ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2003. Серия 2. Том 10, № 2, 3–18

УДК 519.10

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ («ОТ ПАРЕТО ДО СЛЕЙТЕРА») И УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ*)

С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев

Рассматривается n-критериальная линейная комбинаторная задача оптимизации, в которой принцип оптимальности задается с помощью целочисленного параметра s, изменяющегося в пределах от 1 до n. При этом крайним значениям этого параметра соответствуют паретовский и слейтеровский принципы оптимальности. Исследуется тот тип устойчивости задачи к независимым возмущениям входных данных, при котором не появляются новые эффективные решения. Для каждого значения параметра s найдена формула радиуса устойчивости задачи, а также указаны необходимые и достаточные условия устойчивости.

1. Введение

Признание проблемы устойчивости одной из центральной в математических исследованиях восходит к Ж. Адамару, который включил устойчивость в определение корректной (т. е. разумно поставленной) задачи наряду с требованием существования и единственности решения. Необходимость исследования устойчивости задач оптимизации к возмущениям некоторых их параметров вызвана целым рядом факторов, таких как неточность исходных данных, неадекватность моделей реальным процессам, погрешность численных методов, ошибки округления, потребность в разработке алгоритмов для решения «близких» задач и т. д. Как показывает накопленный опыт, нельзя корректно поставить

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского государственного университета в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29».

и правильно решить произвольную оптимизационную задачу без исследования ее на устойчивость. При этом под устойчивостью задачи оптимизации чаще всего понимается одно из классических свойств непрерывности или полунепрерывности (например, по Хаусдорфу или Бержу) точечно-множественного (многозначного) отображения, характеризующего зависимость множества искомых решений от параметров задачи (см., например, [2, 24]). Для дискретных задач оптимизации такое определение устойчивости легко может быть переформулировано в терминах «шара устойчивости», т. е. такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что любая «возмущенная» задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым свойством инвариантности по отношению к исходной задаче. Например, полунепрерывность сверху в смысле Хаусдорфа оптимального отображения в задачах дискретной оптимизации превращается в свойство непоявления новых оптимальных решений при любых изменениях ее параметров в пределах «малой» окрестности исходных данных. Тем самым выявление подобного свойства приводит к постановкам на стыке непрерывной и дискретной оптимизации. Результаты, связанные с исследованием проблемы устойчивости и параметрического анализа скалярных и векторных дискретных задач оптимизации, обобщены и изложены в монографии И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкой и Т. Т. Лебедевой [24], а также в обзоре [18].

В основу другого, предложенного В. К. Леонтьевым дескриптивного подхода при изучении устойчивости скалярных комбинаторных задач оптимизации, положено понятие радиуса «максимального» шара устойчивости, т. е. предел изменений входных параметров задачи, не приводящих к появлению новых оптимальных решений по сравнению с оптимальными решениями исходной задачи. Сначала этот подход был применен к задаче коммивояжера в работе [19], в которой найдено аналитическое выражение для радиуса устойчивости в пространстве параметров с метрикой l_∞. Все последующие результаты, полученные в этом направлении, в основном связаны с расширением сферы применения указанного подхода на другие задачи дискретной оптимизации, а также обобщению полученных в скалярном случае формул на векторные задачи с различными принципами оптимальности. Перечислим лишь некоторые из этих обобщений.

Уже в следующей работе [20] было показано, что техника, разработанная в [19] для задачи коммивояжера, позволяет найти формулу радиуса устойчивости линейной траекторной задачи, в схему которой вкладываются практически все линейные задачи комбинаторной оптимизации на графах, задачи булева программирования и ряд задач теории расписаний (см., например, [27, 28]). Исследование устойчивости многих известных скалярных задач указанного вида как с линейными, так и с минимаксными функционалами при различных оценках возмущений (типах норм) в пространстве параметров содержится в [1, 3, 5–8, 21].

