ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2003. Серия 2. Том 10, № 2, 19–28

УДК 519.87+519.854

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ ПРИ ОБОБЩЕННОМ УСЛОВИИ МОНЖА*)

В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин

Рассматривается двухуровневый вариант задачи о назначениях. Предполагается, что матрица коэффициентов в задаче нижнего уровня удовлетворяет обобщенному условию Монжа. Выделяется случай, когда исходная двухуровневая задача решается методом динамического программирования с полиномиальной сложностью.

1. Постановка задачи

Двухуровневая задача о назначениях исследовалась в [2], где установлена ее NP-трудность и предложен способ решения методом ветвей и границ. В настоящей статье рассматриваются частные случаи, когда задача может быть решена за полиномиальное время. Сформулируем задачу, придерживаясь содержательной трактовки из [2].

Некоторый заказчик предлагает n видов работ, которые могут быть выполнены m исполнителями. Предполагается, что $n \geqslant m$ и каждый исполнитель способен выполнить любую работу, но только одну. Заказчику требуется выбрать m таких работ из общего списка, чтобы суммарные затраты на их выполнение были минимальны. Затраты заказчика зависят от способа распределения работ между исполнителями, но это распределение выбирают сами исполнители независимо от заказчика, минимизируя собственные суммарные затраты. Таким образом, задача заключается в наилучшем выборе заказчиком m работ с учетом реакции исполнителей.

Введем обозначения:

$I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$ — множества работ и исполнителей ($n \geqslant m$);

c_{ij}, d_{ij} — затраты заказчика и исполнителя соответственно, связанные с выполнением работы $i \in I$ исполнителем $j \in J$;

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00977).

$C = (c_{ij})$, $D = (d_{ij})$ — матрицы затрат;

K — подмножество работ из общего списка I, предлагаемых заказчиком исполнителям ($|K| = m$);

$x = (x_{ij})$ — матрица назначений исполнителей на работы из списка K, т. е. $x_{ij} = 1$, если работу $i \in K$ делает исполнитель $j \in J$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

В принятых обозначениях требуется найти минимум суммарных затрат заказчика

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in J} c_{ij} x^*_{ij} \tag{1}$$

при ограничениях

$$K \subseteq I, \quad |K| = m, \quad (x^*_{ij}) \in X^*(K), \tag{2}$$

где $X^*(K)$ — множество оптимальных решений следующей задачи о назначениях исполнителей: найти минимум суммарных затрат

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \quad i \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in K} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in K,\ j \in J. \tag{6}$$

Содержательно двухуровневая задача (1)–(6) отражает «кооперативную» ситуацию, т. е. если множество $X^*(K)$ наилучших назначений исполнителей содержит более одного варианта, то исполнители выбирают вариант, наиболее выгодный для заказчика.

2. Условие Монжа и его обобщение

Пусть $B = (b_{ij})$ — произвольная числовая матрица размера $n \times m$. Матрица B удовлетворяет *условию Монжа,* если при любых $i < k$ и $j < l$ выполняется неравенство

$$b_{ij} - b_{kj} \leqslant b_{il} - b_{kl}. \tag{7}$$

Это условие применяется в задачах о назначениях [5] и при нахождении полиномиально разрешимых случаев задачи коммивояжера [4]. В форме строгого неравенства (7) это условие использовалось в [3] при решении двухуровневой задачи размещения пунктов производства. Структура двухуровневой задачи о назначениях (1)–(6) позволяет использовать следующее обобщение условия Монжа.

Пусть матрица $B = (b_{ij})$ обладает *разделимыми разностями,* т. е. при любых $i < k$ и $j < l$ выполняется неравенство

$$b_{ij} - b_{kj} \neq b_{il} - b_{kl}.$$

Через $\Delta(i,k)$ обозначим перестановку столбцов $(j_1,\dots,j_m)$, которая упорядочивает компоненты разности i-й и k-й строк матрицы B по возрастанию, т. е.

$$b_{ij_s} - b_{kj_s} < b_{ij_{s+1}} - b_{kj_{s+1}}, \quad s = 1,\dots,m-1.$$

Пусть $\beta_1,\dots,\beta_n$ — некоторый набор перестановок столбцов. Будем говорить, что матрица B удовлетворяет *условию Монжа с набором перестановок* $\beta_1,\dots,\beta_n$, если B обладает разделимыми разностями и выполняются равенства

$$\beta_i = \Delta(i,k), \quad 1 \leqslant i < k \leqslant n.$$

(Отметим, что перестановка β_n не участвует в этих равенствах. Она выбирается произвольно и введена для единообразия последующих записей, связанных со строкой n.) В частности, если перестановки $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ равны тождественной перестановке $(1,\dots,m)$, то получаем обычное условие Монжа со строгим неравенством (7).

