесных цен: неотрицательный вектор цен $\tilde{p}_j = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n)$ называется *равновесным*, если при $p_j = \tilde{p}_j$, $j \in J$, все задачи участников модели разрешимы и среди оптимальных решений этих задач найдутся такие $x^s = \tilde{x}^s$, $s \in S$, что выполняется условие (1.11) и

$$\Big(\tilde{p}, \sum_{i\in I}\tilde{x}^i - \sum_{k\in K}\tilde{x}^k - e\Big) = 0. \tag{1.12}$$

Говорят, что $\tilde{p}$ и $\tilde{x}^s$, $s \in S$, задают равновесное состояние модели (равновесие). Как отмечалось, при сделанном предположении положительности векторов c^i, $i \in I$, из разрешимости задач потребителей следует положительность всех цен p_j, а значит, $\tilde{p} > 0$ и из (1.12) следует, что в равновесном состоянии условие (1.11) должно выполняться как равенство

$$\sum_{i\in I}\tilde{x}^i = \sum_{k\in K}\tilde{x}^k + e. \tag{1.13}$$

Кроме того, легко заключить, что компоненты $p_j = \tilde{p}_j$ должны удовлетворять следующему условию нормировки цен:

$$\sum_{j\in J}p_j = \sum_{i\in I}\alpha_i. \tag{1.14}$$

Описанная модель является обобщением более ранней модели, рассмотренной автором в [5]. Отличие состоит в присутствии запасов товаров на рынке и наличии у потребителей начальных запасов денег.

§ 2. Вспомогательная модель обмена

Как уже отмечалось, при сделанных предположениях в задачах (1.1)–(1.3) на оптимальных решениях неравенства (1.2) выполняются как равенства. Поэтому если λ_k — оптимальное значение целевой функции (1.1) в k-й задаче (1.1)–(1.3) (при некоторых фиксированных ценах p_j, $j \in J$), то этой задаче можно поставить в соответствие эквивалентную ей (т. е. имеющую то же множество оптимальных решений) задачу: найти минимум функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j \tag{2.1}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \lambda_k, \tag{2.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Это означает, что, зная доходы $\tilde{\lambda}_k$, получающиеся при равновесных ценах $\tilde{p}_j$, $j \in J$, для участников $k \in K$, задачи (1.1)–(1.3) без изменения понятия равновесия можно заменить задачами (2.1)–(2.3), получая таким образом модель нового типа, но с прежним состоянием равновесия. Формализуем эти рассуждения.

Введём в рассмотрение вспомогательную модель с тем же множеством участников S. Предполагая фиксированными некоторые значения λ_k, $k \in K$, считаем, что участники из множества K решают соответствующие задачи (2.1)–(2.3), а участники из множества I — задачи (1.5)–(1.7).

Равновесное состояние в этой модели определим как равновесный вектор цен $\tilde{p}$ и набор векторов $\tilde{x}^s$, $s \in S$, задающих оптимальные решения соответствующих задач (1.5)–(1.7) и (2.1)–(2.3) и удовлетворяющих условию баланса (1.13).

Таким образом, равновесное состояние в новой модели будет таковым и в исходной модели, если при этом оптимальные значения целевых функций (2.1) совпадают с соответствующими величинами ζ_k. Ясно, что это будет лишь при надлежащих значениях $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, которые заранее не известны. Поэтому будем рассматривать величины λ_k в качестве изменяющихся параметров. В связи с этим новую модель условно будем именовать *вспомогательной параметрической моделью обмена.*

Предлагаемый далее процесс отыскания равновесного состояния в исходной модели состоит в отслеживании равновесных состояний в описанной вспомогательной параметрической модели обмена при некотором целенаправленном изменении параметров λ_k, $k \in K$, до тех пор, пока не будет получено упомянутое выше совпадение оптимальных значений целевых функций (2.1) с соответствующими значениями ζ_k.

Отметим отличительную особенность введенной модели обмена: одна группа участников максимизирует свои целевые функции (c^s, x^s), а другая группа минимизирует (при условии положительности всех векторов c^s). Если вторая группа участников отсутствует, то получаем классическую линейную модель обмена. Модели, в которых все участники минимизируют свои функции, рассматривались в [1, 2] и именовались моделями кооперации. Однако условия баланса товаров в этих моделях имели традиционный вид, они не получаются как частный случай условий (1.13). В моделях кооперации, как следует из [2], вообще говоря, нет единственности равновесного вектора цен.

Покажем, что в введенной параметрической модели обмена при любых положительных значениях параметров λ_k, $k \in K$, равновесные цены существуют и определяются единственным образом. Для этого аналогично [1–3] рассмотрим следующую задачу линейного программирования: найти максимум функции

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij}\ln c_j^i - \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} z_{kj}\ln c_j^k \tag{2.4}$$

при условиях

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \alpha_i + (\theta^i, \lambda), \quad i \in I, \tag{2.5}$$

$$-\sum_{j\in J} z_{kj} = -\lambda_k, \quad k \in K, \tag{2.6}$$

$$-\sum_{i\in I} z_{ij} + \sum_{k\in K} z_{kj} = -p_j, \quad j \in J, \tag{2.7}$$

$$z_{ij}, z_{kj} \geqslant 0, \ i \in I, \ j \in J, \ k \in K. \tag{2.8}$$

Каждая переменная z_{ij} и z_{kj} входит ровно в два уравнения этой системы ограничений, причем в одно с коэффициентом -1, а в другое — с коэффициентом 1. Тем самым это сетевая транспортная задача. При этом уравнения (2.5) соответствуют пунктам сети, в которые груз может только привозиться. Их уместно трактовать как пункты потребления, что согласуется с описанием исходной модели (i — номер потребителя в исходной модели). Аналогично из пунктов сети, соответствующих

уравнениям (2.6), груз может только вывозиться. Это пункты производства, что опять же согласуется с описанием исходной модели, так как в ней этим пунктам отвечают фирмы. Уравнениям (2.7) соответствуют промежуточные пункты: можно как ввозить в них груз, так и вывозить. Однако объём вывоза из j-го пункта должен превосходить объём привоза на p_j единиц груза, так что эти пункты также следует трактовать как пункты производства (с объемами производства равными p_j). При любых $\lambda_k \geqslant 0$ и любых $p_j \geqslant 0$, удовлетворяющих условию нормировки (1.14), приведенная транспортная задача (ввиду (1.4)) является сбалансированной, т. е. объем производства совпадает с объемом потребления:

$$\sum_{k\in K}\lambda_k + \sum_{j\in J}p_j = \sum_{i\in I}(\alpha_i + (\theta^i,\lambda)). \tag{2.9}$$

Кроме того, любой пункт производства связан на сети непосредственно или через промежуточный пункт с любым пунктом потребления. Поэтому при указанных λ_k и p_j задача всегда имеет допустимые решения, множество которых ввиду (2.5), (2.6) и (2.8) ограничено. Следовательно, при таких λ_k и p_j транспортная задача всегда разрешима.

Зафиксировав некоторые значения $\lambda_k \geqslant 0$, $k \in K$, оставим изменяющимися p_j, рассматривая их в качестве параметров сформулированной транспортной задачи. В этом случае имеем вектор параметров $p = (p_1,\ldots,p_n)$, который изменяется в симплексе σ:

$$\sigma = \Big\{p \in R^n_+ \;\Big|\; \sum_{j\in J}p_j = \sum_{i\in I}\alpha_i\Big\}. \tag{2.10}$$

Определим на σ функцию f, задающую при $p \in \sigma$ в качестве значения $f(p)$ оптимальное значение целевой функции (2.4) в транспортной задаче (2.5)–(2.8). Из теории линейного программирования известно, что f — вогнутая функция.

На симплексе σ введём ещё функцию

$$h(p) = \sum_{j\in J}p_j\ln p_j, \tag{2.11}$$

доопределив её на границе симплекса σ по непрерывности: $p_j\ln p_j = 0$, если $p_j = 0$.

Теперь рассмотрим функцию $\varphi(p) = h(p) - f(p)$. Она непрерывна и строго выпукла на σ и поэтому имеет на σ единственную точку минимума.

Теорема 2.1. *При заданных (неотрицательных) значениях параметров λ_k, $k \in K$, точка минимума функции φ на симплексе σ и только она задает равновесный вектор цен параметрической модели обмена.*

Доказательство. Пусть $\hat{p}$ — точка минимума функции φ на симплексе σ. Ясно, что $\hat{p}$ принадлежит относительной внутренности симплекса σ°. В самом деле, производная функции $x \ln x$ равна $1 + \ln x$ и стремится к $-\infty$ при $x \to +0$. Поэтому если некоторая точка p° лежит на границе симплекса σ и q — направление, ведущее из p° внутрь σ, то $\partial h/\partial q(p)$ также стремится к $-\infty$ при $p = p^\circ + tq$ и $t \to +0$. В то же время $\partial p/\partial q(p)$ имеет конечный предел, ибо f — кусочно-линейная. В результате $\varphi(p^\circ + tq)$ меньше $\varphi(p^\circ)$ при малых положительных t и, следовательно, p° не может быть точкой минимума функции φ.