Дескриптивный подход оказался эффективным средством и при нахождении количественной меры различных типов устойчивости n-критериальных (векторных) задач дискретной оптимизации с разнообразными принципами оптимальности. В частности, были найдены формулы радиуса устойчивости векторных линейных траекторных задач поиска множества Парето (множества эффективных траекторий) [11], множеств Слейтера и Смейла (соответственно - слабо и строго эффективных траекторий) [23], лексикографического множества [3, 9], а также формулы радиусов устойчивости различных типов эффективных решений разнообразных векторных задач дискретной оптимизации [10, 12, 13, 16, 26]. Дальнейшее обобщение полученных формул стало возможным благодаря предложенному в [14] двухпараметрическому семейству n^2 принципов оптимальности в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$, содержащему такие известные принципы, как паретовский, слейтеровский, мажоритарный и др. Параметризация принципа оптимальности позволяет с единых позиций проводить анализ устойчивости различных по природе задач. Например, в работе [17] найдена формула радиуса устойчивости обобщенно эффективного решения n-критериальной линейной траекторной задачи, принцип оптимальности которой задается целочисленным параметром, изменяющимся в пределах от 1 до $n-1$. При этом крайним значениям параметра соответствуют мажоритарный и паретовский принципы оптимальности.

В настоящей статье путем параметризации принципа оптимальности «от Парето до Слейтера» удалось получить единую формулу радиуса устойчивости всех n типов возникающих при этом n-критериальных траекторных задач (см. раздел 5). В виде следствий в разделе 6 приведен ряд результатов по устойчивости качественного характера.

В русле этого нового направления лежит статья [4], в которой рассматриваются векторные задачи в теоретико-игровой постановке, для которых введено параметрическое семейство принципов оптимальности, содержащее как паретовский принцип, так и принцип, характеризующий равновесие по Нэшу [22]. Тем самым, в данном контексте под параметризацией принципа оптимальности понимается введение такой характеристики предпочтения, которая компенсирует дефект большого шага «от Парето до Нэша». Это позволило в [4] провести анализ устойчивости обобщенно эффективной ситуации в конечной коалиционной игре нескольких лиц и установить предельные уровни независимых возмущений параметров функций выигрыша игроков, сохраняющих указанную эффективность ситуации. В качестве следствий указаны формулы радиуса устойчивости ситуации, оптимальной по Парето, и ситуации, равновесной по Нэшу.

2. Постановка задачи и определения

Будем рассматривать n-критериальный вариант известной траекторной задачи [1, 5–8, 11, 20, 21, 23, 27, 28]: найти

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n)) \to \min_{t \in T}$$

с частными критериями вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \qquad i \in N_n,$$

где множество траекторий $T \subseteq 2^E$, $|T| \geqslant 2$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \geqslant 2$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geqslant 1$, $N(t) = \{j \in N_n : e_j \in t\}$, A_i — i-я строка матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$. Будем полагать, что $f_i(\emptyset, A_i) = 0$.

Характерной особенностью векторной оптимизации является существование различных принципов оптимальности (иначе, функций выбора), которые, в частности, могут быть заданы с помощью бинарных отношений предпочтения.

Семейство n принципов оптимальности зададим введением на множестве траекторий T бинарного отношения строгого предпочтения $\Omega_s^n(A)$, $s \in N_n$, согласно формуле

$$t\ \Omega_s^n(A)\ t' \Leftrightarrow [t, t', A]^+ > (s-1)[t, t', A]^0 + (n-1)[t, t', A]^-,$$

где

$$[t, t', A]^+ = |\{i \in N_n \mid g_i(t, t', A_i) > 0\}|,$$
$$[t, t', A]^0 = |\{i \in N_n \mid g_i(t, t', A_i) = 0\}|,$$
$$[t, t', A]^- = |\{i \in N_n \mid g_i(t, t', A_i) < 0\}|,$$
$$g_i(t, t', A_i) = f_i(t, A_i) - f_i(t', A_i).$$

Это бинарное отношение порождает множество $T_s^n(A)$ *s-эффективных траекторий*, которое зададим следующим способом :

$$T_s^n(A) = \{t \in T \mid T_s^n(t, A) = \emptyset\},$$

где $T_s^n(t, A) = \{t' \in T \mid t\ \Omega_s^n(A)\ t'\}$.

Легко видеть, что множество $T_1^n(A)$ 1-эффективных траекторий совпадает с *множеством Парето*

$$P^n(A) = \{t \in T \mid U^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$U^n(t, A) = \{t' \in T \mid f(t, A) > f(t', A)\},$$

или иначе

$$U^n(t, A) = T_1^n(t, A) = \{t' \in T \mid [t, t', A]^+ > 0\ \&\ [t, t', A]^- = 0\}.$$

Хорошо известно, что множество Парето не пусто, если множество векторных оценок конечно (как в нашем случае).