Лемма 1. *Для любого набора перестановок $\beta_1,\dots,\beta_n$ найдется матрица B, удовлетворяющая условию Монжа с этим набором.*

Доказательство. Искомую матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$ будем вычислять построчно в порядке номеров $n, n-1,\dots,1$. Элементы $b_{n1},\dots,b_{nm}$ последней строки выбираются произвольно. Опишем общий шаг. Пусть построены строки с номерами $i+1,\dots,n$ и $\beta_i = (j_1,\dots,j_m)$. Элементы $b_{i1},\dots,b_{im}$ i-й строки должны удовлетворять неравенствам

$$b_{ij_s} - b_{kj_s} < b_{ij_{s+1}} - b_{kj_{s+1}}, \quad k = i+1,\dots,n,\ s = 1,\dots,m-1,$$

или, в равносильном виде,

$$b_{ij_s} - b_{ij_{s+1}} < \min\{b_{kj_s} - b_{kj_{s+1}} \mid k = i+1,\dots,n\}, \tag{8}$$

$$s = 1, \dots, m-1.$$

Через δ_{is} обозначим для краткости правую часть (8). Компоненты i-й строки вычисляются в порядке $b_{ij_1}, \dots, b_{ij_m}$. Величина b_{ij_1} выбирается произвольно. Если построены элементы $b_{ij_1}, \dots, b_{ij_s}$, то величина $b_{ij_{s+1}}$ выбирается произвольно с соблюдением условия

$$b_{ij_{s+1}} > b_{ij_s} - \delta_{is}.$$

Корректность описанной процедуры очевидна. Лемма 1 доказана.

3. Задача о назначениях при условии Монжа

Рассмотрим задачу о назначениях (3)–(6), предполагая, что матрица $D = (d_{ij})$ затрат исполнителей удовлетворяет условию Монжа с некоторым набором перестановок $\beta_1, \dots, \beta_n$. Введем одно необходимое обозначение.

Пусть $\beta = (j_1, \dots, j_m)$ — произвольная перестановка столбцов J и J' — подмножество множества J не более чем с $m-1$ элементами. Через $\mu(\beta, J')$ обозначим первый по порядку элемент перестановки β, который не входит в J', т. е. если $s = \min\{k \mid j_k \notin J'\}$, то $\mu(\beta, J') = j_s$. В частности, $\mu(\beta, \varnothing) = j_1$.

Пусть множество K в задаче (3)–(6) состоит из номеров строк $i_1, \dots,$ i_m, расположенных по возрастанию. Этим строкам поставим в соответствие номера столбцов $l_1, \dots, l_m$, вычисляемые по следующим соотношениям:

$$l_1 = \mu(\beta_{i_1}, \varnothing), \quad l_s = \mu(\beta_{i_s}, \{l_1, \dots, l_{s-1}\}),\ s = 2, \dots, m. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если матрица $D = (d_{ij})$ удовлетворяет условию Монжа с набором перестановок $\beta_1, \dots, \beta_n$, то задача о назначениях*(3)–(6) *имеет единственное оптимальное решение $x^* = (x^*_{ij})$ с компонентами $x^*_{i_s l_s} = 1$, $s = 1, \dots, m$, и $x^*_{ij} = 0$ в остальных случаях.* (Здесь, как и выше, $K = \{i_1, \dots, i_m\}$, а индексы $l_1, \dots, l_m$ вычисляются по равенствам (9)).