Из $\hat{p} \in \sigma^\circ$ следует, что субдифференциал $\partial\varphi(\hat{p})$ не пуст и является выпуклым компактом, а так как $\hat{p}$ — точка минимума, то $0 \in \partial\varphi(\hat{p})$. По теореме Моро — Рокафеллара справедливо равенство

$$\partial\varphi(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) + \partial(-f)(\hat{p}),$$

где $\partial(-f)(\hat{p})$ — субдифференциал выпуклой функции $(-f)$ в точке $\hat{p}$. Для вогнутой функции f введём множество $\partial f(\hat{p}) = -\partial(-f)(\hat{p})$. Тогда

$$\partial\varphi(\hat{p}) = \partial h(\hat{p}) - \partial f(\hat{p}).$$

При $\hat{p} > 0$ имеем $\partial h(\hat{p}) = \{\ln \hat{p} + te \mid t \in R\}$, где $e = (1, \ldots, 1) \in R^n$ и $\ln \hat{p} = (\ln \hat{p}_1, \ldots, \ln \hat{p}_n)$. Таким образом, условие $0 \in \partial\varphi(\hat{p})$ эквивалентно условию $(\ln \hat{p} + te) \in \partial f(\hat{p})$ при некотором $t = t^\circ$. Но эффективная область функции f лежит в гиперплоскости, задаваемой уравнением $\sum\limits_j p_j = 1$. Учитывая этот факт, из $g \in \partial f(\hat{p})$ получаем $(g + te) \in \partial f(\hat{p})$ при любом t. Поэтому условие $(\ln \hat{p} + t^\circ e) \in \partial f(\hat{p})$ эквивалентно условию $\ln \hat{p} \in \partial f(\hat{p})$.

Теперь заметим, что множество $\partial f(\hat{p})$ следующим образом описывается через оптимальные решения задачи, двойственной к транспортной задаче (2.4)–(2.8). Пусть $\{\hat{z}_{sj}\}$ — оптимальное решение задачи (2.4)–(2.8) при $p = \hat{p}$. Это означает, что найдутся значения векторов двойственных переменных $u = \hat{u} \in R^{m+l}$ и $v = \hat{v} \in R^n$ такие, что при $i \in I$ имеем

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_i - \hat{v}_j &= \ln c_j^i, \quad \text{если } \hat{z}_{ij} > 0, \\ \hat{u}_i - \hat{v}_j &\geqslant \ln c_j^i, \quad \text{если } \hat{z}_{ij} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

и аналогично при $k \in K$

$$\left.\begin{aligned} -\hat{u}_k + \hat{v}_j &= -\ln c_j^k, \quad \text{если } \hat{z}_{kj} > 0, \\ -\hat{u}_k + \hat{v}_j &\geqslant -\ln c_j^k, \quad \text{если } \hat{z}_{kj} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Легко показать, что при всевозможных таких векторах $\hat{v}$ векторы $(-\hat{v})$ образуют множество $\partial f(\hat{p})$.

Из полученного представления множества $\partial f(\hat{p})$ заключаем, что из условия $\ln \hat{p} \in \partial f(\hat{p})$ следует существование такого вектора $\hat{v}'$, что

$\ln \hat{p} = -\hat{v}'$. Пусть $\hat{u}'$ — соответствующий вектору $\hat{v}'$ вектор $\hat{u}$. Введём величины $\hat{y}'_s$, исходя из равенства $\ln \hat{y}'_s = \hat{u}'_s$, и величины $\hat{x}^s_j = \hat{z}_{sj}/\hat{p}_j$. Легко убедиться, что векторы $\hat{x}^s$ задают оптимальные решения задач участников при $p = \hat{p}$. Например, для потребителя $i \in I$ имеем

$$\sum \hat{p}_j \hat{x}^i_j = \sum \hat{z}_{ij} = \alpha_i + (\theta^i, \lambda),$$

т. е. $\hat{x}^i$ задаёт допустимое решение задачи участника i. Кроме того, из соотношений (2.12) для $\hat{v} = \hat{v}'$ и $\hat{u} = \hat{u}'$, используя введенные $\hat{y}'_i$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{y}'_i \hat{p}_j &= c^i_j \quad \text{при} \ \ \hat{x}_{ij} > 0, \\ \hat{y}'_i \hat{p}_j &\geqslant c^i_j \quad \text{при} \ \ \hat{x}_{ij} = 0, \end{aligned}$$

что свидетельствует об оптимальности вектора $\hat{x}^i$.

Аналогично показывается оптимальность вектора $\hat{x}^k$ в задаче k-й фирмы. Наконец, из соотношений (2.7) при $z_{sj} = \hat{z}_{sj}$ получаем требуемое условие баланса продуктов (1.13) для $\tilde{x}^s = \hat{x}^s$, $s \in S$. Тем самым $\hat{p}$ — равновесный вектор цен модели.

Обратное утверждение получаем, повторяя приведенные рассуждения в обратном порядке. При этом положительность равновесного вектора цен следует непосредственно из определения и положительности векторов c^i, $i \in I$. Теорема 2.1 доказана.

Следствие 1. *При любых фиксированных положительных значениях параметров λ_k, $k \in K$, вектор равновесных цен в параметрической модели обмена определяется единственным образом.*

§ 3. Геометрическая интерпретация

Указываемая теоремой 2.1 связь равновесных состояний вспомогательной параметрической модели обмена с транспортной задачей (2.4)–(2.8) мотивирует рассмотрение базисных множеств этой задачи. Нам потребуются двойственно допустимые базисные множества и всевозможные их подмножества, обладающие свойством представительности: говорим, что множество $\mathscr{B} \subset S \times J$ является *представительным*, если

(i) $\{s \mid (s, j) \in \mathscr{B}\} \neq \varnothing$ при любом $j \in J$;

(ii) $\{j \mid (s, j) \in \mathscr{B}\} \neq \varnothing$ при любом $s \in S$.

Введенное понятие легко интерпретируется в терминах общепринятой графовой интерпретации транспортных задач следующим образом.

Каждому $\mathscr{B} \subset S \times J$ можно поставить в соответствие ориентированный граф $\Gamma(\mathscr{B})$ с множеством вершин $V = S \cup \{m + l + j \mid j \in J\}$ и множеством дуг $U(\mathscr{B}) = U_1(\mathscr{B}) \cup U_2(\mathscr{B})$, где $U_1(\mathscr{B}) = \{(k, m + l + j) \mid k \in K,\ (k, j) \in \mathscr{B}\}$, $U_2(\mathscr{B}) = \{(m + l + j, i) \mid i \in I,\ (i, j) \in \mathscr{B}\}$. Представительные множества — это в точности те множества $\mathscr{B} \subset S \times J$, которым соответствуют графы $\Gamma(\mathscr{B})$ без изолированных вершин.

Ясно, что все базисные множества задачи (2.4)–(2.8) обладают свойством представительности (отвечающие им графы являются покрывающими деревьями).

Обозначим через $\mathscr{L}$ совокупность всех двойственно допустимых базисных множеств задачи (2.4)–(2.8) и их всевозможных представительных подмножеств.

Пусть $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$. Так как $\mathscr{B}$ содержится в некотором двойственно допустимом базисном множестве задачи (2.4)–(2.8), то найдутся такие u_s и v_j, $s \in S$ и $j \in J$, что

$$\begin{aligned} -u_k + v_j &\geqslant -\ln c_j^k, \quad k \in K,\ j \in J, \\ -u_k + v_j &= -\ln c_j^k, \quad (k,j) \in \mathscr{B}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

и

$$\begin{aligned} u_i - v_j &\geqslant \ln c_j^i, \quad i \in I,\ j \in J, \\ u_i - v_j &= \ln c_j^i, \quad (i,j) \in \mathscr{B}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Вводя теперь величины y_s и q_j, $S \in S$ и $j \in J$, формулами $u_s = \ln y_s$ и $v_j = -\ln q_j$, получаем

$$\begin{aligned} y_k q_j &\leqslant c_j^k, \quad k \in K,\ j \in J, \\ y_k q_j &= c_j^k, \quad (k,j) \in \mathscr{B}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_i q_j &\geqslant c_j^i, \quad i \in I,\ j \in J, \\ y_i q_j &= c_j^i, \quad (i,j) \in \mathscr{B}. \end{aligned}$$

Это означает, что если зафиксировать цены $p_j = q_j$, то связи $(s,j) \in \mathscr{B}$ окажутся оптимальными в задаче s-го участника модели: если $s \in I$ (т. е. s — потребитель), то для получения оптимального решения соответствующей задачи (1.5)–(1.7) он может ограничиться закупками в надлежащих объёмах лишь тех товаров j, для которых $(s,j) \in \mathscr{B}$. Аналогично если $s \in K$, то s-я фирма получит максимальный доход, производя в надлежащих объёмах лишь те товары j, для которых $(s,j) \in \mathscr{B}$.