Очевидно, что множество $T_n^n(A)$ n-эффективных траекторий является *множеством Слейтера* (множеством слабо эффективных траекторий)

$$S^n(A) = \{t \in T \mid V^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$V^n(t, A) = \{t' \in T \mid \forall i \in N_n\ (f_i(t, A) > f_i(t', A))\},$$

или иначе $V^n(t, A) = T_n^n(t, A) = \{t' \in T \mid [t, t', A]^+ = n\}$.

Отметим, что введенная здесь параметризация принципа оптимальности «от Парето до Слейтера» является частным случаем предложенного в [14] двухпараметрического семейства n^2 принципов оптимальности в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Векторную задачу поиска множества $T_s^n(A)$ s-эффективных траекторий будем обозначать через $Z_s^n(A)$. В дальнейшем запись

$$t\ \Omega_s^n(A)\ t'$$

будем интерпретировать как утверждение о том, что траектория t' *доминирует* траекторию t в задаче $Z_s^n(A)$. В этом случае траектория t является s-эффективной тогда и только тогда, когда в множестве T не существует траекторий, которые доминируют траекторию t в $Z_s^n(A)$.

Ясно, что $T_1^1(A)$ — множество оптимальных траекторий обычной (скалярной) линейной траекторной задачи.

Как обычно [11, 15, 24, 25], под устойчивостью задачи $Z_s^n(A)$ будем понимать дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху (по Хаусдорфу) в точке $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ оптимального отображения T_s^n:

$\mathbf{R}^{n\times m} \to 2^T$, т. е. точечно-множественного отображения, которое параметрам задачи ставит в соответствие множество s-эффективных траекторий.

Теперь дадим строгое определение понятия устойчивости задачи $Z_s^n(A)$. Для этого в пространстве $\mathbf{R}^{n\times m}$ возмущающих параметров задачи зададим чебышевскую норму (l_∞), т. е. под нормой матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ будем понимать число

$$||B|| = \max\{|b_{ij}| \mid (i,j) \in N_n \times N_m\}.$$

Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим *множество возмущающих матриц*

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n\times m} \mid ||B|| < \varepsilon\}.$$

Итак, с учетом сказанного задачу $Z_s^n(A)$ называем *устойчивой*, если существует такое положительное число $\varepsilon > 0$, что для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ справедливо включение

$$T_s^n(A) \supseteq T_s^n(A+B).$$

Таким образом, задача $Z_s^n(A)$ устойчива лишь в том случае, когда при «малых» независимых возмущениях элементов матрицы A не появляются новые s-эффективные траектории, хотя некоторые s-эффективные траектории исходной задачи могут исчезать.

По аналогии с [11, 15, 19, 25] *радиусом устойчивости* задачи $Z_s^n(A)$, $s \in N_n$, назовем число

$$\rho_s^n(A) = \begin{cases} \sup Q(A), & \text{если } Q(A) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } Q(A) = \emptyset, \end{cases}$$

где $Q(A) = \{\varepsilon > 0 \mid \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ (T_s^n(A) \supseteq T_s^n(A+B))\}$.

Поэтому задача $Z_s^n(A)$ устойчива тогда и только тогда, когда $\rho_s^n(A) > 0$. Понятно, что в случае, когда $T_s^n(A) = T$, задача $Z_s^n(A)$ устойчива и ее радиус устойчивости бесконечен. Такую задачу будем называть *тривиальной*. Задачу $Z_s^n(A)$ назовем *нетривиальной*, если $\overline{T_s^n}(A) = T \backslash T_s^n(A) \neq \emptyset$, а задачу $Z_s^n(A+B)$, где $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, — *возмущенной*.

3. Свойства

В дальнейшем для доказательства утверждений нам понадобятся следующие очевидные свойства, вытекающие из приведенных выше определений.

A1. Для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ верны включения

$$\emptyset \neq T_1^n(A) \subseteq T_2^n(A) \subseteq \cdots \subseteq T_n^n(A).$$

A2. При любых целых s и k таких, что $1 \leqslant s < k \leqslant n$, для любой матрицы $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$ справедливо утверждение: если $t\ \Omega_k^n(A)\ t'$, то $t\ \Omega_s^n(A)\ t'$.

