ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь—март 2004. Серия 1. Том 11, № 1, 3–12

УДК 519.718

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСАХ $\{\not\to, \to\}$, $\{\to, \oplus\}$ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ*)

М. А. Алехина

В каждом из базисов $B_1 = \{\not\to, \to\}$, $B_2 = \{\to, \oplus\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов найден класс булевых функций $K_i\,(i = 1, 2)$ такой, что ненадежность схемы, реализующей функции из K_i, будет асимптотически не меньше 2γ (γ — вероятность неисправности одного элемента) при $\gamma \to 0$. Тем самым доказано, что полученные ранее верхние оценки ненадежности схем оказались достаточно точны, а именно, они асимптотически равны нижним оценкам ненадежности схем, реализующих булевы функции из классов $K_i\,(i = 1, 2)$. Для этих классов асимптотически наилучшие по надежности схемы функционируют с ненадежностью 2γ при $\gamma \to 0$.

Введение

Рассматривается задача построения схем с асимптотически наибольшей надежностью при неисправностях типа 0 на выходах элементов. Показано, что в рассматриваемых базисах для некоторых булевых функций можно строить схемы (асимптотически наилучшие по надежности), функционирующие с ненадежностью 2γ (γ — вероятность неисправности одного элемента) при $\gamma \to 0$.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. Нейман [7]. Он предполагал, что элементы подвержены инверсным неисправностям, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью, не превосходящей ε $(0 < \varepsilon < 1/6)$, реализует функцию $\bar{e}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Неймана произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, вероятность ошибки на выходе которой при любом входном наборе значений переменных не

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке научной программы «Университеты России» (проект 04.01.032) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00053).

превосходит $c\varepsilon$ (c — некоторая абсолютная константа). С ростом числа итераций сложность схемы увеличивается экспоненциально.

Любой метод синтеза схем из ненадежных элементов характеризуется двумя важными параметрами: вероятностью ошибки на выходе схемы (ее ненадежностью) и сложностью схемы. Именно сложности схем уделялось основное внимание в работах С. И. Ортюкова [5], Д. Улига [7] и некоторых других авторов. Задача построения схем из ненадежных элементов с максимально высокой надежностью, подверженных тем или иным неисправностям, Дж. Нейман и другие исследователи не рассматривали. Речь идет о реализации булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном базисе $B = \{e_1, ..., e_m\}$ [6]. Каждому элементу E_i базиса приписано положительное число $v(E_i)$ — вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что каждый элемент схемы независимо от других элементов с вероятностью ε переходит в неисправное состояние. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах.

Вводится функция Шеннона

$$L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \ \min_S L(S),$$

где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, ..., x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leqslant p$, а максимум — по всем булевым функциям f от n переменных.

Пусть $\rho = \min v(E_i)/(n(E_i) - 1)$, где минимум берется по всем таким элементам E_i базиса, что $n(E_i) > 1$, где $n(E_i)$ — число существенных переменных функции e_i, реализуемой элементом E_i, $i = 1, 2, ..., m$.

С. И. Ортюков в [5] показал, что асимптотика функции Шеннона сохраняется для схем из ненадежных элементов при степенном убывании вероятности сбоев ε_n с ростом n, т. е. если последовательности p_n и ε_n таковы, что $QL_g\varepsilon_n < p_n < 1/2$, где $Q > 1$ и L_g — сложность реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе, то $L_{p_n,\varepsilon_n}(n) \sim \rho 2^n/n$.

Для инверсных неисправностей с вероятностью ошибки не более ε Д. Улиг [7] показал, что при любых c, b (c, $b > 0$) существует ε', $\varepsilon' \in (0, 1/2)$, такое, что при любом ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, и $\delta \geqslant (1 + b)\varepsilon L_g$ выполняется соотношение

$$L_{\delta,\varepsilon}(n) \lesssim (1 + c)\rho 2^n/n.$$

Нижняя оценка ненадежности не приводится.

Упомянутые авторы для инверсных неисправностей нашли методы синтеза оптимальных по сложности схем, функционирующих с некоторым уровнем надежности. Задача на максимум надежности схем не ставилась.