Так как $\mathscr{B}$ — представительное множество, то можно исключить величины y_s, получив в результате следующую систему линейных условий для величин q_j:

$$\frac{c_j^s}{q_j} = \frac{c_h^s}{q_h}, \quad (s,j),(s,h) \in \mathscr{B}, \tag{3.3}$$

и

$$\frac{c_j^k}{q_j} \leqslant \frac{c_h^k}{q_h}, \quad (k,j) \in \mathscr{B}, (k,h) \notin \mathscr{B},\ k \in K, \tag{3.4}$$

$$\frac{c_j^i}{q_j} \geqslant \frac{c_h^i}{q_h}, \quad (i,j) \in \mathscr{B}, (i,h) \notin \mathscr{B},\ i \in I. \tag{3.5}$$

Множеству $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$ поставим в соответствие множество $\Xi(\mathscr{B})$, состоящее из таких положительных n-мерных векторов q, компоненты которых удовлетворяют полученной линейной системе (3.3)–(3.5). Содержательно множество $\Xi(\mathscr{B})$ состоит из таких векторов цен, при которых связи «участник — товар», задаваемые множеством $\mathscr{B}$, являются предпочтительными.

Зададим теперь вопрос: при каких значениях величин p_j и λ_k, $j \in J$ и $k \in K$, в вспомогательной транспортной задаче (2.4)–(2.8) найдутся допустимые решения, использующие только связи из $\mathscr{B}$, т. е. удовлетворяющие дополнительному требованию

$$z_{sj} = 0, \quad (s, j) \notin \mathscr{B}. \tag{3.6}$$

Множество таких пар $v = (p, \lambda) \in R^n_+ \times R^l_+$ обозначим через $\Omega(\mathscr{B})$. Для описания этого множества обратимся к графу $\Gamma(\mathscr{B})$. Пусть τ — число компонент связности этого графа и в ν-й компоненте связности содержатся вершины $k \in K_\nu \subset K$, $i \in I_\nu \subset I$ и $(m + l + j)$ при $j \in J_\nu \subset J$. Для существования указанных допустимых решений транспортной задачи (2.4)–(2.8) необходимо, чтобы выполнялся баланс груза на каждой компоненте, что выражается в виде следующей системы условий:

$$\sum_{j \in J_\nu} p_j + \sum_{k \in K_\nu} \lambda_k = \sum_{i \in I_\nu} (\alpha_i + (\theta^i, \lambda)), \quad \nu = 1, \ldots, \tau. \tag{3.7}$$

Если система этих условий для p_j и λ_k выполняется, то поскольку $\mathscr{B}$ является подмножеством некоторого базисного множества задачи (2.4)–(2.8), величины z_{sj} определяются однозначно как линейные функции от p и λ из системы линейных уравнений (2.5)–(2.7), (3.6): $z_{sj} = z^{\mathscr{B}}_{sj}(p, \lambda)$.

Таким образом, требуемое множество $\Omega(\mathscr{B})$ описывается системой линейных уравнений (3.7) и системой линейных неравенств

$$z^{\mathscr{B}}_{sj}(p, \lambda) \geqslant 0, \quad (s, j) \in \mathscr{B}. \tag{3.8}$$

Лемма 3.1. *Если для некоторого $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$ и некоторых $\hat{p} \in \mathrm{Int} R^n_+$ и $\hat{\lambda} \in R^l_+$ выполняются включения $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$ и $\hat{w} = (\hat{p}, \hat{\lambda}) \in \Omega(\mathscr{B})$, то $\hat{p}$ — равновесный вектор цен в вспомогательной параметрической модели обмена при $\lambda_k = \hat{\lambda}_k$, $k \in K$. При этом компоненты равновесных векторов $\hat{x}^s$, $s \in S$, определяются по формулам*

$$\hat{x}^s_j = \hat{z}_{sj} / \hat{p}_j,$$

где $\hat{z}_{sj} = z^{\mathscr{B}}_{sj}(\hat{p}, \hat{\lambda})$.

Доказательство. В самом деле, из (2.5) и (2.6) следует допустимость векторов $\hat{x}^s$ в соответствующих задачах участников, а из $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$ — их оптимальность в этих задачах. Наконец, из (2.7) следует справедливость условия баланса (1.13).

Верно и утверждение, обратное лемме 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть $\hat{p}$ — равновесный вектор цен в вспомогательной модели обмена при некотором $\lambda = \hat{\lambda} \in R^l_+$. Тогда $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$ и $\hat{w} = (\hat{p}, \hat{\lambda}) \in \Omega(\mathscr{B})$ при некотором $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$.*

Доказательство. Пусть $\hat{\lambda} > 0$. При фиксированных $\lambda = \hat{\lambda}$ и $p = \hat{p}$ транспортная задача (2.4)–(2.8) имеет некоторое оптимальное решение $\{\hat{z}_{sj}\}$, при этом для оптимальных значений двойственных переменных $\hat{v}_j$ выполняется равенство $\hat{v}_j = -\ln \hat{p}_j$. Без ограничения общности можно считать, что граф с дугами $(s, m + l + j)$, для которых $\hat{z}_{sj} > 0$, не содержит циклов. В противном случае без потери оптимальности можно провести корректировку потоков $\hat{z}_{sj}$ для дуг цикла, как это делается в алгоритме метода потенциалов для транспортных задач, добиваясь обращения в ноль одного из корректируемых $\hat{z}_{sj}$ и разрыва рассматриваемого цикла. При отсутствии циклов связи (s, j), соответствующие положительным $\hat{z}_{sj}$, образуют множество $\mathscr{B}$, которое принадлежит совокупности $\mathscr{L}$. Легко видеть, что $\hat{p} \in \Xi(\mathscr{B})$ и $\hat{w} = (\hat{p}, \hat{\lambda}) \in \Omega(\mathscr{B})$. Лемма 3.2 доказана.

В случае, когда среди $\hat{\lambda}_k$ есть нулевые, можно взять одно из множеств $\mathscr{B}$, отвечающих точкам $\lambda > 0$ из бесконечно малой окрестности точки $\hat{\lambda}$. Оно и будет требуемым (ввиду замкнутости множеств $\Xi(\mathscr{B})$ и $\Omega(\mathscr{B})$).

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что при $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$ множества

$$W(\mathscr{B}) = \{w = (p, \lambda) \in R^{n+l}_+ \mid p \in \Xi(\mathscr{B}), w \in \Omega(\mathscr{B})\}$$

описывают всю совокупность пар (p, λ), удовлетворяющих условию: p является равновесным вектором цен в параметрической модели обмена при данном λ. Все эти множества задаются системами линейных уравнений и неравенств, а значит, являются многогранниками, лежащими в некоторых аффинных многообразиях. При этом легко видеть, что если $\mathscr{B}''$ получается из $\mathscr{B}'$ добавлением или исключением одной связи (s, j), то многогранники $W(\mathscr{B}')$ и $W(\mathscr{B}'')$ имеют общую грань. Таким образом, многогранники $W(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$, образуют полиэдральное многообразие.

По следствию 1 при данном значении векторного параметра λ равновесный вектор цен в параметрической модели обмена определяется единственным образом: $p = p(\lambda)$. Это означает, что множество $W(\mathscr{B})$ однозначно определяется своей проекцией на подпространство переменных λ_k, т. е. множеством

$$\Lambda(\mathscr{B}) = \{\lambda \in R^l_+ \mid \text{ существует такое } p, \text{ что } (p, \lambda) \in W(\mathscr{B})\}.$$

Ясно, что множества $\Lambda(\mathscr{B})$, как и множества $W(\mathscr{B})$, являются многогранниками и по лемме 3.2 покрывают всё R^l_+.

Можно показать, что при этом многогранники $\Lambda(\mathscr{B})$ не пересекаются по внутренним точкам и примыкают друг к другу правильным образом (т. е. по граням).