A3. Для любых траекторий $t \in \overline{T_n^n}(A)$ и $t' \in T_n^n(t, A)$ справедливо равенство $[t, t', A]^+ = n$.

A4. $[t, t', A]^+ = n$ тогда и только тогда, когда

$$t\ \Omega_n^n(A)\ t'.$$

Все приведенные ниже очевидные свойства справедливы при любом $s \in N_n$.

A5. $t\ \Omega_s^n(A)\ t'$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения:

$$[t, t', A]^+ > (s-1)[t, t', A]^0, \quad [t, t', A]^- = 0.$$

A6. Если $[t, t', A]^- > 0$, то $t\ \overline{\Omega_s^n}(A)\ t'$.

Здесь и далее запись $t\ \overline{\Omega_s^n}(A)\ t'$ означает, что в задаче $Z_s^n(A)$ траектория t' не доминирует траекторию t.

A7. Траектория $t \in T_s^n(A)$ тогда и только тогда, когда для всякой траектории $t' \in T$ выполняется соотношение

$$t\ \overline{\Omega_s^n}(A)\ t'.$$

A8. Траектория $t' \in T \backslash T_s^n(t, A)$ тогда и только тогда, когда $t\ \overline{\Omega_s^n}(A)\ t'$.

A9. Если $t \in \overline{T_s^n}(A)$ и $t' \in T_s^n(t, A)$, то $[t, t', A]^- = 0$.

Кроме того, нетрудно доказать (см. [14]), что при любом $s \in N_n$ бинарное отношение Ω_s^n антирефлексивно, асимметрично, транзитивно и поэтому ациклично. Отсюда с учетом конечности множества T следует непустота любого множества $T_s^n(A),\ s \in N_n$.

4. Леммы

Для траекторий $t, t' \in T$ положим

$$\Delta(t, t') = |(t \cup t') \backslash (t \cap t')|.$$

Очевидно, что $\Delta(t, t') \geqslant 1$ при $t \neq t'$.

Лемма 1. *Если различные траектории $t, t' \in T$ и матрица $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ таковы, что*

$$g_i(t, t', A_i) > ||B_i||\Delta(t, t'), \quad i \in N_n, \tag{1}$$

то при любом $s \in N_n$ справедливо соотношение

$$t\ \Omega_s^n(A+B)\ t'.$$

Доказательство. Поскольку при любом $i \in N_n$ справедливо неравенство

$$g_i(t,t',B_i) \geqslant -||B_i||\Delta(t,t'),$$

с учетом (1) и линейности частных критериев получаем

$$g_i(t,t',A_i+B_i) = g_i(t,t',A_i) + g_i(t,t',B_i) \geqslant g_i(t,t',A_i) - ||B_i||\Delta(t,t') > 0.$$

Это означает, что $[t,t',A+B]^+ = n$. Следовательно, согласно свойствам A2 и A4 получаем, что траектория t' доминирует траекторию t в задаче $Z_s^n(A+B)$ при любом $s \in N_n$. Лемма 1 доказана.

Пусть $0 < \alpha < \varepsilon, \quad t,t' \in T,\ t \neq t'$. В дальнейшем будем использовать возмущающую матрицу $B^* = (b_{ij}^*) \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ размера $n \times m$ такую, что при любом $i \in N_n$

$$b_{ij}^* = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } j \in N(t \backslash t'), \\ \alpha, & \text{если } j \in N(t' \backslash t), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, матрица B^* зависит от траекторий t,t', где $t \neq t'$, и числа $\alpha > 0$, а норма $||B^*|| = \alpha$.