В настоящей статье рассматривается реализация булевых функций схемами при однотипных константных неисправностях на выходах элементов в базисах $B_1 = \{\not\to, \to\}$ и $B_2 = \{\to, \oplus\}$. В ней изучается задача построения схем, функционирующих с наибольшей надежностью. В каждом из базисах B_1 и B_2 при неисправностях типа 0 на выходах элементов найден (в явном виде) класс булевых функций K_i $(i = 1, 2)$ такой, что ненадежность схем, реализующих функции из K_i, будет асимптотически не меньше 2γ (γ — вероятность неисправности одного элемента) при $\gamma \to 0$. Тем самым доказано, что полученные ранее верхние оценки ненадежности схем [1] оказались достаточно точны, а именно, они асимптотически равны нижним оценкам ненадежности схем, реализующих булевы функции из классов K_i $(i = 1, 2)$. Для этих классов функций асимптотически наилучшие по надежности схемы функционируют с ненадежностью 2γ при $\gamma \to 0$.

Введем необходимые понятия и определения.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах $\{\not\to, \to\}$, $\{\to, \oplus\}$ [6]. В исправном состоянии схема реализует булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a})$. Все элементы схемы независимо друг от друга переходят в неисправные состояния с вероятностью γ $(\gamma < 1/2)$. Неисправности типа 0 на выходах элементов характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном — константу 0. Аналогично определяются неисправности типа 1 на выходах функциональных элементов.

Замечание 1. Из определения следует, что вероятность ошибки p_0 на выходе любого базисного элемента, подверженного неисправностям типа 0 на выходе, не меньше γ.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ — вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$ при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S, \tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы равна $1 - P(S)$.

Пусть f — произвольная булева функция, отличная от константы, и

S — любая схема, реализующая функцию f. Пусть подсхема C схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию g с ненадежностью $P(C) \leqslant 1/2$. Обозначим через p^1 минимум вероятностей ошибок на выходе подсхемы C по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $g(\tilde{b}) = 0$. Аналогично, p^0 — минимум вероятностей ошибок на выходе подсхемы C по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $g(\tilde{b}) = 1$.

Лемма 1 [3]. *Вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам*:
$P_1(S,\tilde{a}) \geqslant p^1$, *если* $f(\tilde{a}) = 0$;
$P_0(S,\tilde{a}) \geqslant p^0$, *если* $f(\tilde{a}) = 1$.

Замечание 2. Из леммы 1 и замечания 1 следует, что любая схема S, содержащая хотя бы один функциональный элемент, подверженный неисправностям типа 0 на выходе и реализующий функцию, не равную константе 0, имеет ненадежность $P(S) \geqslant \gamma$.

Далее будем считать, что базисные элементы, реализующие функции $x \not\to y$, $x \to y$ и $x \oplus y$, подвержены неисправностям типа 0 на выходах с вероятностью γ. Справедливы леммы 2 — 4, для доказательства которых достаточно непосредственно вычислить вероятности ошибок.

Пусть S — произвольная схема, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, а E — выходной элемент схемы S. Первый вход элемента E соединен с выходом некоторой подсхемы S_1, второй вход элемента E — с выходом некоторой другой подсхемы S_2. Обозначим через $P_{\bar{f}_i}(S_i,\tilde{a})$ вероятность ошибки на входном наборе $\tilde{a}$ схемы S_i, реализующей функцию f_i, $i = 1, 2$.

Лемма 2. *Пусть выходному элементу E приписана функция $\not\to$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S равны*

$$P_1(S,\tilde{a}) = P_1(S_1,\tilde{a})(1 - P_1(S_2,\tilde{a}))(1-\gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ является нулевым для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$$P_1(S,\tilde{a}) = (1 - P_0(S_1,\tilde{a}))P_0(S_2,\tilde{a})(1-\gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ является единичным для функций f_1 и f_2, т. е. $f_i(\tilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$;

$$P_1(S,\tilde{a}) = P_1(S_1,\tilde{a})P_0(S_2,\tilde{a})(1-\gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ такой, что $f_1(\tilde{a}) = 0$ и $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$P_0(S,\tilde{a}) = \gamma + (P_0(S_1,\tilde{a}) + P_1(S_2,\tilde{a}) - P_0(S_1,\tilde{a})P_1(S_2,\tilde{a}))(1-\gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *такой, что* $f_1(\tilde{a}) = 1$ *и* $f_2(\tilde{a}) = 0$.

Лемма 3. *Пусть выходному элементу* E *приписана функция* $\to$. *Тогда вероятности ошибок на выходе схемы* S *равны*:

$$P_0(S, \tilde{a}) = \gamma + P_1(S_1, \tilde{a})(1 - P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$$P_0(S, \tilde{a}) = \gamma + (1 - P_0(S_1, \tilde{a}))P_0(S_2, \tilde{a})(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$;

$$P_0(S, \tilde{a}) = \gamma + P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a})(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *такой, что* $f_1(\tilde{a}) = 0$ *и* $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$P_1(S, \tilde{a}) = (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) - P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *такой, что* $f_1(\tilde{a}) = 1$ *и* $f_2(\tilde{a}) = 0$.