Лемма 3.3. *При $\lambda \in \Lambda(\mathscr{B})$ вектор-функция $p(\lambda)$ является линейной.*

Доказательство. Рассмотрим введенный ранее граф $\Gamma(\mathscr{B})$. Пусть он распадается на τ компонент связности. Подсистема уравнений (3.3), порождаемая ν-й компонентой, позволяет определить с точностью до положительного множителя γ_ν соответствующие величины p_j:

$$p_j = \gamma_\nu g_j, \quad j \in J_\nu.$$

Подставляя эти представления для p_j в условие баланса груза для ν-й компоненты (3.7), получаем величину γ_i как линейную функцию параметров λ_k. Лемма 3.3 доказана.

Таким образом, если рассматривать вектор-функцию $p(\lambda)$ на всём R^l_+, то она является кусочно-линейной. Из замкнутости множеств $\Lambda(\mathscr{B})$ и леммы 3.3 получаем

Следствие 2. *Вектор-функция $p(\lambda)$ непрерывна на R^l_+.*

Зафиксировав некоторое $\lambda \in \Lambda(\mathscr{B})$, рассмотрим $p(\lambda)$ и совокупность получающихся задач (2.1)–(2.3). В k-й задаче двойственная переменная $y_k(\lambda)$, соответствующая ограничению (2.2), определяется следующим образом:

$$y_k(\lambda) = \frac{c^k_j}{p_j(\lambda)}, \quad (k,j) \in \mathscr{B},$$

а для оптимального значения целевой функции $\Phi_k(\lambda)$ этой задачи по теореме двойственности из теории линейного программирования получаем

$$\Phi_k(\lambda) = y_k(\lambda)\lambda_k = \frac{c^k_j}{p_j(\lambda)}\lambda_k, \quad \lambda \in \Lambda(\mathscr{B}),\ (k,j) \in \mathscr{B}. \tag{3.9}$$

Тем самым задано отображение $\Phi : R^l_+ \to R^l_+$.

Как отмечалось ранее, равновесие в вспомогательной параметрической модели обмена при фиксированном $\lambda = \lambda^\circ$ будет совпадать с равновесием в исходной модели производства — обмена, если $\Phi_k(\lambda^\circ) = \zeta_k$ при всех $k \in K$.

В результате получим следующую интерпретацию исходной задачи. В R^l_+ задано семейство многогранников $\Lambda(\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$, и фиксированная точка ζ. Задана непрерывная вектор-функция $p(\lambda)$, линейная на каждом $\Lambda(\mathscr{B})$, и отображение $\Phi : R^l_+ \to R^l_+$, определяемое при $\lambda \in \Lambda(\mathscr{B})$ формулой (3.9). Требуется отыскать такое $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$, что точка ζ содержится в образе множества $\Lambda(\mathscr{B})$ при отображении Φ: $\zeta \in \Phi(\Lambda(\mathscr{B}))$.

§ 4. Описание одного шага процесса

Перейдём к описанию процедуры отыскания равновесия в исходной модели.

На очередном шаге процесса с номером η имеется некоторое множество $\mathscr{B}_\eta \in \mathscr{L}$, т. е. подмножество какого-либо двойственно допустимого базисного множества задачи (2.4)–(2.8), обладающее свойством представительности. Это означает, что соответствующий граф $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$ не содержит циклов и изолированных вершин. Известна также точка $w^\eta = (p^\eta, \lambda^\eta)$ такая, что

(α) $\quad w^\eta \in \Omega(\mathscr{B}_\eta)$;

$(\alpha\alpha)$ $\quad p^\eta \in \Xi(\mathscr{B}_\eta)$.

Согласно лемме 3.1 это означает, что $p^\eta = p(\lambda^\eta)$, т. е. $p = p^\eta$ является равновесным вектором цен в вспомогательной параметрической модели обмена при $\lambda = \lambda^\eta$. При этом, как отмечалось ранее, в силу известных соотношений двойственности для задач линейного программирования для оптимальных значений целевых функций (2.1) выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} c_j^k \hat{x}_j^k = \frac{c_h^k}{p_h^k} \lambda_k^\eta, \quad (k,h) \in \mathscr{B}_\eta, \tag{4.1}$$

где $\hat{x}_j^k$ — компоненты оптимального вектора $\hat{x}^k$ в задаче (2.1)–(2.3) при $\lambda_k = \lambda_k^\eta$.

Выполнение шага алгоритма начинается с определения точки $\bar{w}(\mathscr{B}_\eta) = \bar{w}^\eta = (\bar{p}^\eta, \bar{\lambda}^\eta) \in R^{n+l}$, координаты которой $\bar{p}_j^\eta$ и $\bar{\lambda}_k^\eta$ задают решение системы уравнений, состоящей из условий

$$\frac{p_j}{c_j^s} = \frac{p_h}{c_h^s}, \quad (s,j),(s,h) \in \mathscr{B}_\eta, \tag{4.2}$$

$$c_h^k \lambda_k = \zeta_k p_h, \quad (k,h) \in \mathscr{B}_\eta, \tag{4.3}$$

совместно с условиями баланса (3.7) и условием (1.14). Ниже будет показано, что такая система уравнений всегда однозначно разрешима и её решение строго положительно.

Если полученные $\bar{p}^\eta$ и $\bar{\lambda}^\eta$ таковы, что $\bar{w}^\eta \in \Omega(\mathscr{B}_\eta)$, а $\bar{p}^\eta \in \Xi(\mathscr{B}_\eta)$, то $p = \bar{p}^\eta$ является равновесным вектором цен в вспомогательной параметрической модели при $\lambda = \bar{\lambda}^\eta$. Более того, оптимальные значения целевых функций (2.1) в задачах (2.1)–(2.3), которые при $\lambda = \lambda^\eta$ и $p = p^\eta$ определяются формулой (4.1), в данном случае ввиду (4.3) совпадают с соответствующими ζ_k. Это означает, что $p = \bar{p}^\eta$ — искомый равновесный вектор цен в исходной модели. Процесс заканчивается.

Пусть хотя бы одно из указанных условий нарушено. Рассмотрим зависящие от вещественного параметра t векторы

$$p(t) = p^\eta + t(\bar{p}^\eta - p^\eta),$$
$$\lambda(t) = \lambda^\eta + t(\bar{\lambda}^\eta - \lambda^\eta).$$

При изменении параметра t от 0 до 1 точка $w(t) = (p(t), \lambda(t)) \in R_+^{n+l}$ пробегает отрезок $[w^\eta, \bar{w}^\eta]$. Определим максимальное значение $t = t^*$, при котором ещё выполняются условия $w(t) \in \Omega(\mathscr{B}_\eta)$ и $p(t) \in \Xi(\mathscr{B}_\eta)$. По предположению при $t = 1$ хотя бы одно из этих условий не выполняется. Поэтому $t^* < 1$. Отметим, что отыскание t^* не представляет труда, ибо сводится к рассмотрению линейных систем неравенств вида (3.8) и (3.4)–(3.5), описывающих соответственно множества $\Omega(\mathscr{B}_\eta)$ и $\Xi(\mathscr{B}_\eta)$.

Будем различать два случая.

(i) Лимитирующим при определении t^* оказалось условие $p(t) \in \Xi(\mathscr{B}_\eta)$, т. е. увеличение t сдерживается каким-либо из неравенств вида (3.4)–(3.5) для $q = p(t)$. В этом случае пара (i, h) или (k, h), соответствующая лимитирующему неравенству, пополняет множество $\mathscr{B}_\eta$. Например, если лимитирующим оказалось неравенство вида (3.5), соответствующее паре $(i_\circ, h_\circ)$, то принимаем $\mathscr{B}_{\eta+1} = \mathscr{B}_\eta \cup \{(i_\circ, h_\circ)\}$.

(ii) Лимитирующим при определении t^* оказалось условие $w(t) \in \Omega(\mathscr{B}_\eta)$, т. е. увеличение t сдерживается каким-то из неравенств вида (3.8). Пусть, например, лимитирующим оказалось неравенство, соответствующее паре $(s_\circ, j_\circ)$. В этом случае пара $(s_\circ, j_\circ)$ исключается из $\mathscr{B}_\eta$, т. е. принимаем $\mathscr{B}_{\eta+1} = \mathscr{B}_\eta \setminus \{(s_\circ, j_\circ)\}$.

Ситуация, когда лимитирующая пара определяется неоднозначно, рассматривается как вырожденная. Формально процесс можно продолжить, фиксируя в качестве исключаемой из $\mathscr{B}_\eta$ или добавляемой в него любую лимитирующую пару.

В любом случае принимаем $p^{\eta+1} = p(t^*)$, $\lambda^{\eta+1} = \lambda(t^*)$ и переходим к следующему шагу.

Используя геометрическую интерпретацию, приведенную в предыдущем разделе, можно следующим образом проинтерпретировать один шаг предлагаемого процесса.

