ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—декабрь 2003. Серия 2. Том 10, № 2, 56–66

УДК 519.10

КОМИТЕТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ КАК ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ*)

Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай

Рассматриваются концептуальные вопросы теории комитетных решающих правил, показана ее тесная связь с теорией обоснования принятия коллективных решений и обучением нейронных сетей. Приведены новые необходимые условия существования комитетов с заданным числом элементов, сформулированные в терминах теории игр. В частности, для произвольных натуральных чисел q и k, $k < q$, указана минимальная оценка мощности подсистемы, разрешимой комитетом из k элементов для несовместной системы, обладающей комитетом из q элементов.

Введение

Выбор и диагностика — два фундаментальных понятия в моделировании широкого круга явлений — физико-технических, экономических, социальных и других. Эти понятия являются базисными в теории принятия решений. Комитетные конструкции — некоторый класс обобщений решений задач, которые могут быть как совместными, так и несовместными. Это класс дискретных аппроксимаций для противоречивых задач, их можно также соотнести с размытыми решениями. В настоящее время метод комитетов определяет одно из направлений анализа и решения задач эффективного выбора вариантов, оптимизации, диагностики и классификации (см., например, [3–6]) Для примера приведем определение одной из основных комитетных конструкций: p-комитетом системы включений называется такой набор элементов, что каждому включению удовлетворяет более чем p-я часть этого набора.

*)Работа поддержана РФФИ, гранты 01–01–96454, 01–01–00563 и 03–01–00241 и Грантом целевой программы поддержки междисциплинарных проектов, выполняемых в содружестве ученых УрО РАН и СО РАН

Комитетные конструкции можно рассматривать и как некоторый класс обобщений понятия решения на случай несовместных систем уравнений, неравенств и включений, и как средство распараллеливания при решении задач выбора, диагностики и прогнозирования. Как обобщение понятия решения задачи комитетные конструкции представляют собой наборы элементов, обладающие некоторыми (но, как правило, не всеми) свойствами решения: это вид размытых решений. Например, комитет системы ограничений — это такой набор элементов, что каждому ограничению удовлетворяет более половины элементов набора.

Как средство распараллеливания комитетные конструкции непосредственно выступают в многослойных нейронных сетях. Например, нами показано [3, 5], что для обучения нейронной сети точному решению задачи классификации можно применить метод построения комитета некоторой системы аффинных неравенств. Исходя из сказанного, можно заключить, что метод комитетов связан с одним из важных направлений исследования и численного решения как задач диагностики и выбора вариантов, так и задач настройки нейронных сетей с целью получения требуемого их реагирования на входную информацию по той или иной проблеме лица, принимающего решения.

1. Исторические предпосылки возникновения теории комитетных решений

Исторически возникновение концепции комитетных решений связано с вопросом, поставленным Б. Расселом и А. Уайтхедом в начале века: как формируются универсалии, т. е. общие понятия (см. обзор [2]). Ответ на этот вопрос предполагалось получить на языке линейной пороговой логики. А это уже прямой путь к нейронным сетям. Поэтому естественно, что через некоторое время У. Мак-каллох и У. Питтс доказали теорему о том, что любая логическая функция представима некоторой сетью линейных пороговых элементов. Дальнейший шаг: эксперименты Ф. Розенблатта по обучению персептронов распознаванию образов. После этого Н. Нильсон и ряд других американских исследователей рассматривали ассоциативные машины (начало 60-х годов) и вплотную подошли к понятию комитета системы линейных неравенств. Наконец, в 1965 году К. Эйблау и Д. Кейлор явно сформулировали понятие комитета системы линейных неравенств. После этого эта тематика широко исследовалась, но чисто математическая теория с полными и строгими доказательствами развивалась только в Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург).

Необходимо отметить, что изучение несовместных задач, имеющих прозрачный практический смысл, исторически можно проследить еще с XVIII века. Так, например, еще Л. Лежандр, К. Гаусс, а позднее П. Лаплас, предложившие и исследовавшие метод наименьших квадратов, работали с переопределенными, следовательно, как правило противоречивыми, системами линейных алгебраических уравнений.