Лемма 4. *Пусть выходному элементу* E *приписана функция* $\oplus$. *Тогда вероятности ошибок на выходе схемы* S *равны*:

$$P_1(S, \tilde{a}) = (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) - 2P_1(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *является нулевым для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde{a}) = 0$, $i = 1, 2$;

$$P_1(S, \tilde{a}) = (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) - 2P_0(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *является единичным для функций* f_1 *и* f_2, *т. е.* $f_i(\tilde{a}) = 1$, $i = 1, 2$;

$$P_0(S, \tilde{a}) = \gamma + (P_1(S_1, \tilde{a}) + P_0(S_2, \tilde{a}) - 2P_1(S_1, \tilde{a})P_0(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *такой, что* $f_1(\tilde{a}) = 0$ *и* $f_2(\tilde{a}) = 1$;

$$P_0(S, \tilde{a}) = \gamma + (P_0(S_1, \tilde{a}) + P_1(S_2, \tilde{a}) - 2P_0(S_1, \tilde{a})P_1(S_2, \tilde{a}))(1 - \gamma),$$

если набор $\tilde{a}$ *такой, что* $f_1(\tilde{a}) = 1$ *и* $f_2(\tilde{a}) = 0$.

1. Неисправности типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\not\to, \to\}$

Теорема 1 [1]. *При неисправностях типа* 0 *на выходах элементов* $x \not\to y$, $x \to y$ *и вероятности* $\gamma \leqslant 1/100$ *любую булеву функцию* f *можно реализовать такой схемой* S, *состоящей из этих элементов, что* $P(S) \leqslant 2\gamma + 7\gamma^2 + 268\gamma^3$.

Пусть $K(n)$ — множество линейных булевых функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Обозначим через $K_1(n)$ множество функций из $K(n)$, отличных от констант и функций вида x_i или $\bar{x}_i$, где $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Легко проверить, что функции x_i и константу 0 можно реализовать абсолютно надежно; функции $\bar{x}_i$, $(x_i \to x_j)$, $x_i \not\to x_j$ и константу 1 — схемами с ненадежностью не более γ $(i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i \neq j)$. Эти схемы для названных функций (см. замечание 1) являются асимптотически наилучшими.

Теорема 2. *Пусть* $f(\tilde{x})$ — *функция из* $K_1(n)$ *и* S — *любая схема, реализующая функцию* f. *Тогда найдется* $d > 0$ *такое, что при любом* $\gamma < d$ *верно неравенство* $P(S) \geqslant 2\gamma + t(\gamma)$, *где* $t(\gamma)$ — *многочлен от* γ, *все одночлены которого степени не менее* 2.

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S. Выделим в S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\not\to$. Поскольку $f \in K_1(n)$, первый вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого элемента E_2. Независимо от того, какие базисные функции приписаны этому элементу, вероятность P_0 ошибки на выходе схемы S при поступлении на входы элемента E_1 набора (10) (см. лемму 2) удовлетворяет неравенству $P_0 \geqslant 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.

2. Пусть элементу E_1 приписана функция $\to$, а на его входы поступают значения функций f_1 и f_2 соответственно. Поскольку $f \in K_1(n)$, функции f_1 и f_2 различны, причем либо f_1 равна константе 1, либо f_2 — константе 0.

2.1. Пусть функция f_1, равная константе 1, реализована некоторой схемой S_1 с ненадежностью $P(S_1) \leqslant k\gamma$, где $k \geqslant 1$ и зависит от схемы S_1. Второй вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого элемента E_2. Пусть p_0 — наименьшая вероятность ошибки на выходе схемы, реализующей функцию f_2. По лемме 2 имеем $p_0 \geqslant \gamma$.

Пусть $\gamma < 1/(2k)$. Пользуясь леммой 3, убеждаемся в том, что вероятность P_0 ошибки на выходе схемы при единичных входных наборах

функции f удовлетворяет неравенству

$$P_0 \geqslant \gamma + \gamma(1 - k\gamma)(1 - \gamma) = 2\gamma + t_1(\gamma),$$

где $t_1(\gamma)$ — многочлен от γ степени не менее 2.

Следовательно, $P(S) \geqslant 2\gamma + t_1(\gamma)$, где $t_1(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2.