Лемма 2. *Пусть $t,t' \in T,\ t \neq t',\ s \in N_n$ и $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$. Если*

$$t\ \overline{\Omega_s^n}(A)\ t',$$

то

$$t\ \overline{\Omega_s^n}(A+B^*)\ t'.$$

Доказательство. По условию леммы справедливо неравенство

$$[t,t',A]^+ \leqslant (s-1)[t,t',A]^0 + (n-1)[t,t',A]^-,$$

которое эквивалентно соотношению

$$s[t,t',A]^+ \leqslant (n-s)[t,t',A]^- + n(s-1). \tag{3}$$

Далее с учетом строения возмущающей матрицы B^* при любом $i \in N_n$ верны соотношения

$$g_i(t,t',A_i) = \sum_{j \in N(t\backslash t')} a_{ij} - \sum_{j \in N(t' \backslash t)} a_{ij} > \sum_{j \in N(t\backslash t')} (a_{ij}-\alpha) - \sum_{j \in N(t'\backslash t)} (a_{ij}+\alpha)$$
$$= f_i(t,A_i+B_i^*) - f_i(t',A_i+B_i^*) = g_i(t,t',A_i+B_i^*),$$

которые дают

$$[t,t',A]^+ \geqslant [t,t',A+B^*]^+, \quad [t,t',A]^- \leqslant [t,t',A+B^*]^-.$$

Отсюда и из (3) получаем

$$s[t,t',A+B^*]^+ \leqslant (n-s)[t,t',A+B^*]^- + n(s-1),$$

что эквивалентно утверждению леммы 2.

5. Теорема

Теорема. *При любых $s \in N_n$ и $n \geqslant 1$ радиус устойчивости $\rho_s^n(A)$ векторной нетривиальной траекторной задачи $Z_s^n(A)$ имеет вид:*

$$\rho_s^n(A) = \min_{t \in \overline{T_s^n}(A)} \max_{t' \in T_s^n(t,A)} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t,t',A_i)}{\Delta(t,t')}. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через φ правую часть из (4). Учитывая непустоту множества $\overline{T_s^n}(A)$ и то, что для любой траектории $t \in \overline{T_s^n}(A)$ множество $T_s^n(t,A)$ также непусто, из свойства A9 следует (ввиду $\Delta(t,t') > 0$), что число φ существует и не отрицательно.

Теперь убедимся в справедливости неравенства

$$\rho_s^n(A) \geqslant \varphi. \tag{5}$$

Будем полагать, что число φ положительно (в случае, когда $\varphi = 0$, неравенство (5) очевидно). Пусть матрица $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Тогда согласно определению числа φ для любой траектории $t \in \overline{T_s^n}(A)$ существует такая траектория $t' \in T_s^n(t,A)$, что при любом $i \in N_n$ справедливы неравенства

$$g_i(t,t',A_i) \geqslant \varphi\Delta(t,t') > ||B||\Delta(t,t').$$

Отсюда и из леммы 1 получаем

$$t\ \Omega_s^n(A+B)\ t'.$$

Из сказанного следует справедливость утверждения:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\varphi) \quad \forall t \in \overline{T_s^n}(A) \quad \exists t' \in T_s^n(t,A) \quad (t\ \Omega_s^n(A+B)\ t'),$$

т. е. t не является s-эффективной траекторией в любой возмущенной задаче $Z_s^n(A+B)$, где $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Это значит, что для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливо включение

$$T_s^n(A+B) \subseteq T_s^n(A).$$

Следовательно, верно неравенство (5).

Наконец, докажем неравенство

$$\rho_s^n(A) \leqslant \varphi, \tag{6}$$

где, как уже установлено, $\varphi \geqslant 0$.

Пусть $\varphi < \alpha < \varepsilon$. Тогда согласно определению числа φ существует такая траектория $t \in \overline{T_s^n}(A)$, что для любой траектории $t' \in T_s^n(t, A)$ найдется такое $k \in N_n$, что выполняются неравенства

$$g_k(t, t', A_k) \leqslant \varphi\Delta(t, t') < \alpha\Delta(t, t').$$

Отсюда с учетом структуры возмущающей матрицы $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, элементы которой определены в (2), легко убеждаемся в справедливости следующих соотношений

$$\begin{aligned} g_k(t, t', A_k + B_k^*) = g_k(t, t', A_k) + g_k(t, t', B_k^*) = g_k(t, t', A_k) - \alpha\Delta(t, t') \\ < g_k(t, t', A_k) - \varphi\Delta(t, t') \leqslant 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$[t, t', A + B^*]^- > 0.$$

Отсюда с использованием свойства A6 для любой траектории $t' \in T_s^n(t, A)$ получаем

$$t \ \overline{\Omega_s^n}(A + B^*) \ t'. \tag{7}$$

Если $t' \in T \backslash T_s^n(t, A)$, то согласно свойству A8 имеем

$$t \ \overline{\Omega_s^n}(A) \ t'.$$

Отсюда с применением леммы 2 получаем, что и в этом случае верно (7).