Другой вопрос о комитетных конструкциях связан с понятием коалиций при выработке коллективных решений. При этом ситуации резко различаются в случае коллективных предпочтений (здесь много подводных камней) и в случае правил коллективной классификации. В этом случае процедуры можно строго обосновать, и они имеют более широкие возможности. Поэтому важно уметь сводить задачи принятия решений к классификационным задачам.

Рассмотрим коалиции в задаче коллективного предпочтения. Пусть X — множество вариантов, из которых по некоторым критериям надо выбрать определенный вариант x. Пусть проблемой такого выбора занимается коллектив (набор) C экспертов или лиц, принимающих решения. В случае, когда выбор осуществляется на основе предпочтений, каждый член f коллектива C представлен бинарным отношением предпочтения $r(f)$. Другими словами, для некоторых x, y из X может иметь место утверждение $x\,r(f)\,y$. Это означает,что для f вариант x будет предпочтительнее варианта y. Коллективное предпочтение $r = r(C)$ можно считать некоторой функцией от индивидуальных предпочтений: $r = \varphi\left(r(f) | \ f \ \textit{пробегает набор } C\right)$. На первый взгляд такое предположение кажется естественным, но именно оно является источником дальнейших противоречий. Оказалось, что коллективное предпочтение не может быть универсальным правилом, оно зависит от конкретных вариантов x, y и от предпочтений $r(f)$. Иными словами, правило не может быть универсальным, оно должно быть локальным. На первый взгляд такое предположение кажется естественным, но именно оно является источником дальнейших противоречий. Оказалось, что коллективное предпочтение не может быть универсальным правилом, оно зависит от конкретных вариантов x, y и от предпочтений $r(f)$. Иными словами, правило φ не может быть универсальным, оно должно быть локальным.

Вообще, исторически можно выделить три направления, приводящие к комитетным конструкциям. Первое направление началось от обобщения понятия решения, в частности, с метода наименьших квадратов. Потом были работы П. Чебышева по приближенным решениям систем линейных неравенств (приложения — в теории механизмов), затем работы С. Н. Черникова и И. И. Еремина по теории чебышевских приближений для несовместных систем линейных неравенств и, наконец, метод комитетов для таких систем. Второе направление исходит от методов обучения нейронных сетей: Ф. Розенблатт изучал персептроны с обучением в одном слое, что обеспечивало решение узкого класса задач, сводимых к линейному разделению конечных множеств; у Н. Нильсона уже были эвристические методы обучения нейросетей в двух слоях, а затем метод комитетов позволил получить точные результаты и обоснованные процедуры обучения, которые позволяют решать широкий класс задач, сводимых к разделению конечных множеств с единственным требованием непустоты их пересечения. Третье направление связано с процедурами голосования.

При голосовании ситуация крайне сложна; здесь на каждом шагу встречаются парадоксы. Нами показано, что противоречия удается избежать в случае, когда решение задачи выбора сведено к серии задач классификации. В этом случае метод комитетов дает хорошие результаты. Методу комитетов отвечает трехслойная нейронная сеть. Из теорем существования комитетов следует, что такую сеть можно обучить по прецедентам решению любой задачи, если это решение выражается словом в каком-либо конечном алфавите.

Приведем аргументы в пользу сведéния принятия решений к сериям задач классификации. Близкая многокритериальной оптимизации процедура коллективных решений является важнейшей в задачах выбора вариантов. Проблема принятия согласованных решений коллективом людей или коллективом решающих правил существовала в глубокой древности и будет существовать всегда. Однако оказалось, что априори нельзя предложить наиболее эффективную процедуру голосования. Она всегда зависит от конкретной ситуации и фактически при грамотном подходе превращается в процесс согласования интересов сторон — процесс, требующий большой аккуратности, чтобы не попасть в одну из многочисленных формальных ловушек. Фактически это игра нескольких лиц, где выигрывает тот, кто хорошо считает и использует малейшие просчеты партнеров.