На очередном шаге η мы рассматриваем отображение $\Phi^{\mathscr{B}_\eta}(\lambda)$, задаваемое формулой (3.9) для $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\eta$, но при этом не ограничиваем изменение λ пределами множества $\Lambda(\mathscr{B}_\eta)$. Точка $\bar{\lambda}^\eta$ — единственное решение уравнения

$$\Phi^{\mathscr{B}_\eta}(\lambda) = \zeta,$$

а $\bar{p}^\eta = p(\bar{\lambda}^\eta)$. Выполнение шага состоит в движении по отрезку $[\lambda^\eta, \bar{\lambda}^\eta]$ от λ^η к $\bar{\lambda}^\eta$, насколько позволяют пределы множества $\Lambda(\mathscr{B}^\eta)$.

Если при этом точка $\bar{\lambda}^\eta$ оказалась достижимой, то получается искомое состояние равновесия. В противном случае осуществляется переход к множеству $\mathscr{B}^{\eta+1}$, которое получается сужением или расширением множества $\mathscr{B}^\eta$ в зависимости от того, какая из границ множества $\Lambda(\mathscr{B}^\eta)$ оказалась лимитирующей при упомянутом движении по отрезку $[\lambda^\eta, \bar{\lambda}^\eta]$.

Для доказательства корректности приведенного алгоритма нужно показать, что нахождение векторов $\bar{p}^\eta$ и $\bar{\lambda}^\eta$ на очередном шаге процесса всегда осуществимо, они определяются однозначно и положительны. Покажем это при выполнении дополнительного предположения:

$$\text{при любом } i \in I \text{ из } \alpha_i = 0 \text{ следует } \theta^i > 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим системы уравнений (4.2) и (4.3). Система (4.2) с точностью до некоторого положительного множителя задает величины p_j, соответствующие одной и той же компоненте связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$. Пусть граф $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$ распадается на τ компонент связности и в ν-й компоненте находятся вершины i, k и $(m+l+j)$ при $i \in I_\nu$, $k \in K_\nu$ и $j \in J_\nu$. Обозначив множитель, соответствующий ν-й компоненте связности, через π_ν, для решения системы (4.2) получаем

$$p_j = \pi_\nu \hat{p}_j, \quad j \in J_\nu, \tag{4.5}$$

где $\hat{p}_j$ — некоторые положительные коэффициенты, задающие пропорции между величинами p_j для ν-й компоненты.

Используя (4.5), из (4.3) можно получить аналогичное представление и для величин λ_k:

$$\lambda_k = \pi_\nu \hat{\lambda}_k, \quad k \in K_\nu, \tag{4.6}$$

где $\hat{\lambda}_k$ — некоторые положительные коэффициенты.

Теперь воспользуемся системой условий баланса (3.7) и условием (1.14). Из (1.14) следует, что

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\sum\limits_{i\in I} \alpha_i} \sum_{j\in J} p_j = \beta_i \sum_{j\in J} p_j, \tag{4.7}$$

где β_i — неотрицательные коэффициенты такие, что

$$\sum_{i\in I} \beta_i = 1. \tag{4.8}$$

Кроме того, из (4.4) следует, что

$$\text{при любом } i \in I \text{ если } \beta_i = 0, \text{ то } \theta^i > 0. \tag{4.9}$$

Подставляя (4.5), (4.6) и (4.7) в (3.7), получаем однородную систему уравнений относительно переменных π_ν:

$$\pi_\nu\biggl(\sum_{j\in J_\nu}\hat p_j+\sum_{k\in K_\nu}\hat\lambda_k\biggr)=\biggl(\sum_{i\in I_\nu}\beta_i\biggr)\sum_{l=1}^{\tau}\pi_l\sum_{j\in J_l}\hat p_j$$
$$+\sum_{i\in I_\nu}\sum_{l=1}^{\tau}\pi_l\sum_{k\in K_l}\theta_k^i\hat\lambda_k,\quad \nu=1,\dots,\tau. \tag{4.10}$$

Эту систему можно записать кратко в виде

$$D\pi=G\pi, \tag{4.11}$$

где π — вектор из неизвестных π_ν, $\nu=1,\dots,\tau$, G и D — квадратные матрицы порядка τ. При этом D — диагональная, а G ввиду (4.9) — положительная.

Несложно убедиться, что для любой неизвестной π_l сумма коэффициентов в правой части системы (4.10) совпадает с коэффициентом при этой неизвестной в левой части. В самом деле,

$$\sum_{\nu=1}^{\tau}\biggl(\sum_{i\in I_\nu}\beta_i\biggr)\sum_{j\in J_l}\hat p_j+\sum_{\nu=1}^{\tau}\sum_{i\in I_\nu}\sum_{k\in K_l}\theta_k^i\hat\lambda_k$$
$$=\sum_{i\in I}\beta_i\sum_{j\in J_l}\hat p_j+\sum_{k\in K_l}\hat\lambda_k\sum_{\nu=1}^{\tau}\sum_{i\in I_\nu}\theta_k^i$$
$$=\sum_{j\in J_l}\hat p_j\sum_{i\in I}\beta_i+\sum_{k\in K_l}\hat\lambda_k\sum_{i\in I}\theta_k^i,$$

что с учётом (4.8) и (1.4) совпадает с коэффициентом при π_l в левой части (4.10). Если ввести вектор $g=(1,\dots,1)\in R^\tau$, то отмеченное свойство можно записать кратко в виде

$$gD=gG,$$

или

$$g=gGD^{-1}. \tag{4.12}$$

Вводя новый вектор неизвестных $\tilde\pi=D\pi$ и матрицу $\widetilde G=GD^{-1}$, из (4.11) получаем

$$\tilde\pi=\widetilde G\tilde\pi, \tag{4.13}$$

где $\widetilde G$ — положительная матрица, а из (4.12) следует, что $\widetilde G^T$ — стохастическая. Тем самым единица является максимальным по модулю собственным числом матриц $\widetilde G^T$ и $\widetilde G$. По теореме Перрона система (4.13),

а значит, и система (4.11) имеют единственное с точностью до положительного множителя положительное решение:

$$\pi = \mu\hat{\pi}, \quad \hat{\pi} > 0, \quad \mu > 0.$$

Это позволяет из (4.4) и (4.6) получить

$$\begin{aligned} p_j &= \mu\hat{\pi}_\nu \hat{p}_j, \quad j \in J_\nu, \\ \lambda_k &= \mu\hat{\pi}_\nu \hat{\lambda}_k, \quad k \in K_\nu. \end{aligned}$$

Множитель μ определяется из условия (1.14). При этом $\mu > 0$ ввиду $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i > 0$.

Таким образом, при выполнении очередного шага процесса векторы $\bar{p}^\eta$ и $\bar{\lambda}^\eta$ определяются однозначно и положительны.

Для обоснования корректности исследуемого алгоритма нужно показать, что множество $\mathscr{B}_{\eta+1}$ также принадлежит совокупности $\mathscr{L}$, т. е. является подмножеством некоторого двойственно-допустимого базисного множества задачи (2.4)–(2.8) и обладает свойством представительности.

Прежде всего отметим, что первое из этих требований может нарушиться только при реализации случая (i) из описания шага алгоритма, а второе — при реализации случая (ii). Потребуем выполнения условия двойственной невырожденности для задачи (2.4)–(2.8). Тогда пополнение множества $\mathscr{B}_\eta$ лимитирующей связью (s,h) не может привести к образованию цикла в графе $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$.

С другой стороны, принимая $y_s = c_j^s/p_j(t^*)$ при $(s,j) \in \mathscr{B}_{\eta+1}$, легко убеждаемся, что величины $u_s = \ln y_s$ и $v_j = -\ln p_j(t^*)$ где $s \in S$ и $j \in J$ образуют допустимое решение двойственной задачи к (2.4)–(2.8); при этом неравенства, соответствующие парам (s,j) из $\mathscr{B}_{\eta+1}$, выполняются как равенства. Это означает, что $\mathscr{B}_{\eta+1}$ является подмножеством некоторого двойственно-допустимого базисного множества задачи (2.4)–(2.8), а значит, $\mathscr{B}_{\eta+1} \in \mathscr{L}$.

Аналогично убеждаемся, что в случае (ii) для получаемого множества $\mathscr{B}_{\eta+1}$ сохраняется свойство представительности. Это следует из того факта, что величины $z_{sj}^{\mathscr{B}}(p,\lambda)$, получаемые по множеству $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\eta$ для дуг, примыкающих к концевым вершинам графа $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$, совпадают с соответствующими этим вершинам величинами p_j, λ_k или $\alpha_i + (\theta^i, \lambda)$, которые при изменении параметра t остаются неотрицательными. Тем самым такие пары (s,j) не могут соответствовать лимитирующим неравенствам из системы (3.8) при определении величины t^*.