Из соотношения (7) и свойства A7 следует, что t является s-эффективной траекторией возмущенной задачи $Z_s^n(A + B^*)$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > \varphi \quad \exists B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ (T_s^n(A + B^*) \not\subseteq T_s^n(A)).$$

Это значит, что при любом $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho_s^n(A) < \varepsilon$. Следовательно, верно неравенство (6), которое вместе с неравенством (5) дает формулу (4). Теорема доказана.

6. Следствия

Прежде всего отметим, что из формулы (4) при $s = 1$ вытекает известная формула радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z_1^n(A)$ поиска множества Парето [11], а при $s = n$ — формула радиуса устойчивости нетривиальной задачи $Z_n^n(A)$ поиска множества Слейтера [23].

Следующие два утверждения очевидны.

Следствие 1. *При любых $s \in N_n$ и $n \geqslant 1$ радиус устойчивости $\rho_s^n(A)$ конечен тогда и только тогда, когда задача $Z_s^n(A)$ нетривиальна.*

Следствие 2. *При любых $s \in N_{n-1}$ и $n \geqslant 2$ нетривиальная задача $Z_s^n(A)$ устойчива тогда и только тогда, когда для всякой траектории $t \in \overline{T_s^n}(A)$ существует такая траектория $t' \in T_s^n(t, A)$, что $[t, t', A]^0 = 0$.*

Следствие 3. *Нетривиальная задача $Z_s^n(A), s \in N_{n-1}$ и $n \geqslant 2$, устойчива тогда и только тогда, когда множества $T_s^n(A)$ и $T_n^n(A)$ совпадают.*

Доказательство. Необходимость. Пусть нетривиальная задача $Z_s^n(A)$ устойчива. Тогда согласно теореме число φ из правой части формулы (4) положительно. Поэтому для всякой траектории $t \in \overline{T_s^n}(A)$ найдется такая траектория $t' \in T_s^n(t, A)$, что при любом $i \in N_n$ справедливо неравенство

$$g_i(t, t', A_i) \geqslant \varphi\Delta(t, t') > 0.$$

Поэтому $[t, t', A]^+ = n$. Отсюда и из свойства A5 следует соотношение

$$t\ \Omega_n^n(A)\ t'.$$

Поэтому

$$\overline{T_s^n}(A) \cap T_n^n(A) = \emptyset.$$

Следовательно, используя свойство A1, получаем

$$T_s^n(A) = T_n^n(A).$$

Достаточность. Пусть $T_s^n(A) = T_n^n(A)$. Тогда согласно свойству A3 для любых траекторий

$$t \in \overline{T_s^n}(A) = \overline{T_n^n}(A) \ \text{ и } \ t' \in T_s^n(t, A) = T_n^n(t, A)$$

справедливо равенство $[t, t', A]^+ = n$. Следовательно, число из правой части формулы (4) положительно. Поэтому в силу теоремы задача $Z_s^n(A)$ устойчива. Следствие 3 доказано.

Ввиду свойства A3 из теоремы вытекает также

Следствие 4. *Всякая задача* $Z^n_n(A),\ n \geqslant 1$, *поиска множества Слейтера устойчива.*

Частным случаем последнего следствия является известный результат [20] : всякая линейная скалярная (однокритериальная) траекторная задача устойчива.

Из следствия 3 и свойства A1 получаем

Следствие 5. *Пусть* s *и* k *таковы, что* $1 \leqslant s < k \leqslant n-1,\ n \geqslant 3$. *Тогда из устойчивости задачи* $Z^n_s(A)$ *следует устойчивость задачи* $Z^n_k(A)$.

Из следствия 3 и свойства A1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 6. *Если при некотором* $s \in N_{n-1}$ *и* $n \geqslant 2$ *нетривиальная задача* $Z^n_s(A)$ *не является устойчивой, то при каждом* $i \in N_s$ *верно равенство* $\rho^n_i(A) = 0$.

Очевидно, что последние равенства выполняются также и в случае, когда $T^n_s(A) \neq T^n_n(A)$.