Процедуры голосования рассматривались еще Аристотелем, который ставил вопросы правовых и этических оснований принятия решений большинством. В самом деле, совсем не ясно, почему большинство обладает правом навязывать свое мнение меньшинству.

Конструктивные шаги по изучению процедур голосования с технической и логической точек зрения были предприняты во Франции в XVIII веке. В Парижской Академии наук академики Ж.-Ш. Борда и Ж. А. Кондорсе рассмотрели задачу голосования как чисто научную проблему, применив математические методы. Эти ученые являются основоположниками научной теории голосования. Можно даже назвать точную дату возникновения этой теории: 16 июня 1770 года Ж.-Ш. Борда на заседании Парижской Академии наук прочел доклад "О способе проведения выборов". В частности, было указано на нетранзитивность голосования большинством голосов, это обстоятельство было также известно Ж. А. Кондорсе. Ж.-Ш. Борда предложил балльное голосование, но Ж. А. Кондорсе заметил, что и оно приводит к противоречиям.

В XIX веке поиски непротиворечивых процедур голосования привели ко многим новым изобретениям, но для каждого нового способа голосования неизменно обнаруживались противоречивые ситуации. Наконец, в середине XX века К. Эрроу показал невозможность коллективного договора; на этом наивный этап теории голосования был завершен. Исследование процедур согласования индивидуальных мнений перешло на качественно новый математический уровень. В частности, в настоящее время оно является предметом изучения теории игр и теории нейронных сетей.

2. Связь с теорией голосования

Рассмотрим следующую естественную математическую модель процедуры принятия решений простым большинством голосов. Пусть имеется m "законопроектов каждый из которых может быть принят или отвергнут комиссией из q равноправных "экспертов". Договоримся нумеровать членов комиссии индексом i, а законопроекты — индексом j. В момент акта принятия решения i-й эксперт находится в состоянии x^i. Через X обозначим множество всех допустимых состояний. Допустим, что j-му законопроекту соответствует подмножество $D_j \subset X$ таких состояний, что условие $x^i \in D_j$ означает голосование в его пользу i-го эксперта при произвольном i. В рамках модели задача проверки возможности принятия указанного выше списка законопроектов одним лицом эквивалентна задаче нахождения решения x системы включений

$$x \in D_j \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, m\} = \mathbb{N}_m), \tag{1}$$

а аналогичная ей задача проверки возможности принятия того же списка комиссией из q равноправных представителей — задаче поиска комитетного решения $Q = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^q)$ системы (1).

По определению (см., например, [4]) последовательность $Q = (x^1, x^2, \ldots, x^q)$ является комитетом системы (1), если при каждом $j \in \mathbb{N}_m$ справедливо неравенство $\big|\{i |\ x^i \in D_j\}\big| > \frac{q}{2}$.

Исходя из ряда содержательных предпосылок, для каждой системы хотелось бы находить комитетные решения с минимально возможным для нее числом элементов — так называемые минимальные комитеты. К сожалению, эта задача в общем случае трудно решаема (NP-трудна для конечных множеств $D_1, D_2, \ldots, D_m$ (см. [4])). Интерес представляют недавно полученные результаты [6, 7], которые для произвольных натуральных чисел q и k, $k < q$, устанавливают связь между разрешимостью системы (1) комитетом из q элементов и относительной величиной мощности наибольшей ее подсистемы, состоящей из k экспертов.