Обоснование корректности описанного алгоритма завершено.

§ 5. Монотонность процесса

Прежде всего отметим идейную близость рассматриваемого алгоритма с известными процедурами линейной комплементарности [7]. Поясним это подробнее.

При выполнении очередной итерации имеем множество $\mathscr{B}_\eta \in \mathscr{L}$. Рассматривая лишь векторы $p > 0$, удовлетворяющие системе (4.2), для всех участников $s \in S$ можно ввести величины

$$y_s = c_h^s / p_h, \quad (s, h) \in \mathscr{B}_\eta. \tag{5.1}$$

В результате неравенства, задающие множество $\Xi(\mathscr{B}_\eta)$, примут вид

$$y_i p_j \geqslant c_j^i, \quad i \in I, \ j \in J, \tag{5.2}$$

$$y_k p_j \leqslant c_j^k, \quad k \in K, \ j \in J. \tag{5.3}$$

Каждому из этих неравенств отвечает соответствующее неравенство вида $z_{sj} \geqslant 0$, $s \in I \cup K$. Образуются пары соответствующих друг другу неравенств:

$$y_i p_j \geqslant c_j^i \ \text{ и } \ z_{ij} \geqslant 0, \tag{5.4}$$

$$y_k p_j \leqslant c_j^k \ \text{ и } \ z_{kj} \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Эти пары неравенств будем называть *комплементарными*, а каждое неравенство пары — комплементарным по отношению к другому неравенству пары.

По множеству $\mathscr{B}_\eta$ сформируем группу *базовых* неравенств, включая в неё неравенства из (5.2)–(5.3) при $(s, j) \in \mathscr{B}_\eta$ или комплементарные к ним при $(s, j) \notin \mathscr{B}_\eta$. Таким образом, ровно одно неравенство из каждой комплементарной пары (5.4)–(5.5) попадает в число базовых. Будем говорить, что набор базовых неравенств, однозначно порождаемый множеством $\mathscr{B}_\eta$, обладает свойством комплементарности или является *комплементарным.*

При переходе от шага к шагу в определённой комплементарной паре базовое и небазовое неравенства меняются местами, комплементарность всего набора сохраняется. В этом и состоит упомянутая аналогия с процедурой известного алгоритма Лемке для задач линейной комплементарности.

Покажем, что процесс отыскания равновесия по предложенному алгоритму характеризуется определенной монотонностью. Рассмотрим очередную итерацию с множеством $\mathscr{B}_\eta$ и произвольный вектор $p > 0$, удовлетворяющий системе (4.2). Зафиксировав некоторый вектор $\lambda \geqslant 0$, получаем точку $w = (p, \lambda) \in R_+^{n+l}$. Этой точке поставим в соответствие точку $\zeta(w) \in R_+^l$, определяя ее координаты $\zeta_k(w)$ следующим образом:

$$\zeta_k(w) = y_k \lambda_k, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{5.6}$$

где y_k берутся из (5.1). Отметим, что если в качестве w принять точку $\bar{w}^\eta = (\bar{p}^\eta, \bar{\lambda}^\eta)$, полученную в результате решения системы (4.2)–(4.3) совместно с (3.7) и (1.14), то будем иметь $\zeta(\bar{w}^\eta) = \zeta$. В связи с этим, переобозначив исходную точку ζ через $\bar{\zeta}$, в результате получим $\bar{\zeta} = \zeta(\bar{w}^\eta)$.

При выполнении итерации рассматриваем точку $w(t) = (1-t)w^\eta + t\bar{w}^\eta$, $t \in [0,1]$, что порождает соответствующую точку $\zeta(w(t))$.

Лемма 5.1. *При увеличении t от 0 до 1 точка $\zeta(w(t))$ покомпонентно монотонно приближается к точке $\bar{\zeta}$.*

Доказательство. Из определения $\zeta_k(w)$ и (5.1) следует, что компонента $\zeta_k(w(t))$ задается дробно-линейной функцией параметра t:

$$\zeta_k(w(t)) = \frac{c_h^k}{p_h(t)}\lambda_k(t), \quad (k,h) \in \mathscr{B}_\eta, \tag{5.7}$$

где $\lambda_k(t)$, $p_h(t)$ — линейные функции. Так как знаменатель в этой формуле не обращается в ноль при $t \in [0,1]$, то $\zeta_k(w(t))$ — монотонная функция на $[0,1]$. Поскольку $\bar{\zeta} = \zeta(w(1))$, получаем утверждение леммы.

§ 6. Анализ сходимости

1. Продолжимость траекторий

Как уже отмечалось, на каждой итерации описанного метода в одной из комплементарных пар (5.4)–(5.5) базовое и небазовое неравенства меняются ролями. Покажем, что исключается тривиальное «пробуксовывание» процесса, когда начиная с некоторой итерации эти перемены происходят в одной и той же паре.

Пусть, например, на итерации с множеством $\mathscr{B}_\eta$ лимитирующим при определении величины t^* оказалось для определенности неравенство системы (3.8), отвечающее паре $(i_\circ, j_\circ) \in \mathscr{B}_\eta$, т. е. величина $z_{i_\circ j_\circ}^{\mathscr{B}_\eta}(p(t), \lambda(t))$ убывает и при $t = t^*$ равна нулю.

Поэтому $\mathscr{B}_{\eta+1} = \mathscr{B}_\eta \setminus \{(i_\circ, j_\circ)\}$, и неравенство $z_{i_\circ j_\circ} \geqslant 0$ переходит в разряд базовых, а неравенство $y_{i_\circ} p_{j_\circ} \geqslant c_{j_\circ}^{i_\circ}$ — в разряд небазовых. Это новое небазовое неравенство при $p_{j_\circ} = p_{j_\circ}^{\eta+1}$ и $y_{i_\circ} = \frac{c_h^{i_\circ}}{p_h^{\eta+1}}$, $(i_\circ, h) \in \mathscr{B}_\eta$, выполняется как равенство. Это означает, что если бы оно оказалось лимитирующим на шаге $(\eta+1)$, то на этом шаге мы имели бы $t^* = 0$ и $\mathscr{B}_{\eta+2} = \mathscr{B}_\eta$. Процесс зацикливается.

Речь идет о доказательстве следующего утверждения.

Лемма 6.1. *В течение процесса выполняется условие*

$$\mathscr{B}_{\eta+2} \neq \mathscr{B}_\eta.$$

Доказательство. Рассмотрим для определенности приведенную выше ситуацию, когда на шаге η лимитирующим оказалось неравенство

$z_{i_\circ j_\circ} \geqslant 0$ и $\mathscr{B}_{\eta+1} = \mathscr{B}_\eta \setminus \{(i_\circ, j_\circ)\}$. Как указывалось ранее, множество $\mathscr{B}_{\eta+1}$ обладает свойством представительности. Это означает, что в $\mathscr{B}_{\eta+1}$ должны быть иные пары вида $(i_\circ, j)$. Пусть такой является пара $(i_\circ, j_1)$. В этом случае на шаге $\eta+1$ мы имеем $y_{i_\circ} = c^{i_\circ}_{j_1}/p_{j_1}$, и неравенство системы (5.2), комплементарное неравенству $z_{i_\circ, j_\circ} \geqslant 0$, может быть записано в виде

$$\frac{c^{i_\circ}_{j_1}}{p_{j_1}} p_{j_\circ} \geqslant c^{i_\circ}_{j_\circ},$$

или

$$\frac{p_{j_\circ}}{c^{i_\circ}_{j_\circ}} \geqslant \frac{p_{j_1}}{c^{i_\circ}_{j_1}}. \tag{6.1}$$

Оно выполняется как равенство при $p = p^\eta$, $p = \bar{p}^\eta$ и $p = p^{\eta+1}$. Для доказательства требуемого утверждения нужно показать, что (6.1) выполняется и при $p = \bar{p}^{\eta+1}$. Это будет означать, что (6.1) выполняется при любом $t \geqslant 0$ для $p(t) = p^{\eta+1} + t(\bar{p}^{\eta+1} - p^{\eta+1})$, а значит, не может оказаться лимитирующим при определении величины t^*.