Следствие 7. *Если при некотором* $s \in N_{n-1}$ *и* $n \geqslant 2$ *задача* $Z^n_s(A)$ *устойчива, то*

$$\rho^n_i(A) = \rho^n_n(A), \quad i = s, s+1, \dots, n-1. \tag{8}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда устойчивая задача $Z^n_s(A)$ нетривиальна. В этом случае $\overline{T^n_s}(A) \neq \emptyset$. Очевидно, что для любой траектории $t \in \overline{T^n_s}(A)$ непустое множество $T^n_s(t, A)$ можно представить в виде

$$T^n_s(t, A) = Q_1 \cup Q_2,$$

где

$$Q_1 = \{t' \in T \mid t\ \Omega^n_s(A)\ t' \quad \& \quad t\ \Omega^n_n(A)\ t'\},$$
$$Q_2 = \{t' \in T \mid t\ \Omega^n_s(A)\ t' \quad \& \quad t\ \overline{\Omega^n_n}(A)\ t'\}.$$

Согласно свойству A2 получаем

$$Q_1 = \{t' \in T \mid t\ \Omega^n_n(A)\ t'\} = T^n_n(A). \tag{9}$$

Пусть $t' \in Q_2$. Тогда с учетом свойства A5 справедливы соотношения

$$(n-1)[t, t', A]^0 \geqslant [t, t', A]^+ > (s-1)[t, t', A]^0,$$

$$[t, t', A]^- = 0.$$

Поэтому при любой траектории $t' \in Q_2$ выполняется неравенство

$$[t, t', A]^0 > 0.$$

Отсюда следует, что при $t \in \overline{T_s^n}(A)$ имеет место равенство

$$\max_{t' \in Q_2} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')} = 0. \tag{10}$$

Поскольку задача $Z_s^n(A)$ устойчива, согласно следствию 3 верно равенство $\overline{T_s^n}(A) = \overline{T_n^n}(A)$. Отсюда и из (4), (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned}
\rho_s^n(A) &= \min_{t \in \overline{T_s^n}(A)} \max_{t' \in T_s^n(t,A)} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')} \\
&= \min_{t \in \overline{T_n^n}(A)} \max \left\{ \max_{t' \in Q_1} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')}, \max_{t' \in Q_2} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')} \right\} \\
&= \min_{t \in \overline{T_n^n}(A)} \max_{t' \in T_n^n(t,A)} \min_{i \in N_n} \frac{g_i(t, t', A_i)}{\Delta(t, t')} = \rho_n^n(A).
\end{aligned} \tag{11}$$

Из устойчивости нетривиальной задачи $Z_s^n(A)$ согласно следствию 5 вытекает устойчивость любой задачи $Z_i^n(A),\ i = s+1,\ s+2,\ \ldots,\ n-1$. Следовательно, в силу равенства (11) верны все равенства (8).

Наконец, в случае, когда задача $Z_s^n(A)$ тривиальна, равенства (8) справедливы на основании свойства A1, причем $\rho_n^n(A) = \infty$. Следствие 7 доказано.

7. Примеры

В качестве иллюстративных примеров рассмотрим 3-критериальные числовые задачи, в которых $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $t_i = \{e_i\},\ i \in N_4$.

Пример 1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Тогда $f(t_1, A) = (1, 0, 0)$, $f(t_2, A) = (2, 0, 0)$, $f(t_3, A) = (2, 2, 0)$, $f(t_4, A) = (3, 3, 3)$. Поэтому

$$T_1^3(A) = \{t_1\}, \quad T_2^3(A) = \{t_1, t_2\}, \quad T_3^3(A) = \{t_1, t_2, t_3\} \neq T.$$

Далее, воспользовавшись формулой (4), получаем

$$\rho_1^3(A) = \rho_2^3(A) = 0, \quad \rho_3^3(A) = 1.$$

Пример 2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Тогда $f(t_1, A) = (1, 0, 0)$, $f(t_2, A) = (2, 0, 0)$, $f(t_3, A) = (3, 0, 0)$, $f(t_4, A) = (4, 4, 4)$. Отсюда легко видеть, что $T_1^3(A) = \{t_1\}$, $\quad T_2^3(A) = T_3^3(A) = \{t_1, t_2, t_3\} \neq T$. Поэтому по теореме получаем $\rho_1^3(A) = 0$, $\rho_2^3(A) = \rho_3^3(A) = \frac{3}{2}$.