Введем обозначения. Пусть $Q = (x^1, x^2, \ldots, x^q)$ — комитет системы (1). Рассмотрим матрицу A размера $m \times q$, в которой

$$a_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } x^i \in D_j, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По построению, ее элементы удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ji} \geqslant 1 \qquad (j \in \mathbb{N}_m).$$

Ограничимся рассмотрением "подкомитетов" комитета Q, каждый из которых состоит из k представителей. Пусть I — множество номеров элементов из Q, входящих в такой подкомитет. Обозначим через $J(I)$ множество

$$\{j | \sum_{i \in I} a_{ji} \geqslant 1\}$$

номеров законопроектов, образующих наибольшую по включению подсистему системы (1), разрешимую этим подкомитетом, и пусть

$$\delta_{q,k}(I, A) = \frac{|J(I)|}{m}.$$

Вычислим величину

$$\delta_{q,k} = \min_{A} \max_{\{I| \, |I|=k\}} \delta_{q,k}(I, A).$$

Здесь минимизация ведется по множеству таких матриц $A = (a_{ji})$ размера $m \times q$, что

$$a_{ji} \in \{-1, 1\}, \qquad \sum_{i=1}^{q} a_{ji} \geqslant 1, \quad (j \in \mathbb{N}_m),$$

а максимизация — по всевозможным "подкомитетам" из k элементов.

Число $\delta_{q,k}$, очевидно, совпадает с верхней ценой антагонистической игры $\Gamma_{q,k}$ с нулевой суммой двух игроков с множествами стратегий $\{I \subset \mathbb{N}_q | \, |I| = k\}$ и $M(q)$, соответственно и платежной функцией $\delta_{q,k}(I, A)$. Пусть $s = \left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil$ и $t = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$. Приведенные ниже теоремы 1–3 взяты из работ [2, 7]. Доказательства этих теорем содержатся в [2].

Теорема 1. *При произвольных натуральных k и q, $k < q$, справедливы равенства*

$$\delta_{q,k} = \frac{s}{q} \sum_{l=t-1}^{k-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(s-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{s-1}} = \frac{k}{q} \sum_{l=t-1}^{s-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(k-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{k-1}}.$$

Замечания.

1. Указание в теореме двух формул для числа $\delta_{q,k}$ продиктовано, в частности, соображениями минимизации вычислительной сложности процедуры его подсчета. Видно, что при $k \ll q$ рационально использовать первую формулу, в то время как при $k \approx q$ — вторую.

2. За исключением случая, когда $q = 2p$, $k = 2p - 1$ для некоторого натурального p, игра $\Gamma_{q,k}$ не имеет решения в чистых стратегиях, поскольку ее нижняя цена равна нулю.

Теорема 2 [6]. *Игра $\Gamma_{q,k}$ разрешима в смешанных стратегиях, причем в этом случае ее цена совпадает с $\delta_{q,k}$.*

Алгоритм вычисления $\delta_{q,k}$ по точным формулам, к сожалению, имеет большую вычислительную сложность, даже с учетом приведенных выше замечаний. Ниже приводятся предельные соотношения, дающие приближенные значения величины при больших q и k. Воспользуемся стандартным обозначением $b(k; n; p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ и выпишем асимптотические формулы для $\delta_{q,k}$ при $k = q - n$.

Теорема 3 [6]. 1. *Если $n = 2p$ и $p \in \mathbb{N}$, то*

$$\lim_{q \to \infty} \delta_{q,q-2p} = \frac{1}{2}\left(1 + b(p; 2p-1; 0,5)\right).$$

2. *Если $n = 2p - 1$, то $\lim\limits_{q \to \infty} \delta_{q,q-n}$ не существует, так как*

$$\lim_{s \to \infty} \delta_{2s,2(s-p)+1} = \frac{1}{2} + b\left(p; 2p-1; 0,5\right) \quad \text{и} \quad \lim_{s \to \infty} \delta_{2s,2(s-p)} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что общий член в обеих суммах теоремы 1 численно совпадает с вероятностью возможного значения подходящего гипергеометрического закона распределения. Следовательно, теорема 3 может рассматриваться вне контекста теории комитетных конструкций как одна из предельных теорем для этого закона.