Пусть число компонент связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$ равно τ. Следовательно, число таких компонент графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$ равно $\tau+1$. Пусть в ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$ лежат вершины $i \in I^\eta_\nu$, $k \in K^\eta_\nu$ и $(m+l+j)$ при $j \in J^\eta_\nu$. Аналогичные множества для компонент связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$ будем обозначать соответственно $I^{\eta+1}_\nu$, $K^{\eta+1}_\nu$, $J^{\eta+1}_\nu$. Пусть $i_\circ \in I^\eta_\tau$, $j_\circ \in J^\eta_\tau$, т. е. при удалении $(i_\circ, j_\circ)$ из $\mathscr{B}_\eta$ последняя компонента связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$ распадается на две. Пусть $i_\circ \in I^{\eta+1}_\tau$, $j_1 \in J^{\eta+1}_\tau$ и $j_\circ \in J^{\eta+1}_{\tau+1}$.

Тот факт, что лимитирующим при определении t^* на шаге η оказалось неравенство $z_{i_\circ j_\circ} \geqslant 0$, означает, что

$$z^{\mathscr{B}^\eta}_{i_\circ j_\circ}(\bar{p}^\eta, \bar{\lambda}^\eta) < 0. \tag{6.2}$$

Ввиду условия баланса (3.8) для компоненты τ графа $\Gamma(\mathscr{B}_\eta)$ это неравенство эквивалентно двум неравенствам

$$\sum_{i \in I^{\eta+1}_\tau} (\alpha_i + (\theta^i, \bar{\lambda}^\eta)) - \sum_{k \in K^{\eta+1}_\tau} \bar{\lambda}^\eta_k - \sum_{j \in J^{\eta+1}_\tau} \bar{p}^\eta_j < 0, \tag{6.3}$$

$$\sum_{i \in I^{\eta+1}_{\tau+1}} (\alpha_i + (\theta^i, \bar{\lambda}^\eta)) - \sum_{k \in K^{\eta+1}_{\tau+1}} \bar{\lambda}^\eta_k - \sum_{j \in J^{\eta+1}_{\tau+1}} \bar{p}^\eta_j > 0. \tag{6.4}$$

В то же время для остальных компонент связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$ условие баланса будет выполняться, т. е.

$$\sum_{i \in I^{\eta+1}_\nu} (\alpha_i + (\theta^i, \bar{\lambda}^\eta)) - \sum_{k \in K^{\eta+1}_\nu} \bar{\lambda}^\eta_k - \sum_{j \in J^{\eta+1}_\nu} \bar{p}^\eta_j = 0 \quad \nu = 1, \ldots, \tau-1. \tag{6.5}$$

Таким образом, при подстановке величин $p_j = \bar{p}_j^\eta$ и $\lambda_k = \bar{\lambda}_k^\eta$ в систему условий баланса вида (3.7), отвечающую графу $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$, получаем нарушение этих условий лишь для двух компонент связности с номерами τ и $\tau+1$, что выражается неравенствами (6.3) и (6.4).

С другой стороны, система условий баланса вида (3.7) для графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$ служит для определения величин $\bar{p}_j^{\eta+1}$ и $\bar{\lambda}_k^{\eta+1}$. Путем введения вспомогательных переменных π_ν, как было показано выше, этот вопрос сводится к рассмотрению однородной системы вида (4.11) порядка $\tau+1$. При этом в формулах (4.5) и (4.6) в качестве величин $\hat{p}_j$ и $\hat{\lambda}_k$, задающих пропорции между величинами p_j и λ_k, которые соответствуют вершинам одной и той же ν-й компоненте связности графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$, могут быть приняты соответственно $\bar{p}_j^\eta$ и $\bar{\lambda}_k^\eta$, т. е. при всех $\nu = 1, \ldots, \tau+1$ выполняются равенства

$$p_j = \pi_\nu \bar{p}_j^\eta, \quad j \in J_\nu, \tag{6.6}$$

$$\lambda_k = \pi_\nu \bar{\lambda}_k^\eta, \quad k \in K_\nu. \tag{6.7}$$

Пусть $\tilde{\pi}^{\eta+1} = (\tilde{\pi}_1^{\eta+1}, \ldots, \tilde{\pi}_{\tau+1}^{\eta+1})$ — положительное решение возникающей таким образом системы вида (4.13). Не ограничивая общности считаем, что выполняется условие нормировки (1.14) и тем самым

$$\bar{p}_j^{\eta+1} = \tilde{\pi}_\nu^{\eta+1} \bar{p}_j^\eta, \quad j \in J_\nu, \tag{6.8}$$

$$\bar{\lambda}_k^{\eta+1} = \tilde{\pi}_\nu^{\eta+1} \bar{\lambda}_k^\eta, \quad k \in K_\nu. \tag{6.9}$$

Таким образом, можно сказать, что если в формулах (6.6) и (6.7) принять $\pi = \tilde{\pi}_\nu^{\eta+1}$, то получающиеся p_j и λ_k удовлетворяют всем условиям баланса для компонент графа $\Gamma(\mathscr{B}_{\eta+1})$. Если же принять $\pi_\nu = 1$ ($\nu = 1, \ldots, \tau+1$), то получим $p_j = \bar{p}_j^\eta$ и $\lambda_k = \bar{\lambda}_k^\eta$, для которых ввиду (6.3) и (6.4) два условия баланса будут нарушаться — для компонент с номерами τ и $\tau+1$. Это означает, что в системе (4.13) для вектора $\pi' = (1, \ldots, 1) \in R^{\tau+1}$ нарушаются лишь два условия. Тем самым мы находимся в условиях следующего утверждения.

Лемма 6.2. *Пусть $A \geqslant 0$ — неразложимая матрица, x — ее положительный собственный вектор, λ — соответствующее ему собственное число. Если для некоторого положительного вектора x' вектор $g = \lambda x' - Ax'$ имеет не более двух отличных от нуля компонент, т. е. $\lambda x' - Ax' = g_{i_1} e_{i_1} + g_{i_2} e_{i_2}$, то условия*

$$g_{i_1} \geqslant 0$$

и

$$\frac{x'_{i_1}}{x_{i_1}} \geqslant \frac{x'_{i_2}}{x_{i_2}}$$

эквивалентны.

Доказательство этой леммы приведено в [3].

В наших рассмотрениях $\lambda = 1$, роль матрицы A играет матрица $\widetilde{G}$, а в качестве x и x' выступают соответственно векторы $\tilde{\pi}^{\eta+1}$ и $\tilde{\pi}'$. Для вектора $g = \tilde{\pi}' - \widetilde{G}\tilde{\pi}'$ из (6.3) и (6.4) очевидным образом следует, что $g_\tau > 0$ и $g_{\tau+1} < 0$. Тогда по лемме 6.2 получаем

$$\frac{1}{\tilde{\pi}_\tau^{\eta+1}} \geqslant \frac{1}{\tilde{\pi}_{\tau+1}^{\eta+1}},$$

т. е.

$$\frac{\tilde{\pi}_{\tau+1}^{\eta+1}}{\tilde{\pi}_\tau^{\eta+1}} \geqslant 1.$$

Далее из (6.9) с учетом $j_\circ \in J_{\tau+1}^{\eta+1}$, $j_1 \in J_\tau^{\eta+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \bar{p}_{j_1}^{\eta+1} &= \tilde{\pi}_\tau^{\eta+1}\bar{p}_{j_1}^{\eta}, \\ \bar{p}_{j_\circ}^{\eta+1} &= \tilde{\pi}_{\tau+1}^{\eta+1}\bar{p}_{j_\circ}^{\eta}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\bar{p}_{j_\circ}^{\eta+1}}{\bar{p}_{j_1}^{\eta+1}} = \frac{\tilde{\pi}_{\tau+1}^{\eta+1}}{\tilde{\pi}_\tau^{\eta+1}} \cdot \frac{\bar{p}_{j_\circ}^{\eta}}{\bar{p}_{j_1}^{\eta}} \geqslant \frac{\bar{p}_{j_\circ}^{\eta}}{\bar{p}_{j_1}^{\eta}}. \tag{6.10}$$

Но при $p = \bar{p}^\eta$, как отмечалось, неравенство (6.1) выполняется как равенство, т. е.

$$\frac{\bar{p}_{j_\circ}^{\eta}}{\bar{p}_{j_1}^{\eta}} = \frac{c_{j_\circ}^{i_\circ}}{c_{j_1}^{i_\circ}}.$$

В результате из (6.10) следует, что

$$\frac{\bar{p}_{j_\circ}^{\eta+1}}{\bar{p}_{j_1}^{\eta+1}} \geqslant \frac{c_{j_\circ}^{i_\circ}}{c_{j_1}^{i_\circ}}.$$

Это означает выполнение неравенства (6.1) при $p = \bar{p}^{\eta+1}$, что, как отмечалось выше, достаточно для справедливости утверждения леммы 6.1 в рассматриваемом случае.