2.2. Пусть функция f_2, равная константе 0, реализована некоторой схемой S_0 с ненадежностью $P(S_0) \leqslant m\gamma$, где $m \geqslant 1$ и зависит от схемы S_0. Функция f_1 реализована на выходе некоторого элемента E_3, причем к его выходу подсоединен первый вход элемента E_1.

2.2.1. Пусть элементу E_3 приписана функция $\not\to$. Поскольку $f \in K_1(n)$, первый вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента. Поэтому вероятность ошибки на выходе элемента E_3 удовлетворяет неравенству $P_0 \geqslant 2\gamma - \gamma^2$ (см. лемму 2)). Тогда согласно лемме 3 вероятность ошибки P_1 на выходе схемы S удовлетворяет неравенству $P_1 \geqslant (2\gamma - \gamma^2)(1 - \gamma)$. Следовательно, $P(S) \geqslant (2\gamma - \gamma^2)(1 - \gamma)$.

2.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция $\to$. Поскольку $f \in K_1(n)$, первый вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента. По лемме 3 вероятность ошибки P_1 на выходе элемента E_3 удовлетворяет неравенству $P_1 \geqslant \gamma(1 - \gamma)$.

Пусть $\gamma < 1/(2m)$. Согласно лемме 3 вероятность ошибки P_0 на выходе схемы при единичных входных наборах функции f удовлетворяет неравенству $P_0 \geqslant \gamma + \gamma(1 - m\gamma)(1 - \gamma)^2 = 2\gamma + t_2(\gamma)$, где $t_2(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2.

Следовательно, $P(S) \geqslant 2\gamma + t_2(\gamma)$, где $t_2(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что при малых значениях γ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая булеву функцию $f \in K_1(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности (функционирует с ненадежностью, асимптотически равной 2γ).

Число функций в классе $K_1(n)$ равно $2^{n+1} - 2n - 2$ и мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \not\to y$ и $x \to y$ все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не превосходит 2γ, а функции $f \in K_1(n)$ — схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для функций из $K_1(n)$.

Известно [2], что ненадежности двойственных схем равны. Поэтому утверждения этого раздела справедливы при неисправностях типа 1 на

выходах элементов (ибо двойственный базис совпадает с исходным, а класс $K_1(n)$ двойственен себе).

2. Неисправности типа 0 на выходах элементов в базисе $\{\to, \oplus\}$

Теорема 3 [1]. *При неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \to y$, $x \oplus y$ и вероятности $\gamma \leqslant 1/140$ любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S, состоящей из этих элементов, что $P(S) \leqslant 2\gamma + 108\gamma^2$.*

Пусть $K(n)$ — множество линейных булевых функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Обозначим через $K_2(n)$ множество функций из $K(n)$, отличных от констант и функций вида $x_i \oplus a$ или $x_i \oplus x_j \oplus a$, где $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j, a \in \{0, 1\}$.

Легко проверить, что функции x_i и константу 0 можно реализовать абсолютно надежно, а функции $x_i \oplus a$, $x_i \oplus x_j \oplus a, (x_i \to x_j) \oplus a$ и константу 1 — схемами с ненадежностью не более γ.

Теорема 4. *Пусть $f(\tilde{x})$ — функция из $K_2(n)$ и S — любая схема, реализующая функцию f. Тогда найдется $d > 0$ такое, что при любом $\gamma < d$ верно неравенство $P(S) \geqslant 2\gamma + q(\gamma)$, где $q(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2.*

Доказательство. Пусть произвольная булева функция f, удовлетворяющая условиям теоремы, реализуется схемой S. Выделим в S функциональный элемент E_1, содержащий выход схемы S.

1. Пусть элементу E_1 приписана функция $\oplus$. Поскольку $f \in K_2(n)$, хотя бы один вход элемента E_1 (например, первый) соединен с выходом некоторого элемента E_2 (в силу выбора функции). Независимо от того, какие базисные функции приписаны этому элементу, вероятность ошибки $P(S)$ на выходе схемы S при поступлении на входы элемента E_1 набора $\{10\}$ (см. лемму 5) удовлетворяет неравенству $P_0 \geqslant 2\gamma - \gamma^2$. Тогда $P(S) \geqslant 2\gamma - \gamma^2$.

2. Пусть элементу E_1 приписана функция $\to$, а на его входы поступают значения функций f_1 и f_2 соответственно. Поскольку $f \in K_2(n)$, функции f_1 и f_2 различны, причем либо функция f_1 равна константе 1, либо f_2 — константе 0.