3. Комитетные конструкции в задачах диагностики и принятия решений

Приведем некоторые общие соображения, связанные с использованием комитетных конструкций в задачах диагностики и принятия решений. Прежде всего, комитетные конструкции связаны не только с обобщением понятия решения систем уравнений и неравенств, но и с обобщениями понятия существования объектов. Рассмотрим, например, задачу выбора варианта в следующей форме:

$$\exists x \; \forall j \in J \; (x \in M_j). \tag{2}$$

Эта постановка задачи может быть обобщена на тот случай, когда возникает необходимость в применении обобщенного понятия существования. Через $G\exists$ обозначим квантор обобщенного существования, а через W_p — квантор "для p-большинства". Тогда в более общей форме условие существования решения задачи выбора (2) может быть записано так: обобщенное решение задачи (2) существует тогда и только тогда, когда существует комитет p-большинства C такой, что каждое ограничение (т. е. каждое включение $x \in M_j$) удовлетворяется для p-большинства элементов из C. Для более точного оформления этой идеи надо обратиться к возможным предположениям о характере "большинства". Пусть I — совокупность номеров условий в задаче принятия решений. Если J — подмножество множества I, то через $D(J)$ обозначим множество элементов, допустимых по ограничениям с номерами из J. Пусть $B(I)$ — булеан множества I. Выделим некоторое подмножество $N \subset B(I)$. Будем трактовать N как множество всех тех подсистем исходной системы условий, которые считаются невыполнимыми: если J в N, то $D(J)$ — пустое множество.

Будем предполагать, что множество N обладает свойством
(A1): Если $J \in N$ и $S \supseteq J$, то $S \in N$.

Из условия (A1) вытекает, что если множество N не пусто, то система условий (индексное множество которой есть I) невыполнима, т. е. $D(I)$ — пустое множество.

Рассмотрим задачу выделения индексных множеств J — подмножеств множества I таких, что в J не содержится целиком ни одно множество

S, где $S \subseteq N$. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_r$ — все минимальные по включению элементы множества N. Тогда ясно, что задача (2) эквивалентна нахождению подмножеств J множества I таких, что $S_1 \nsubseteq J, \ldots, S_r \nsubseteq J$. Смысл этой задачи (в предположении (A1)) таков: выделяются все "непротиворечивые" подсистемы исходной системы условий. Эта процедура является составной частью некоторых методов построения комитетных конструкций.

Для описания общего взгляда на комитетные конструкции с точки зрения теории решений воспользуемся аксиоматическим подходом к исследованию понятия большинства (см. например: [2]). Пусть X — некоторое непустое множество и $B(X)$ — булеан множества X. Подмножество $M(X)$ множества $B(X)$ есть мажоритарная система на X, если

(A2): $M(X) \neq \emptyset$;

(A3): $(A \in M(X), B \supseteq A) \Rightarrow (B \in M(X))$;

(A4): $(A \in M(X)) \Rightarrow (X \setminus A \notin M(X))$.

Введем следующее определение. Пусть F — подмножество множества $B(I)$, $X = \{x(J) \in D(J) |\ j \in F\}$ — некоторая совокупность решений исходной системы условий, $M(X)$ — мажоритарная система на множестве X. Множество X называется *комитетом большинства* для индексного множества I, если $\forall i \in I\ \{x(J) \in X | i \in J\} \in M(X)$. Содержательный смысл этого определения таков: i-му условию удовлетворяет "большинство" членов комитета. Введем еще одно предположение:

(A5) Пусть $a \in A$ и $X = \{x((S(a))\}$, $X' = \{x(T(a))\}$, $T(a) \supset S(a)$, $D(T(a)) \neq \emptyset$. Тогда

$$(\{x(S(a)) | a \in B\} \in M(X)) \quad \Rightarrow \quad (\{x(T(a)) | a \in B\} \in M(X)).$$

Для описания комитетных конструкций в общем виде с точки зрения принятия решений можно воспользоваться асимптотическим подходом к исследованию понятия большинства [2], где в общем виде дан один из вариантов описания мажоритарной системы.

Другой подход к обоснованию возможности применения комитетных конструкций к задачам выбора использует содержательно принимаемые соглашения о том, какими свойствами должно обладать обобщенное решение как дискретное вероятностное распределение [5].