Пример 3. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Тогда

$$T_1^3(A) = T_2^3(A) = T_3^3(A) = \{t_1, t_2, t_3\} \neq T.$$

Отсюда с использованием теоремы получаем

$$\rho_1^3(A) = \rho_2^3(A) = \rho_3^3(A) = 1.$$

Пример 4. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда имеем

$$T_1^3(A) = \{t_1, t_2, t_3\},\ T_2^3(A) = T_3^3(A) = T.$$

Поэтому

$$\rho_1^3(A) = 0,\ \rho_2^3(A) = \rho_3^3(A) = \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Артеменко В. И., Гордеев Э. Н., Журавлев Ю. И., Куликов Ф. М., Наумов В. Б., Потапчук Г. А., Сергиенко И. В., Сметанин Ю. Г., Урхард Р., Ходзинский А. Н., Хондерд Г.** Метод формирования оптимальных программных траекторий перемещения робота-манипулятора // Кибернетика и системный анализ. 1996. № 5. С. 84–106.
2. **Белоусов Е. Г., Андронов В. Г.** Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования. М.: Изд-во МГУ, 1993.
3. **Бердышева Р. А., Емеличев В. А.** Некоторые виды устойчивости комбинаторной задачи лексикографической оптимизации //Изв. вузов. Математика. 1998. № 12. С. 11–21.
4. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** Конечные коалиционные игры: параметризация принципа оптимальности («от Парето до Нэша») и устойчивость обобщенно-эффективных ситуаций // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 6. С. 36–38.

5. **Гордеев Э. Н.** Устойчивость решений в задаче о кратчайшем пути на графе // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 3. С. 39–46.
6. **Гордеев Э. Н.** Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. 2001. № 2. С. 132–144.
7. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Устойчивость в задачах на узкие места // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 1071–1075.
8. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.
9. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 20–27.
10. **Емеличев В. А., Гирлих Э., Подкопаев Д. П.** Об устойчивости эффективных решений векторной траекторной задачи дискретной оптимизации // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 1996. № 3. С. 5–16.
11. **Емеличев В. А., Кравцов М. К.** Об устойчивости в векторных траекторных задачах дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1995. № 4. С. 137–143.
12. **Емеличев В. А., Кричко В. Н.** Радиус устойчивости эффективного решения векторной квадратичной задачи булева программирования // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2001. Т. 41, № 2. С. 346–350.
13. **Емеличев В. А., Никулин Ю. В.** Об устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Доклады НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 4. С. 26–28.
14. **Емеличев В. А., Пашкевич А. В.** О параметризации принципа оптимальности в критериальном пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 1. С. 21–32.
15. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
16. **Емеличев В. А., Похилько В. Г.** Анализ чувствительности эффективных решений векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 37–48.
17. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений // Дискретная математика. 2001. Т. 13, вып. 4. С. 43–51.

18. **Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., Сергиенко И. В.** Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1993. № 3. С. 78–93.

19. **Леонтьев В. К.** Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1309.

20. **Леонтьев В. К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Проблемы кибернетики. Вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 169–184.

21. **Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н.** Качественные исследования траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82–90.

22. **Нэш Дж.** Бескоалиционные игры // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205–221.

23. **Подкопаев Д. П.** Устойчивость векторных задач дискретной оптимизации. Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Минск: Институт математики НАН Беларуси. 1999.

24. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.

25. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, N 4. P. 645–676.

26. **Emelichev V. A., Stepanishina Yu. V.** Stability of a majority efficient solution of a vector trajectorial problem // Computer Science J. of Moldova. 1999. V. 7, N 3. P. 291–307.

27. **Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N.** Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.

28. **Sotskov Yu. N., Tanaev V. S., Werner F.** Stability radius of an optimal schedule: a survey and recent developments // Industrial applications of combinatorial optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 72–108. (Appl. Optim.; V. 16).

Адрес авторов:

Белорусский государственный
университет,
Минск 113,
пр. Ф. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: emelichev@bsu.by

Статья поступила
24 октября 2002 г.,
переработанный вариант —
24 июня 2003 г.