Доказательство. Возьмем произвольное решение $x = (x_{ij})$, удовлетворяющее (4)–(6) и имеющее компоненту $x_{i_1 l_1} = 0$. В силу (4)–(6) найдутся строка $k \in K$ и столбец $s \in J$ такие, что $x_{i_1 s} = x_{k l_1} = 1$, $x_{ks} = 0$, где $k > i_1$, $s \neq l_1$. Рассмотрим другое допустимое решение $x' = (x'_{ij})$, которое отличается от x только следующими четырьмя компонентами:

$$x'_{i_1 l_1} = x'_{ks} = 1, \quad x'_{i_1 s} = x'_{k l_1} = 0.$$

Обозначим через f и f' значения функционала (3) на решениях x и x' соответственно. Вычисляя разность $f - f'$ и учитывая условие Монжа, получаем

$$f - f' = (d_{i_1 s} - d_{ks}) - (d_{i_1 l_1} - d_{k l_1}) > 0.$$

Поэтому $f > f'$ и, следовательно, в любом оптимальном решении $x^* = (x^*_{ij})$ задачи (3)–(6) должно быть $x^*_{i_1 l_1} = 1$. Фиксируя эту компоненту и проводя аналогичные рассуждения о возможном значении $x^*_{i_2 l_2}$, получаем, что $x^*_{i_2 l_2} = 1$. Продолжая этот процесс, через m шагов убеждаемся в справедливости утверждения. Лемма 2 доказана.

Таким образом, алгоритм решения задачи о назначениях (3)–(6) в условиях леммы 2 заключается в расчете номеров столбцов по формулам (9).

4. Двухуровневая задача о назначениях при условии Монжа

Ниже на основе условия Монжа выделяются полиномиально разрешимые случаи задачи (1)–(6).

Теорема 1. *Если матрицы* $C = (c_{ij})$ *и* $D = (d_{ij})$ *удовлетворяют условию Монжа с одним и тем же набором перестановок* $\beta_1, \ldots, \beta_n$, *то задача* (1)–(6) *сводится к следующей задаче о назначениях с прямоугольной матрицей: найти минимум суммы*

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \tag{10}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leqslant 1, \quad i \in I, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{12}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим через F^* и f^* оптимумы в задачах (1)–(6) и (10)–(13) соответственно. Очевидно, что $F^* \geqslant f^*$. Рассмотрим произвольное оптимальное решение (x^*_{ij}) задачи (10)–(13). Через K обозначим множество строк, содержащих единичные компоненты.

По построению набор $x^* = (x^*_{ij})$, где $i \in K$ и $j \in J$, является оптимальным решением задачи о назначениях с матрицей коэффициентов (c_{ij}), $i \in K$, $j \in J$. В силу условия теоремы и леммы 2 решение x^* вычисляется однозначно по формулам (9) и перестановкам $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Но в силу тех же причин решение x^* оптимально в задаче (3)–(6) при данном K, т. е. является допустимым решением в задаче (1)–(6). Поэтому $F^* \leqslant f^*$ и с учетом противоположного неравенства получаем

$$F^* = f^* = \sum_{i \in K} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^*,$$

т. е. пара (x^*, K) оптимальна в задаче (1)–(6). Теорема 1 доказана.

Посредством добавления $n - m$ нулевых столбцов к матрице C задача (10)–(13) сводится к обычной задаче о назначениях с квадратной матрицей порядка n и решается, например, алгоритмом из [1] с вычислительной сложностью $O(n^3)$.

Пусть матрица $C = (c_{ij})$ произвольна, а матрица $D = (d_{ij})$ удовлетворяет условию Монжа с набором перестановок $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Рассмотрим возможности применения к задаче (1)–(6) метода динамического программирования.

Пусть множество K состоит из строк $i_1, \ldots, i_m$, записанных в возрастающем порядке. С учетом леммы 2 задачу (1)–(6) можно записать в следующем эквивалентном виде: найти минимум суммы

$$\sum_{s=1}^{m} c_{i_s l_s} \tag{14}$$

при ограничениях

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n, \quad i_s \in I, \ s = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Индексы $l_1, \ldots, l_m$ вычисляются по формулам (9).