Итак, комитетные конструкции имеют вид: $[C; d] = [f_1, f_2, \ldots, f_q; d]$ где f_i — i-е решающее правило, d — форма демократии (организация принятия общего решения). В теории принятия решений известно, что нет универсальной процедуры голосования, отличной от диктатуры, которая бы не приводила к противоречиям. Однако в диагностике область непротиворечивых демократий гораздо шире. Диктатура большинства приводит к комитетам большинства, p-большинства, взвешенным и вероятностным комитетам и к другим комитетным конструкциям. Для каждой из них нами доказаны условия их непротиворечивой работы в задачах диагностики. Особняком стоят комитеты старшинства, связанные с понятием диктатуры. Элементы такого комитета линейно упорядочены "по старшинству а комитетное решение совпадает с решением наиболее "старшего" в иерархии.

Общий вид комитетных конструкций (при произвольной демократии) может быть представлен в виде суммы элементов вида $w_i \mathrm{sign}(f_i(x))$, где w_i берутся в области W.

4. Заключение

Понятие комитета большинства хорошо приспособлено к задачам вида:

— выполнение систем ограничений (это вытекает из теорем существования комитетов);

— диагностики (вытекает из тех же теорем);

— классификации (по тем же причинам).

Это понятие плохо приспособлено к проблемам ранжирования вариантов или объектов, или ситуаций (это следствие парадокса Эрроу).

Понятие комитета старшинства хорошо приспособлено

— к задачам диагностики и классификации (это вытекает из теорем существования);

— к ранжированию вариантов (это частный случай теоремы Эрроу о голосовании — при ранжировании диктатура непротиворечива).

Комитет старшинства плохо приспособлен к задачам, где речь идет о выполнении систем ограничений. Впрочем, можно искусственно доопределить, чтобы он и здесь работал. А именно, решение по выполнению ограничения принимается, если для набора $CS = [f_1, k_1; \ldots; f_q, k_q]$, первая по порядку функция f_i, для которой $f_i(x) > 0$, такова, что соответствующее k_i означает выполнение ограничения.

Вообще же комитетные конструкции — это большой важный класс "демократий". К ним относятся минимальные по включению несовместные подсистемы системы ограничений и условий задачи, максимальные по включению совместные подсистемы, наборы решений этих подсистем (коллективные решения), системы представителей, p-комитеты, взвешенные комитеты, вероятностные комитеты, грубые комитеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Виленкин Н. Я., Шрейдер Ю. А.** Принятие экспертных решений на основе мажоритарных структур // Семиотика и информатика. Вып. 8. М.: ВИНИТИ, 1977. С. 83–90.
2. **Вольский В. И., Лезина З. М.** Голосование. М.: Наука, 1991.
3. **Мазуров Вл. Д.** Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990.
4. **Мазуров Вл. Д.** Комитетные решения задач планирования // Методы аппроксимации несобственных задач математического программирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. С. 21–25.
5. **Мазуров Вл. Д., Хачай М. Ю.** Комитетные конструкции // Известия Уральского университета. Сер. Математика–механика. 1999. Вып. 2 (14). С. 77–109.
6. **Хачай М. Ю.** Об одном соотношении, связанном с процедурой принятия решений большинством голосов // ДАН. 2001. Т. 381, № 6. С. 748–752.
7. **Хачай М. Ю.** Об одной игре с природой, связанной с принятием решений большинством голосов // Журнал вычислит. матем. и матем. физики. 2002. Т. 42, № 10. С. 1609–1616.

Адреса авторов:

Вл. Д. Мазуров,
Уральский государственный
университет им. А. М. Горького,
пр. Ленина, 51, 620000 Екатеринбург,
Россия
E-mail: mazurov@nexcom.ru

М. Ю. Хачай,
Институт математики
и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620219 Екатеринбург,
Россия
E-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Статья поступила
30 июня 2002 г.,
переработанный вариант —
24 июня 2003 г.