2.1. Пусть функция f_1, равная константе 1, реализована некоторой схемой S_1 с ненадежностью $P(S_1) \leqslant l\gamma$, где $l \geqslant 1$ и зависит от схемы S_1. Второй вход элемента E_1 соединен с выходом некоторого элемента E_2. Пусть p_0 — наименьшая вероятность ошибки на выходе схемы, которая реализует функцию f_2. По лемме 2 имеем $p_0 \geqslant \gamma$.

Пусть $\gamma < 1/(2l)$. Пользуясь леммой 4, получаем

$$P_0 \geqslant \gamma + \gamma(1 - l\gamma)(1 - \gamma) = 2\gamma + q_1(\gamma),$$

где $q_1(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2.

2.2. Пусть функция f_2, равная константе 0, реализована некоторой схемой S_0 с ненадежностью $P(S_0) \leqslant s\gamma$, где $s \geqslant 1$ и зависит от схемы S_0. Пусть функция f_1 реализована некоторой схемой, выходным элементом которой является элемент E_3.

2.2.1. Пусть элементу E_3 приписана функция $\oplus$. Поскольку $f \in K_2(n)$, найдется такой набор, при поступлении которого на входы схемы S на выходе элемента E_3 появляется значение 1 (с вероятностью ошибки $P_0 \geqslant 2\gamma - \gamma^2$ (см. лемму 5)), а на выходе элемента E_1 — значение 0 с вероятностью ошибки $P_1 \geqslant (2\gamma - \gamma^2)(1 - \gamma)$ (см. лемму 4)). Следовательно, $P(S) \geqslant (2\gamma - \gamma^2)(1 - \gamma)$.

2.2.2. Пусть элементу E_3 приписана функция $\to$. Поскольку $f \in K_2(n)$, первый вход элемента E_3 соединен с выходом некоторого элемента. По лемме 3 вероятность ошибки p_1 на выходе элемента E_3 удовлетворяет неравенству $p_1 \geqslant \gamma(1 - \gamma)$.

Пусть $\gamma < 1/(2s)$. Пользуясь леммой 4, получаем

$$P_0 \geqslant \gamma + \gamma(1 - s\gamma)(1 - \gamma)^2 = 2\gamma + q_2(\gamma),$$

где $q_2(\gamma)$ — многочлен от γ, все одночлены которого степени не менее 2. Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что при малых значениях γ любая схема, удовлетворяющая условиям теоремы 3 и реализующая булеву функцию $f \in K_2(n)$, является асимптотически наилучшей по надежности (функционирует с ненадежностью, равной 2γ).

Число функций в классе $K_2(n)$, равное

$$2^{n+1} - 2C_n^2 - 2n - 2 = 2^{n+1} - n^2 - n - 2,$$

мало по сравнению с общим числом 2^{2^n} булевых функций от n переменных.

Таким образом, при неисправностях типа 0 на выходах элементов $x \to y$ и $x \oplus y$ все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не превосходит 2γ, а функции $f \in K_2(n)$ — схемами, ненадежность которых асимптотически равна 2γ при $\gamma \to 0$. С точки зрения надежности функционирования эти схемы являются асимптотически наилучшими для функций из $K_2(n)$.

Известно [2], что ненадежности двойственных схем одинаковы. Поэтому теоремы 3 и 4 справедливы в базисах $\{\not\to, \to\}$ при неисправностях типа 1 на выходах элементов, причем теорема 4 верна для функций из класса $K_2(n)$, поскольку такие функции двойственны себе.

В заключение автор благодарит проф. Н. П. Редькина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алехина М. А.** Верхние оценки ненадежности схем в базисах из двухвходовых функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы четвертой молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 сентября 2000 г.). М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2000. С. 12–20.
2. **Алехина М. А.** О надежности двойственных схем // Материалы XI Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем"(Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000 г.). Ч. 1. М.: Изд-во центра прикл. исслед. при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001. С. 6–8.
3. **Алехина М. А.** Нижние оценки ненадежности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 3. С. 3–28.
4. **Нейман Дж.** Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. С. 68–139.
5. **Ортюков С. И.** Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Проблемы передачи информации. 1981. Т. 17, вып. 4. С. 84–97.
6. **Редькин Н. П.** Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
7. **Uhlig D.** Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity // Fundamentals of computation Theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin: Springer-Verl., 1987. P. 462–469. (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278).

Адрес автора:

Пензенский государственный университет,
ул. Красная, д. 40,
440026 г. Пенза,
Россия,
E-mail: ama@sura.ru

Статья поступила
4 октября 2003 г.