Введем параметрическое множество задач, аналогичных задаче (14), (15). Обозначим через H множество пар чисел (k, t), удовлетворяющих условиям

$$1 \leqslant k \leqslant t \leqslant n - m + k, \quad k = 1, \ldots, m, \ t = 1, \ldots, n.$$

Для пары $(k, t) \in H$ сформируем следующее множество $I(k, t)$ наборов строк $i_1, \ldots, i_k$:

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k = t, \quad i_s \in I, \ s = 1, \ldots, k.$$

Каждому такому набору строк $i_1, \ldots, i_k$ поставим в соответствие номера столбцов $l_1, \ldots, l_k$, вычисляемые по формулам (9). Через $G(k, t)$ обозначим список всех различных наборов $g = \{l_1, \ldots, l_k\}$, рассматриваемых как неупорядоченные множества.

Для каждой тройки (k,t,g), где $(k,t) \in H$ и $g \in G(k,t)$, сформулируем задачу: найти минимум суммы

$$\sum_{s=1}^{k} c_{i_s l_s} \tag{16}$$

при ограничениях

$$\{i_1,\ldots,i_k\} \in I(k,t), \quad \{l_1,\ldots,l_k\} = g. \tag{17}$$

Индексы $l_1,\ldots,l_k$ вычисляются по формулам (9). Это и есть искомое семейство задач. Через $F(k,t,g)$ обозначим оптимум задачи (16), (17).

При $k = m$ список $G(m,t)$ включает только одно множество $g = J$. Поэтому оптимум F^* задач (1)–(6) и (14), (15) есть

$$F^* = \min\{F(m,t,J) \mid t = m, m+1, \ldots, n\}. \tag{18}$$

При $k = 1$, полагая $j_t = \mu(\beta_t, \emptyset)$, получаем по определению

$$F(1,t,\{j_t\}) = c_{tj_t}, \quad G(1,t) = \{j_t\}, \quad t = 1,\ldots,n-m+1. \tag{19}$$

Пусть $k \geqslant 2$, $(k,t) \in H$ и $g \in G(k,t)$. Рассуждениями, обычными для динамического программирования, получаем рекуррентное соотношение

$$F(k,t,g) = \min_{j,s}\{c_{tj} + F(k-1,s,g \setminus j)\}, \tag{20}$$

где минимум берется при ограничениях

$$j = \mu(\beta_t, g \setminus j), \quad g \setminus j \in G(k-1,s), \quad j \in g, \tag{21}$$

$$s = k-1, k, \ldots, t-1. \tag{22}$$

Приведем алгоритм вычисления списка $G(k,t)$ и величин $F(k,t,g)$, где $g \in G(k,t)$, по уравнению (20) при фиксированной паре $(k,t) \in H$.

Шаг 1. Положить $G(k,t) = \emptyset$.

Шаг 2. Последовательно просмотреть все элементы из ранее построенных списков $G(k-1,s)$, $s = k-1,\ldots,t-1$. Пусть $g' \in G(k-1,s)$. Положить $j = \mu(\beta_t, g')$, $g = g' \cup j$. Если $g \notin G(k,t)$, то добавить g к списку $G(k,t)$ и положить $F(k,t,g) = c_{tj} + F(k-1,s,g')$. Если $g \in G(k,t)$, то положить $F(k,t,g) = \min\{F(k,t,g),\ c_{tj} + F(k-1,s,g')\}$.

Конец

Расчет величин $F(k,t,g)$, F^* по уравнениям (19), (20) и (18) составляет *прямой* ход динамического программирования. В процессе счета запоминаются *условно оптимальные решения,* т. е. значения переменных, на которых достигаются экстремумы в (20) и (18). Оптимальное решение находится *обратным* ходом по условно оптимальным решениям.

Оценим сверху число арифметических операций, необходимых на прямом и обратном ходах, считая, что каждая операция совершается за единицу времени. Сложность проверки включения вида $g \in G(k,t)$ не превосходит $O(mR)$, где

$$R = \max\{|G(k,t)| \mid (k,t) \in H\}.$$

Обращение к описанному выше алгоритму при данной паре $(k,t) \in H$ требует $O(mnR^2)$ операций. Число пар (k,t) равно $O(mn)$. Следовательно, на прямой ход вычислений затрачивается $O(m^2n^2R^2)$ операций. Обратный ход требует $O(m)$ операций.