Мы рассмотрели ситуацию, когда при определении величины сдвига t^* на шаге η лимитирующим оказалось неравенство $z_{i_\circ j_\circ} \geqslant 0$. Остается заметить, что анализ других ситуаций, когда лимитирующим оказывается какое-то из неравенств $z_{kj} \geqslant 0$, $k \in K$, или какое-то из неравенств системы (3.4)–(3.5) при $q = p(t)$, вполне аналогичен приведенному. Лемма 6.1 доказана.

2. Почти сбалансированные траектории

При изменении параметра $t \in [0, 1]$ на очередном шаге процесса точка $\zeta(w(t))$, координаты которой определяются в соответствии с (5.7),

пробегает в R^l некоторый, вообще говоря, криволинейный отрезок, соединяющий точки ζ^η и $\zeta^{\eta+1}$. Объединяя все такие криволинейные отрезки, получаем описание всей траектории процесса. Эта траектория обладает следующим свойством: если какие-то координаты точки ζ^η уже совпадают с соответствующими координатами заданной точки $\bar{\zeta}$, то это совпадение сохраняется и для последующей части траектории.

В самом деле, пусть точка ζ^η лежит в аффинном многообразии $H \subset R^l$, задаваемом системой уравнений

$$z_k = \bar{\zeta}_k, \quad k = 1, \dots, \rho. \tag{6.11}$$

Зафиксировав для каждого $k = 1, \dots, \rho$ такой номер j, что $(k, j) \in \mathscr{B}_\eta$, из (5.6) и (5.1) имеем

$$\begin{aligned} p_j^\eta \bar{\zeta}_k &= c_j^k \lambda_k^\eta, \\ \bar{p}_j \bar{\zeta}_k &= c_j^k \bar{\lambda}_k^\eta. \end{aligned}$$

Умножив первое из этих равенств на $1 - t$, а второе на t и сложив, получаем

$$p_k(t)\bar{\zeta}_k = c_j^k \lambda_k(t),$$

т. е.

$$\zeta_k(w(t)) = \bar{\zeta}_k, \quad k = 1, \dots, \rho.$$

Это означает, что точка $\zeta(w(t))$, как и точка ζ^η, принадлежит аффинному многообразию H. Следовательно, это свойство будет сохраняться и на всех последующих шагах процесса, поэтому будем иметь $\zeta^{\eta+1} \in H$, а значит, $\zeta^{\eta+2} \in H$ и т. д.

Описанное свойство будем называть *частичной сбалансированностью.* Если при этом $\rho = l - 1$, то будем говорить о *почти сбалансированных* траекториях. В этом случае аффинное многообразие H является прямой, проходящей через точку $\bar{\zeta}$.

Рассмотрим часть этой прямой, лежащую внутри R^l_+, т. е. луч $\widetilde{H}$:

$$\widetilde{H} = \{z \in R^l \mid z_l > 0;\ z_k = \bar{\zeta}_k,\ k = 1, \dots, l - 1\}.$$

Из § 4 следует, что прообразом луча $\widetilde{H}$ при отображении $\Phi^{\mathscr{B}}$, описываемом формулой (3.9), будет снова луч, который обозначим через $L^{\mathscr{B}}$. Этот луч проходит через точку $\bar{\lambda} = (\Phi^{\mathscr{B}})^{-1}(\bar{\zeta})$. При $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\eta$ частью такого луча является отрезок $[\lambda^\eta, \bar{\lambda}^\eta]$.

Предположение невырожденности.

Для любых $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$ и $\lambda \in L^{\mathscr{B}}$ среди неравенств, задающих многогранник $\Lambda(\mathscr{B})$, лишь одно обращается в равенство в точке λ. Это

означает, что для любого $\mathscr{B} \in \mathscr{L}$ точки пересечения луча $L^{\mathscr{B}}$ с многогранником $\Lambda(\mathscr{B})$ не могут лежать в гранях размерности меньше $l-1$.

Теорема. *При выполнении предположения невырожденности движение по почти сбалансированной траектории заканчивается через конечное число шагов в точке $\bar{\zeta}$ (это соответствует получению равновесия в исходной модели).*

Доказательство. Предположение невырожденности обеспечивает на каждом шаге процесса η единственность лимитирующего неравенства среди неравенств (3.8) и (3.4)–(3.5), порождаемых множеством $\mathscr{B} = \mathscr{B}_\eta$, при подстановке в них $p = p(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $q = p(t)$ и отыскании максимального $t = t^* \in [0,1]$. Как следует из доказательства леммы 6.1, это лимитирующее неравенство не является таковым при выполнении следующего шага, т. е. при переходе к множеству $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\eta+1}$. Вследствие этого величина сдвига t^* на всех шагах строго положительна, кроме разве лишь начального. Это означает, что каждая следующая точка $\zeta(w^\varrho)$ будет заведомо ближе к точке $\bar{\zeta}$, чем предыдущая (лемма 5.1). С другой стороны, точка $\zeta(w^{\eta+1})$ — ближайшая к $\bar{\zeta}$ среди точек множества $\widetilde{H} \cap \Phi(\Lambda(\mathscr{B}_\eta))$, являющегося отрезком, как образ отрезка $L^{\mathscr{B}_\eta} \cap \Lambda(\mathscr{B}_\eta)$ при непрерывном отображении Φ. Тем самым уже пройденное множество $\mathscr{B}_\eta$ снова повториться не может. Ввиду конечности числа множеств в совокупности $\mathscr{L}$ процесс конечен. Это возможно лишь тогда, когда на очередном шаге окажется $t^* = 1$, т. е. будет достигнута точка $\bar{\zeta}$, а значит, получено равновесие в исходной модели. Теорема доказана.

3. Алгоритм наращивания размерности

Практическое применение описанного процесса можно осуществить по следующей схеме последовательного увеличения числа учитываемых в модели фирм.

Пусть рассмотрена модель, в которой присутствуют фирмы с номерами $k = 1, \ldots, \rho - 1$ и получены множество $\mathscr{B}'$ и точка $w' = (p', \lambda') = \bar{w}(\mathscr{B}')$ в обозначениях § 4, соответствующие её равновесному состоянию, т. е. p' — равновесный вектор цен, а $\lambda' \in R_+^{\rho-1}$ — вектор, компоненты которого указывают доходы рассматриваемых фирм в равновесном состоянии.

Рассматриваемую модель пополним очередной фирмой с номером $k = \rho$. При ценах $p = p'$ для этой фирмы предпочтительными для производства будут такие товары j, что

$$\frac{c_j^\rho}{p_j'} = \min_h \frac{c_h^\rho}{p_h'}.$$

Множество $\mathscr{B}'$ пополним всеми парами (ρ, j), соответствующими этим предпочтительным товарам j. В результате получим множество $\widetilde{\mathscr{B}}'$ для пополненной модели. В предположении двойственной невырожденности транспортной задачи (2.4)–(2.8) в графе $\Gamma(\widetilde{\mathscr{B}}')$ не будет циклов и, как легко убедиться, множество $\widetilde{\mathscr{B}}'$ будет принадлежать совокупности $\mathscr{L}$ для пополненной модели.

Наконец, добавив к вектору λ' компоненту $\lambda'_\rho = 0$, получим вектор $\tilde{\lambda}' \in R^\rho_+$.

Ясно, что $\tilde{w}' = (p', \tilde{\lambda}') \in \Omega(\widetilde{\mathscr{B}}')$, $p' \in \Xi(\widetilde{\mathscr{B}}')$ для новой модели. При этом будет выполняться свойство почти сбалансированности. Отправляясь от $\tilde{w}'$ и $\widetilde{\mathscr{B}}'$, можно начать процедуру отыскания равновесия в пополненной модели в соответствии с § 4.

Изложенный алгоритм наращивания числа фирм модели закончится при $\rho = l$ получением равновесия в исходной модели. Этот процесс можно начать от $\rho = 0$, т. е. с рассмотрения модели обмена без производства. Это обычная линейная модель обмена с фиксированными бюджетами, и для отыскания её равновесного состояния можно воспользоваться конечными алгоритмами, предложенными в [2, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.

2. **Шмырёв В. И.** Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 31(48). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. С. 137–155.

3. **Шмырёв В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 163–175.

4. **Шмырёв В. И.** Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 44(61). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. С. 82–95.

5. **Шмырёв В. И.** Об одной экономической модели производства — обмена типа Эрроу — Дебре // Оптимизация: Сб. науч. тр. Вып. 46(63). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 68–95.

6. **Шмырёв В. И., Шмырёва Н. В.** Итеративный алгоритм нахождения равновесия в линейной модели обмена // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1994. С. 130–146 (Тр./ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 28).

7. **Lemke C. E.** A survey of complementarity theory // Variational inequalities and complementarity problems. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 1980. P. 213–239.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: shvi@math.nsc.ru

Статья поступила
10 января 2003 г.