В целом, время расчетов T и объем памяти V, необходимой для хранения величин $F(k,t,g)$, списков $G(k,t)$ и условно оптимальных решений, составляют

$$T = O(m^2n^2R^2), \quad V = O(m^2nR). \tag{23}$$

Оценки (23) не являются полиномиальными, поскольку величина R в общем случае экспоненциально зависит от m. Выделим ситуацию, когда эти оценки оказываются полиномиальными.

Пусть $\beta_1, \dots, \beta_n$ — некоторый набор перестановок элементов из J. Через q_k обозначим число различных элементов, встречающихся на первых k местах перестановок $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Очевидно, что

$$k \leqslant q_k \leqslant m, \quad k = 1, \dots, m. \tag{24}$$

Теорема 2. *Если матрица $D = (d_{ij})$ удовлетворяет условию Монжа с набором таких перестановок $\beta_1, \dots, \beta_n$, что*

$$q_k - k \leqslant p, \quad k = 1, \dots, m, \tag{25}$$

где p — заданное неотрицательное число, то двухуровневая задача о назначениях (1)–(6) решается методом динамического программирования с полиномиальной сложностью.

Доказательство. Рассмотрим схему динамического программирования (18)–(22). Пусть $(k,t) \in H$. Оценим размер списка $G(k,t)$. С учетом (24), (25) получаем

$$|G(k,t)| \leqslant \tbinom{q_k}{k} = \tbinom{q_k}{q_k - k} \leqslant q_k^{q_k - k} \leqslant q_k^p \leqslant m^p.$$

Следовательно, $R \leqslant m^p$ и оценки (23) принимают вид

$$T = O(m^{2+2p}n^2), \quad V = O(m^{2+p}n), \tag{26}$$

т. е. алгоритм динамического программирования имеет полиномиальную сложность. Теорема 2 доказана.

В заключение рассмотрим наиболее простой случай теоремы 2, когда $p = 0$. Из (24) и (25) следует, что $q_k = k$, $k = 1, \dots, m$. Поэтому перестановки $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ равны между собой. Изменяя нумерацию элементов из J, можно считать, что

$$\beta_i = (1, 2, \dots, m), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Из формул (9) получаем, что $l_s = s$, $s = 1, \dots, m$, при любом множестве строк K. Задача (14), (15) принимает вид: найти минимум суммы

$$\sum_{s=1}^{m} c_{i_s s}$$

при ограничениях (15). В схеме (18)–(22) список $G(k, t)$ состоит только из одного множества $\{1, \dots, k\}$. Поэтому аргумент g в выражении $F(k, t, g)$ можно опустить, и уравнения (18)–(22) принимают вид

$$F(1, t) = c_{t1}, \quad t = 1, \dots, n - m + 1,$$

$$F(k, t) = \min\{c_{tk} + F(k-1, s) \mid s = k-1, \dots, t-1\},$$

$$k \geqslant 2, \quad (k, t) \in H,$$

$$F^* = \min\{F(m, t) \mid t = m, m+1, \dots, n\}.$$

Расчеты по этой схеме можно организовать со сложностью

$$T = O(mn^2), \quad V = O(mn),$$

что лучше оценок (26) при $p = 0$, следующих из общего случая теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Диниц Е. А., Кронрод М. А.** Один алгоритм решения задачи о назначении // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 23–25.
2. **Ларин Р. М., Пяткин А. В.** Двухуровневая задача о назначениях // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 2. С. 42–51.
3. **Шамардин Ю. В.** О двухуровневой задаче размещения при ограничениях на объем производства // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 114–118.
4. **Burkard R. E.** Efficiently solvable special cases of hard combinatorial optimization problems // Math. Programming. Ser. B. 1997. V. 79, N 1–3. P. 55–70.

5. **Derigs U., Goecke O., Schrader R.** Monge sequences and a simple assignment algorithm // Discrete Appl. Math. 1986. V. 15, N 2–3. P. 241–248.

Адрес авторов:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия.
E-mail: orlab@math.nsc.ru

Статья поступила
18 июня 2003 г.